



## Delprøve 1: Kun med den centralt udmeldte formelsamling

**Opgave 1** To funktioner  $f$  og  $g$  er bestemt ved

$$f(x) = x^2$$

$$g(x) = \frac{16}{x}, \quad x > 0.$$

(10 point)

**a) Bestem  $f(3)$  og  $g(4)$ .**

Vi indsætter  $x = 3$  i forskriften for  $f(x)$ :

$$f(3) = 3^2 = \mathbf{9}$$

Tilsvarende med  $x = 4$  i  $g(x)$ :

$$g(4) = \frac{16}{4} = \mathbf{4}$$

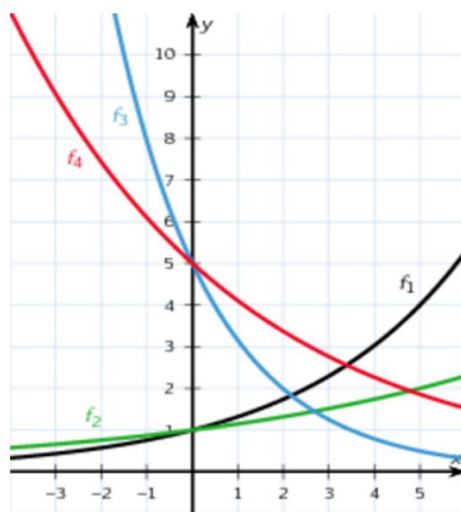
**Opgave 2** En funktion  $f$  er givet ved

$$f(x) = \begin{cases} 2^x & 0 \leq x < 2 \\ -x + 6 & 2 \leq x \end{cases}$$

(10 point)

a) Undersøg om punktet  $P(3, 8)$  ligger på grafen for  $f$ .

$x = 3$ : Da  $2 \leq 3$  bruges forskriften:  $f(x) = -x + 6$  dvs.  $f(3) = -3 + 6 = 3$   
**Derfor ligger punktet P ikke på grafen.** (Det gør til gengæld punktet  $(3, 3)$ ).

**Opgave 3**

Fire eksponentielle funktioner har grafer som vist i ovenstående koordinatsystem.

a) Hvad er b-værdien for funktionen  $f_3$ 

Vi kan aflæse  $x = 0$  så er  $f(x) = b = 5$

b) Bestem fordoblingskonstanterne for de to voksende funktioner.

(10 point)

De to voksende funktioner er  $f_1$  og  $f_2$ . Vi aflæser på grafen for  $f_1$  punkterne  $(0, 1)$ ,  $(2.5, 2)$  og  $(5, 4)$ . Heraf fremgår det, at y-værdien fordobles, når  $x$  vokser med 2,5.

$$T = x_2 - x_1 = 2,5 - 0 = 2,5$$

Dvs. at **fordoblingskonstanten for  $f_1$  er 2,5**

Vi aflæser på grafen for  $f_2$  punkterne  $(0, 1)$  og  $(5, 2)$ .

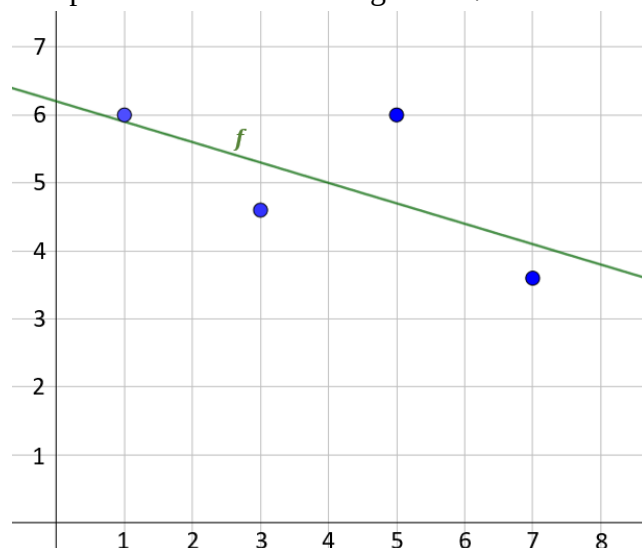
Heraf fremgår det, at y-værdien fordobles, når  $x$  vokser med 5.

$$T = x_2 - x_1 = 5 - 0 = 5$$

Dvs. at **fordoblingskonstanten for  $f_2$  er 5**

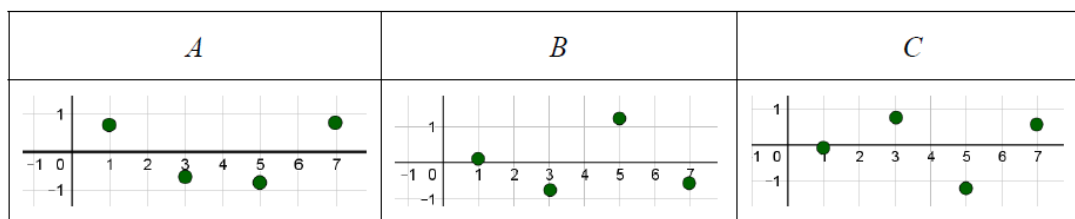
## Opgave 4

På figuren ses 4 punkter fra et datasæt og en tilhørende lineær model  $f$ .



(10 point)

- a) Gør rede for hvilket af nedenstående residualplots, der beskriver sammenhængen mellem datasæt og modellen.



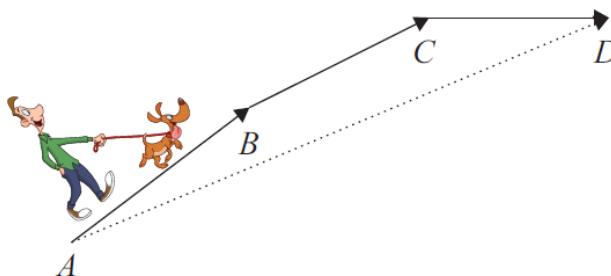
Vi kan aflæse residualerne - residualen er forskellen mellem observeret  $y$ -værdi ( $y$ ) og modellens  $y$ -værdi ( $f(x)$ ).  $r_1 = y_1 - f(x_1)$

| $x$      | 1   | 3    | 5   | 7    |
|----------|-----|------|-----|------|
| Residual | 0,1 | -0,8 | 1,2 | -0,5 |

Kun **plot B** beskriver sammenhængen mellem datasæt og model.

## Opgave 5

En person følger på sin gåtur en rute fra punktet A til punktet D. Figuren viser en model af ruten.



I et koordinatsystem beskrives modellen af rutens dele ved vektorerne

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}, \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ og } \overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}$$

, hvor  $t$  er et tal.

Personen kan lægge sin rute, så turen går direkte fra  $A$  til  $D$ , hvor  $\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 14 \\ 5 \end{pmatrix}$ .

(10 point)

a) Bestem  $t$ .

Indskudsreglen kan vi opstille ligningen (og løse den mht.  $t$ ):

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} \Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ 5 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 10 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ 5 \end{pmatrix} \Leftrightarrow t = 14 - 10 = 4$$

## Opgave 6

(10 point)

a) Reducer udtrykket  $2a \cdot (b + a) - b \cdot (2a + b)$

Vi reducerer ved at gange ind i parenteser:

$$2ab + 2a^2 - 2ab - b^2 = 2a^2 - b^2$$

## Opgave 7

I et koordinatsystem er givet to punkter  $A(12, -10)$  og  $B(2, 5)$  samt en vektor  $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ .

(10 point)

a) Bestem  $\overrightarrow{AB}$ .

Ifølge formel (49):

a)

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 - 12 \\ 5 - (-10) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ 15 \end{pmatrix}$$

b) Bestem arealet af parallelogrammet udspændt af  $\overrightarrow{AB}$  og  $\vec{a}$ .

(5 point)

Ifølge formel (61) er **arealet af parallelogrammet** =

b)

$$|\det(\overrightarrow{AB}, \vec{a})| = \left| \begin{vmatrix} -10 & 2 \\ 15 & -1 \end{vmatrix} \right| = |(-10) \cdot (-1) - 15 \cdot 2| = |10 - 30| = |-20| = 20$$



## Delprøve 2: Med alle hjælpemidler - opgave 8-13

### Opgave 8



Foto: colourbox.dk

Et firma udlejer cykler. Prisen for at leje en cykel er 21 kr. i startgebyr og 0,35 kr. pr. minut i den periode, man lejer cyklen.

(10 point)

- a) Opstil en model, som angiver den samlede pris (målt i kr.) for at leje en cykel som funktion af lejeperioden (målt i antal minutter). Beskriv, hvad de variable i modellen står for.

**Vi definerer den uafhængige variable  $x$  som lejeperioden (målt i min.) og den afhængige variable  $f(x)$  som den samlede pris (målt i kr.) for lejen i  $x$  min.**

**Vi kan benytte en lineær model, da lejen stiger med et fast beløb pr.  $x$ -enhed:**

$$f(x) = 0,35 \cdot x + 21$$

(10 point)

- b) Bestem, hvor længe man kan leje cyklen for 50. kr. (og grafisk i GeoGebra)

Vi løser ligningen

"prisen=50":

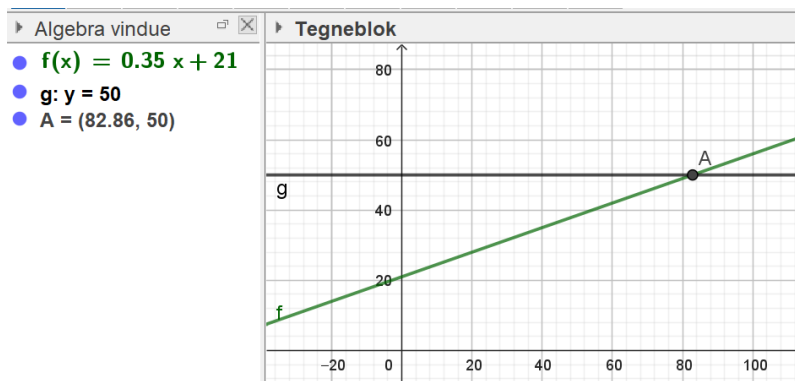
$$f(x) = 0,35 \cdot x + 21 = 50$$



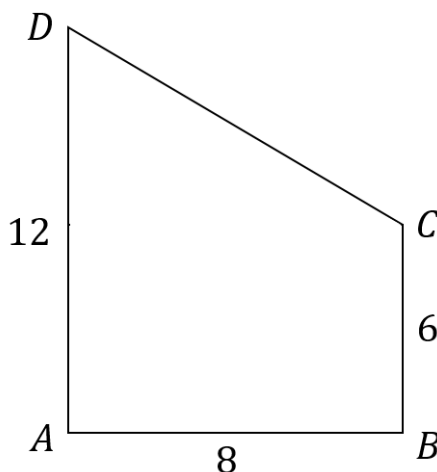
Ligningen løses for  $x$   
vha. CAS-værktøjet WordMat.

$$x = 82,86$$

Dvs. at man kan leje  
cyklen i knapt 83 min. for  
50 kr.



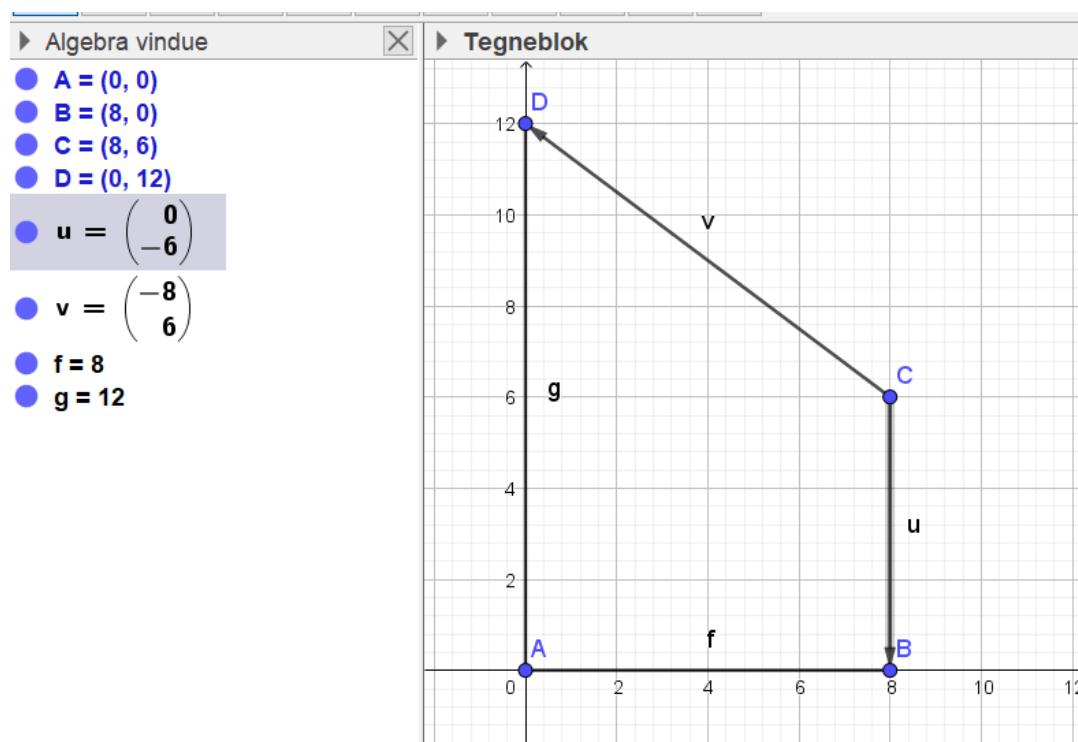
**Opgave 9** En indhegning har form som vist på figuren. Nogle af målene er angivet på figuren.



(10 point)

- a) Tegn en model af indhegningen i et koordinatsystem, hvor koordinatsættet for punktet  $A$  er  $A(0, 0)$ .

Modellen er tegnet i Geogebra ved at indsætte punkterne (da koordinaterne er trivielle) og forbinde med hhv. vektorer og linjestykker:



(10 point)

- b) Bestem koordinatsættene for vektorerne  $\overrightarrow{CB}$  og  $\overrightarrow{CD}$  i din model.

Koordinaterne er beregnet af Geogebra, idet på tegningen  $\overrightarrow{CB} = u = \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \end{pmatrix}$  og



b)

$\overrightarrow{CD} = v = \begin{pmatrix} -8 \\ 6 \end{pmatrix}$ . Samme resultater fås ved beregning vha. formel (49)-her vist med  $\overrightarrow{CD}$ .

$$\overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 - 8 \\ 12 - 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 6 \end{pmatrix}$$

(10 point)

c) Bestem indhegningens omkreds.

c)

Omkredsen af ABCD er lig  $|AB| + |BC| + |DA| + |CD|$ .  
Her er de første tre afstande givne. Vi kan beregne  $|CD|$  som længden af vektor  $\overrightarrow{CD}$ :

$$|\overrightarrow{CD}| = \sqrt{((-8)^2 + 6^2)} = 10$$

$$\text{Dvs.: Omkredsen} = |AB| + |BC| + |DA| + |CD| = 8 + 6 + 12 + 10 = 36$$

**Opgave 10**

På en bestemt ø har man hvert år i en årrække udtaget en stikprøve blandt de lam, der skulle slagtes, og målt den gennemsnitlige slagtevægt for disse.

| År                            | 0    | 1    | 2    | 3    | 4    | 5    | 6    |
|-------------------------------|------|------|------|------|------|------|------|
| Gennemsnitlig slagtevægt (kg) | 41,0 | 41,4 | 42,2 | 42,7 | 42,4 | 44,2 | 44,4 |

I en model kan udviklingen beskrives ved en lineær funktion

$$f(x) = a \cdot x + b,$$

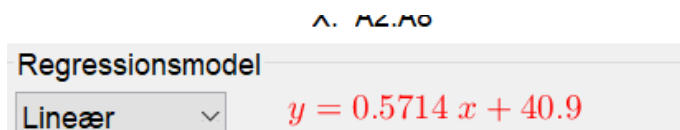
Hvor  $f(x)$  betegner lammens gennemsnitlige slagtevægt (målt i kg) til tidspunktet  $x$  (målt i år).

(10 point)

a) Bestem tallene  $a$  og  $b$  ved regression.

Ved at tegne grafen i GeoGebra fås følgende regression:

Vi aflæser at  $a = 0,5714$  og  $b = 40,9$



$a$ : Angiver hvor meget den gennemsnitlige slagtevægt målt i kg vokser pr. år af lammene ( $a = 0,5714 \text{ kg/år}$ )

$b$ : Angiver slagtevægten i kg af lammet ved begyndelsen (År 0). ( $b = 40,9 \text{ kg}$ )

**Opgave 11** Grafen for en eksponentialfunktion  $f(x) = b \cdot a^x$  går gennem punkterne  $A(-1, 320)$  og  $B(3, 20)$ .

(10 point)

a) Bestem konstanterne  $a$  og  $b$  i forskriften for  $f$ .

Vi kan benytte to-punkts-formlerne for eksponentielle funktioner:

$$a = \sqrt[x_2 - x_1]{\frac{y_2}{y_1}} = \sqrt[3 - (-1)]{\frac{20}{320}} = 0,5$$

Og derefter  $b = \frac{y_2}{a^{x_2}} = \frac{20}{0,5^3} = 160$

Alternativt kunne vi naturligvis have benyttet eksponentiel regression.

(5 point)

b) Opskriv forskriften for funktionen, og bestem  $f(1)$ .

Forskriften bliver dermed:  $f(x) = 160 \cdot 0,5^x$

Og  $f(1) = 160 \cdot 0,5^1 = 80$

(5 point)

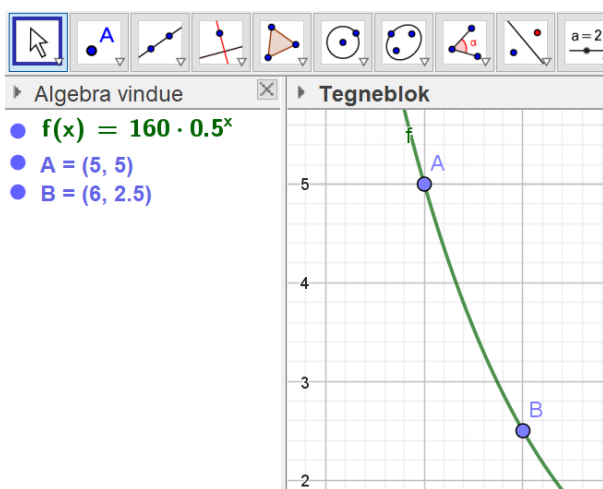
c) Bestem halveringskonstanten.

$$T_{0.5} = \frac{\log(1/2)}{\log(a)} = \frac{\log(0.5)}{\log(0.5)} = 1$$

**Halveringskonstanten er 1.**

Kan også løses i GeoGebra: Fra A til B halveres  $y$ -værdien og

$$T_{0.5} = x_2 - x_1 = 6 - 5 = 1$$



**Opgave 12**

I en model kan udviklingen i det årlige antal nye lungekræfttilfælde blandt **mænd** i Danmark beskrives ved

$$m(x) = 2244 \cdot 0,99^x,$$

hvor  $m(x)$  er det årlige antal nye lungekræfttilfælde til tidspunktet  $x$  (målt i antal år efter 2010).

Ifølge en opgørelse stiger det årlige antal af nye lungekræfttilfælde blandt **kvinder** i Danmark med 1,4% om året efter 2010. I 2010 var der 2030 nye tilfælde af lungekræft blandt kvinder i Danmark.

(10 point)

- a) Indfør passende variable, og opstil en model, der beskriver udviklingen i det årlige antal nye lungekræfttilfælde blandt kvinder i Danmark.

(10 point)

$x$ : Angiver tidspunktet målt i år efter 2010

$k(x)$ : Angiver antallet af nye lungekræfttilfælde blandt kvinder i Danmark dette år.

Stigningen vokser med en fast procent så vi kan opskrive en eksponentiel model:

$$f(x) = b \cdot a^x$$

Vækstraten opgives og er:  $r = 1,4\% = 0,014$

Vi kan beregne fremskrivningsfaktoren  $a$ :

$$a = 1 + r = 1 + 0,014$$

Begyndelsesværdien opgives til  $b = 2030$ . Så nu kan modellen opskrives:

$$k(x) = 2030 \cdot 1,014^x$$

- b) Hvilket år vil antallet af nye lungekræfttilfælde for første gang være større for kvinder end for mænd ifølge modellen ?

Vi kan nu bestemme det år, antallet af nye lungekræfttilfælde i Danmark er ens for de to

køn, ved at løse ligningen  $m(x) = k(x) \Leftrightarrow$

$$2244 \cdot 0,99^x = 2030 \cdot 1,014^x$$

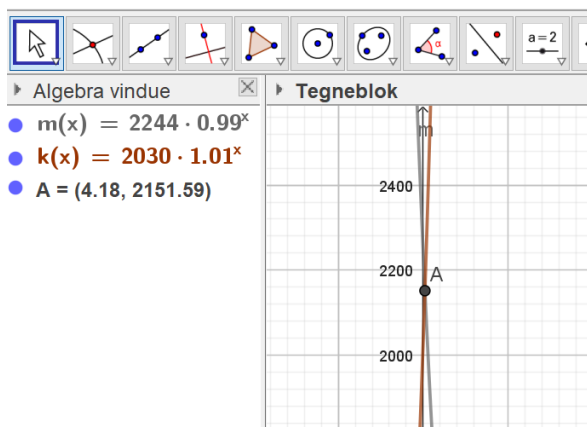


Ligningen løses for  $x$  vha. CAS-værktøjet WordMat.

$$x = 4,1842$$

Dvs. at iflg. modellen vil der i 2014 være næsten lige mange - og i 2015 vil der være for første gang være flest nye tilfælde blandt kvinder.

Man kan også løse den i GeoGebra og tegne de 2 funktioner også benytte ”skæringsværktøjet”:



**Opgave 13** I et koordinatsystem er to vektorer,  $\vec{a}$  og  $\vec{b}$ , givet ved

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} t \\ -3 \end{pmatrix} \text{ og } \vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2+t \end{pmatrix}$$

(10 point) a) Bestem skalarproduktet af de to vektorer, når  $t = 2$ .

Når  $t = 2$ , har vi:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} \text{ og } \vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Dermed er } \vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} = 2 \cdot 5 + (-3) \cdot 4 = 10 - 12 = -2$$

Formel (50).

(10 point) b) Bestem tallet  $t$ , så vektorerne  $\vec{a}$  og  $\vec{b}$  er ortogonale.

Da begge vektorer altid vil være egentlige (dvs. ikke nul-vektor), har vi iflg. formel (53):

$$\vec{a} \text{ og } \vec{b} \text{ er ortogonale} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} t \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 2+t \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow t \cdot 5 + (-3) \cdot (2+t) = 0$$



Ligningen løses for  $t$  vha. CAS-værktøjet WordMat.

$$t = 3$$