

DET GYLDNE SNIT

Man taler om, at forskellige figurer har forskellige proportioner. Proportioner betyder forhold, og proportionerne i en figur er forholdene mellem de forskellige længder i figuren. I et rektangel er det forholdet mellem de to sider, altså længden af den ene side divideret med længden af den anden side.

Øvelse a

Find proportionerne i disse figurer:



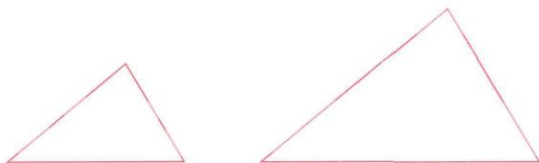
Rektangulære figurer.

Har nogle af figurerne samme proportioner?

Figur 37 viser to ligedannede trekanter. Vi har tidligere benyttet, at hvis to trekanter er ensvinklede, så er de ligedannede, dvs. at tilsvarende sider er forbundet med samme skalafaktor (se side 110).

Vis at ligedannede figurer har samme proportioner.

S. 110



Figur 37
To ligedannede trekanter.

Øvelse b Fotopapir

På figur 38 ses de formater, som en fotoforretning tilbyder at kopiere billeder i. Har disse formater samme proportioner?



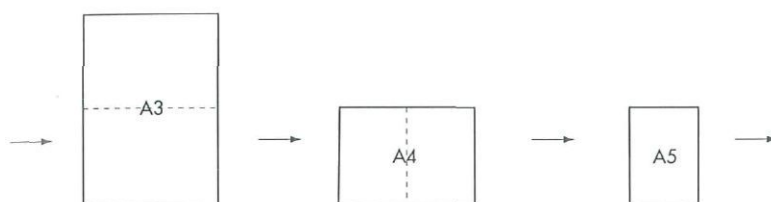
Figur 38
Fotofor størrelser.

□

Fjernsynsskærme har samme proportioner, store og små skærme har samme 'facon', fordi de skal vise samme billede, så det ser ens ud på forskellige skærme. Filmbilleder har ofte helt andre proportioner end fjernsynsbilledet. Derfor er der tit problemer med at overføre film til TV. Papir fås i forskellige standardstørrelser, der alle har samme proportioner. Det samme gælder i vid udstrækning aviser, bøger og blade. Valget af formatets proportioner afhænger dels af de tekniske muligheder, de giver, dels af, om det valgte format er harmonisk og ser pænt ud.

Øvelse c Papirformat

En udbredt type format på papir betegnes A0, A1, A2, A3, ... Du bruger selv mest A4, som er betegnelsen for almindeligt skrivemaskinepapir. Hvad er længde og bredde på A4? Formatet er valgt således, at A0 er det største, og når det deles midt over, fås 2 stykker A1. Når A2 deles midt over fås 2 stykker A3, osv.



Figur 39

Hvor mange A4 ark går der på et A0? Hvad er arealet af A0?

Alle formater har imidlertid samme proportioner, samme forhold mellem den korte og den lange side. Hvilket tal angiver forholdet? Hvad er målene på A0? □

I kunst og design spiller proportioner en afgørende rolle. Det er oplagt i naturalistisk kunst, når man skal male billeder af personer eller landskaber eller lave skulpturer. Så skal de afbillede genstande passe til hinanden. En rytter skal helst passe i størrelse til sin hest. Og øjnenes placering i en portrættegning skal helst være rigtig. Men i ikke-naturalistisk kunst skal proportionerne også være passende, hvis billedet skal være harmonisk og rigtigt komponeret.

Det samme gælder i arkitektur. Bygninger, som vi skal bo eller arbejde i, bør ud over at passe til formålet også passe til os. Og derudover skal de passe ind i bybilledet eller landskabet og være harmoniske at se på.

Øvelse d Rummet

fjøllef

Overvej, om den bygning, du befinder dig i, passer til sit formål. Kunne rummets størrelse og dimensioner, døres og vinduers proportioner være anderledes? Kunne rummet gøres mere egnet til formålet eller være smukkere? □

Gennem historien har et bestemt forhold haft ry for at være særligt harmonisk. Det er det gyldne snit. Det kan findes i megen kunst og arkitektur gennem hele historien, og det findes i naturens egen formgivning.

Øvelse e Harmonisk deling

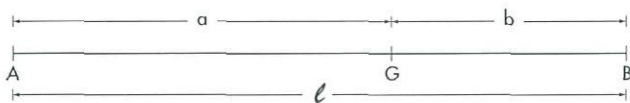
2 1/2 1/2

Tag en snor eller en strimmel papir og del den i to dele, der ikke må være lige lange. Den skal deles, så længderne af de to dele virker mest harmoniske i forhold til hinanden. Find forholdet mellem den korte og den lange del. Sammenlign de forskellige resultater fra alle elever i klassen.

Definition:
Det gyldne snit

Liniestykket AB har længden ℓ . Punktet G deler liniestykket i to dele, som har længderne a og b , dvs. $a + b = \ell$. G deler da AB i det gyldne snit, hvis den korte del (b) står i samme forhold til den lange del (a), som den lange del (a) står i forhold til hele stykket (ℓ):

$$\frac{a}{\ell} = \frac{b}{a}$$



Figur 40

Hvis man prøver sig lidt frem, kan man finde delingspunktet med en vis tilnærmelse. Lad os sætte AB's længde til 1, og så flytte lidt rundt på punktet G.

Når $\ell = 1$, så skal G bestemmes så $\frac{a}{\ell} = \frac{b}{a}$, dvs. $a = \frac{b}{a}$.

Nedenfor er angivet nogle forsøg, hvor stykket $a = |AG|$ gøres lidt større eller mindre:

a	b	$\frac{b}{a}$	
0,7	0,3	0,4286	(a for stor i forhold til b)
0,6	0,4	0,6667	(a lidt for lille)
0,61	0,39	0,6393	(a stadig lidt for lille)
0,62	0,38	0,6129	(a lidt for stor)



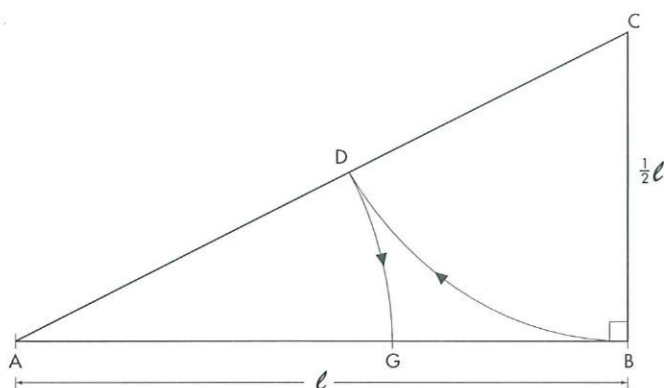
Figur 41

Den præcise løsning kan vises at være tallet $a = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1) = 0,618034$.

Øvelse f

Vis, at tallet angivet ovenfor passer på det gyldne snit. □

Det gyldne snit kan let tegnes med passer og lineal. Hvis liniestykket AB er givet, så afsættes en ret vinkel i B, og liniestykket BC afsættes halvt så langt som AB. Tegn linien gennem A og C.



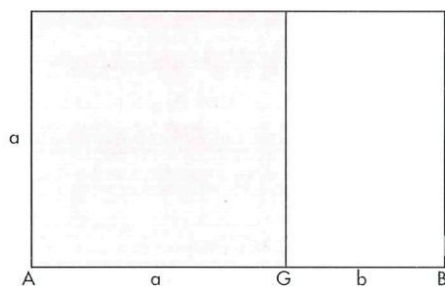
Figur 42

Med C som centrum og BC som radius tegnes en cirkelbue, som skærer AC i punktet D. Med A som centrum og AD som radius tegnes en cirkelbue til skæring med AB. Skæringspunktet er da det gyldne snit.

Øvelse g Bevis

Sæt længden ℓ på figur 42 til 1 og bevis, at tegningen giver det gyldne snit, altså at længden af AG er $\frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$. Du kan benytte Pythagoras' sætning på trekant ABC, og at $\sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$. $\square$

Hvis G deler AB i det gyldne snit (se figur 43), så kan vi over liniestykket AG konstruere et kvadrat med siden a, og over hele liniestykket lave et rektangel med siderne a og $a + b$. I dette rektangel har siderne altså det gyldne snits forhold: den korte side (a) forholder sig til den lange side ($a + b$), ligesom b forholder sig til a. Man kalder sådant et rektangel for et *gyldent rektangel*.



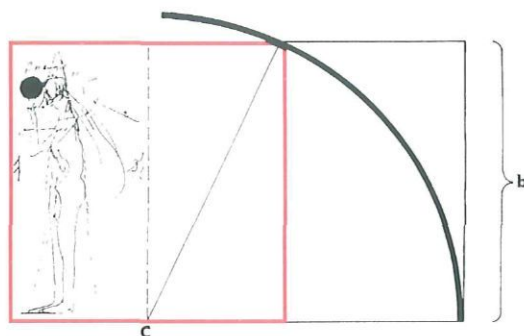
Figur 43

Øvelse h Gyldent rektangel

Vis, at når man fjerner kvadratet fra et gyldent rektangel, så vil det resterende rektangel også være gyldent.

Vis, at et A4-ark ikke er et gyldent rektangel.

Figur 44 viser et bomærke for Kunsthøjskolen på Ærø. På bomærket konstrueres et rektangel ud fra et givet kvadrat. Vis, at rektanglet bliver gyldent.



KUNSTHØJSKOLEN PÅ ÆRØ
VESTER MØLLEGÅRD

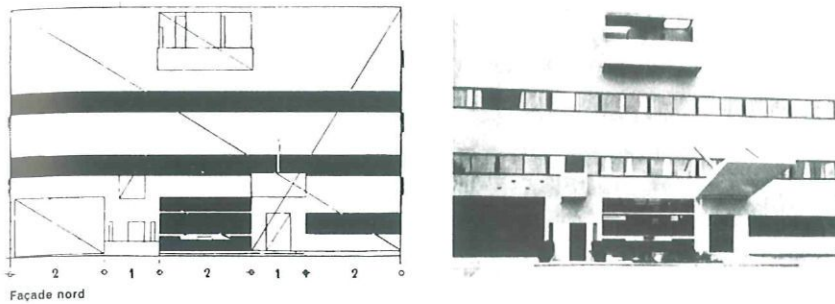
Figur 44

Eksempel i Bygninger

Figur 45 viser facaden på et græsk tempel, Zeus-templet i Olympia. Det er bygget i det 5. årh. fvt. Figur 46 viser facaden på et funktionalistisk hus, Villa Stein i Garches ved Paris, tegnet af Le Corbusier og Pierre Jeanneret og opført i 1927.



Figur 45



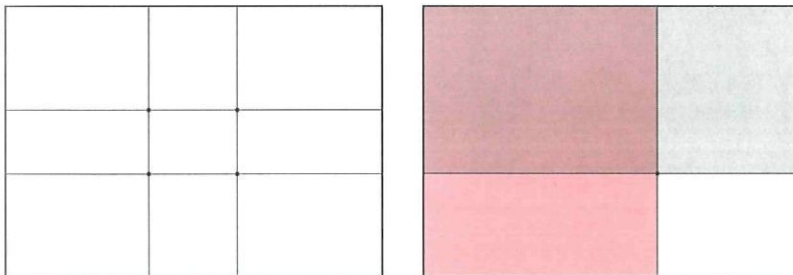
Figur 46



Man kan finde mange andre eksempler på anvendelse af de gyldne proportioner i arkitektur, billedkunst, film og fotografi. Dels kan selve billedfladen være et gyldent rektangel (eller tæt på), og dels kan kompositionen bygge på en opdeling af rektanglet efter det gyldne snit. Når man opdeler både den lange og den korte side efter det gyldne snit, bliver der fire hovedlinier på billedfladen.

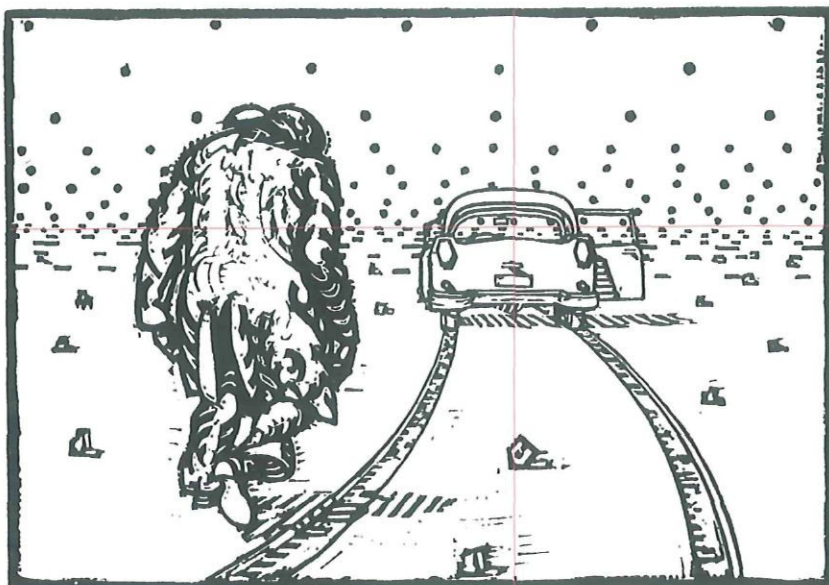
Lad os f.eks. bruge et A4-ark. Den korte side er 21,0 cm. Når den skal deles i det gyldne snit, skal den største del, a , være 0,618 af hele siden, dvs. $a = 0,618 \cdot 21,0 = 13,0$ cm.

Tilsvarende skal den lange side på arket deles, så $a = 0,618 \cdot 29,7 = 18,4$ cm. Ved at udmåle a fra højre eller venstre fremkommer der to delepunkter på hver side og fire delelinier på papiret.

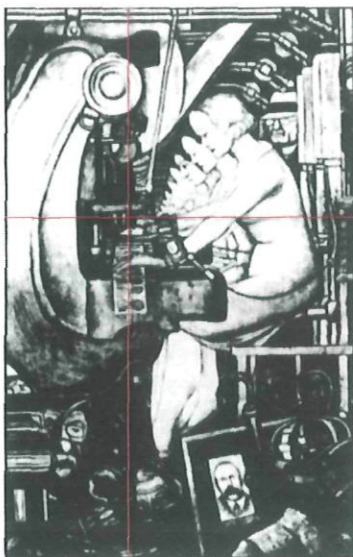


Figur 47

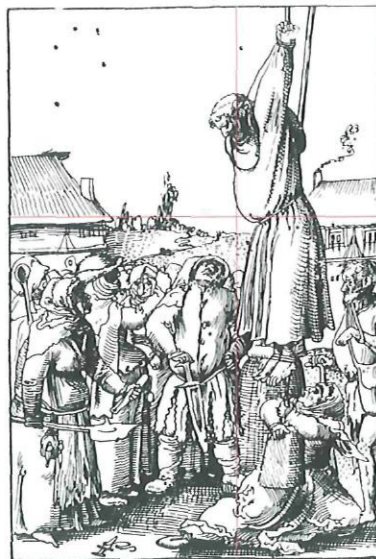
Disse linier giver en harmonisk deling af fladen, og deres skæringspunkter benyttes ofte som 'focus': placering af ting, man skal lægge mærke til. Hvis fladen er et gyldent rektangel, så vil arealerne, som linierne afskærer, være lige store (Sort = rødt, figur 47), og det er måske grunden til, at disse punkter har en harmonisk placering i billedet.



Figur 48
I minefeltet af Palle Nielsen fra Orfeus og Eurydike, 1959.



Figur 49
Arbejdere ved transportbåndet, af Diego Rivera, 1933.



Figur 50
Bønder hænger en afladskræmmer, af Niklaus Deutsch, 1525.

Eksempel k Typografi

På figur 51 ses en del af en romersk inskription fra 1. årh. (år 10-40), ved siden af en opmåling af bogstavernes proportioner.



Figur 51. Del af romersk indskrift med proportioner af Walter Koech.

Øvelse I Reklamer

Find nogle billedreklamer fra forskellige ugeblade og prøv at kontrollere, om kompositionen i billedet følger det gyldne snit. $\square$

Hvis et liniestykke af længden 1 deles i 5 lige store dele, så vil det tredje depunkt ikke ligge så langt fra det gyldne snit, da $\frac{3}{5} = 0,6$ ikke afviger så meget fra 0,618034. Derfor kunne $\frac{3}{5}$ bruges som en (lidt grov) tilnærmelse til det gyldne snit på samme måde, som vi kan bruge $\frac{22}{7}$ som tilnærmelse til pi. Men det er muligt at finde endnu bedre tilnærmelser til det gyldne snit.

Øvelse m

Undersøg om $\frac{3}{6}$ eller $\frac{4}{6}$ ligger tættere ved 0,618034 end $\frac{3}{5}$.

Undersøg om en brøk med 7 i nævneren gør.

Fortsæt med ottende-dele, niende-dele og tiende-dele. $\square$

Fortsætter man på denne måde med at lede efter tilnærmelser til det gyldne snit, så får man følgende række af bedre og bedre tilnærmelser:

$\frac{3}{5} = 0,600000$	afvigelse	0,018034	
$\frac{5}{8} = 0,625000$	afvigelse	0,006966	
$\frac{8}{13} = 0,615385$	afvigelse	0,002649	
$\frac{13}{21} = 0,619048$	afvigelse	0,001014	
$\frac{21}{34} = 0,617647$	afvigelse	0,000387	osv.



Figur 52

De tal, der indgår i brøkerne, udviser en særlig systematik:

3, 5, 8, 13, 21, 34, ...

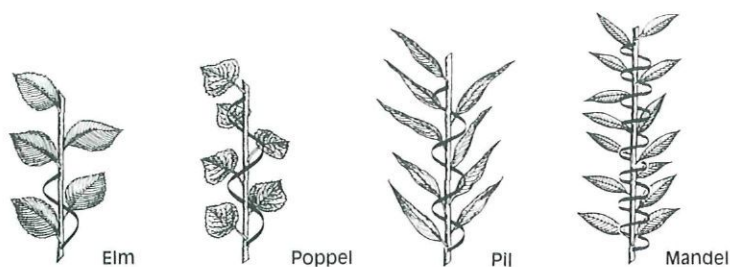
Ethvert tal i rækken er lig med summen af de to foregående, og hvis vi starter forfra med to 1-taller, ser hele rækken sådan ud:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, ...

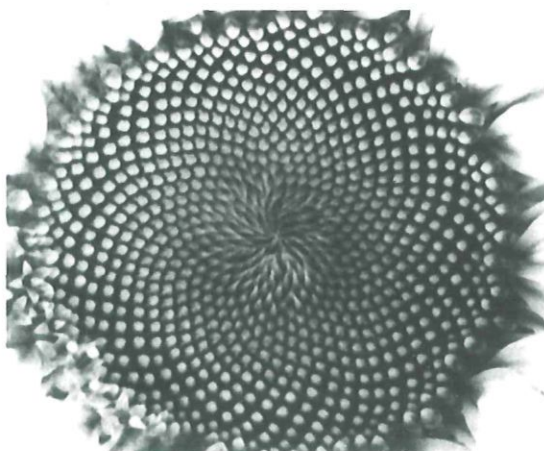
Tallene i rækken ovenfor kaldes *Fibonacci-tallene* efter en italiensk matematiker fra 1200-tallet, som blev kaldt Fibonacci.

Eksempel n Fibonacci-tal i naturen

Fibonacci-tallene optræder på besynderlig vis i opbygningen af mange planter. Bladene på en gren eller plantestængel peger i forskellige retninger ud fra stængelen, men placeringen er ikke vilkårlig. På nogle planter sidder bladene som langs en spiral ud ad stængelen, og der drejes en fast vinkel fra et blad til det næste (se figur 53). Fra et blad på stængelen og til det næste, som peger i samme retning, vil der være et antal blade, som er et fibonacci-tal.



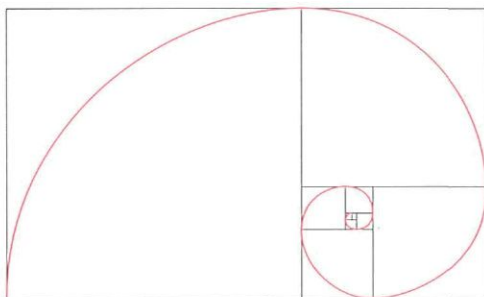
Figur 53



Figur 54

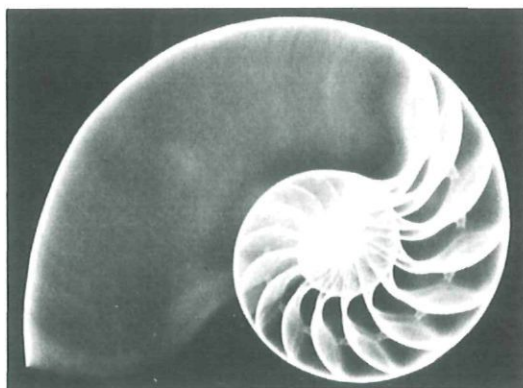
På figur 54 er vist en solsikkeblomst. Frøene er placeret i tydelige spiraler fra midten af blomsten. Der er to spiralsystemer, som vender hver sin vej. Tæl, hvor mange spiraler der er i hvert af de to systemer. $\square$

Hvis man videreinddeler et gyldent rektangel i mindre rektangler ved at afskære kvadrater (jvf. figur 43), får man følgende opdeling:



Figur 55

Tegner man kvarte cirkelbuer i kvadraterne i forlængelse af hinanden, så vil de danne en spiral, hvis form er tæt på det, man kalder en logaritmisk spiral. Den logaritmiske spiral genfinder vi i nogle blæksprutte- og snegleskaller.



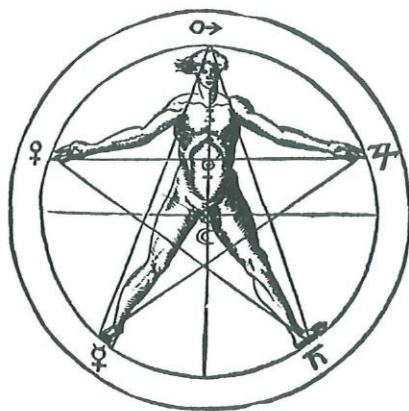
Figur 56

Det kan have styrket opfattelsen af, at det gyldne snit var særligt harmonisk, at man har kunnet finde det så rigt repræsenteret i naturen.

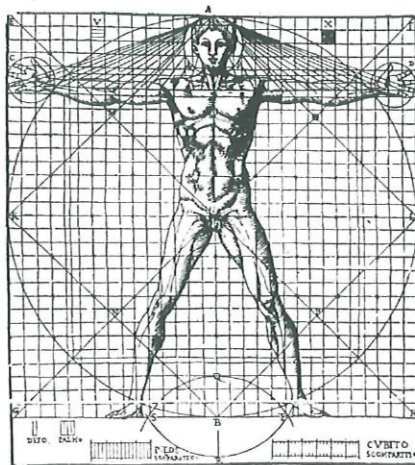
Måske er det gyldne snit også grundproportionen i opbygningen af den menneskelige krop? Ikke mindst for en tegner eller billedhugger er det et praktisk problem, hvorledes kroppens dele forholder sig til hinanden. Det er rart at have nogle simple grundregler at arbejde efter. Man kan eftermåle, at sådanne grundregler er blevet brugt også i oldtidens billeder af mennesker, f.eks. er hovedet $\frac{1}{8}$ af

kroppen, benet under knæet $\frac{1}{4}$ af kroppen, en fod $\frac{1}{6}$ og en hånd $\frac{1}{10}$ af kroppen osv.

Figur 57-58 viser nogle eksempler på gamle overvejelser over kroppens proportioner. Tegningerne er bygget op over de simpleste matematiske figurer som kvadrater og cirkler.



Figur 57
Mennesket som centrum, fra Agrippa.



Figur 58
Proportionstegning af Vitrovius.

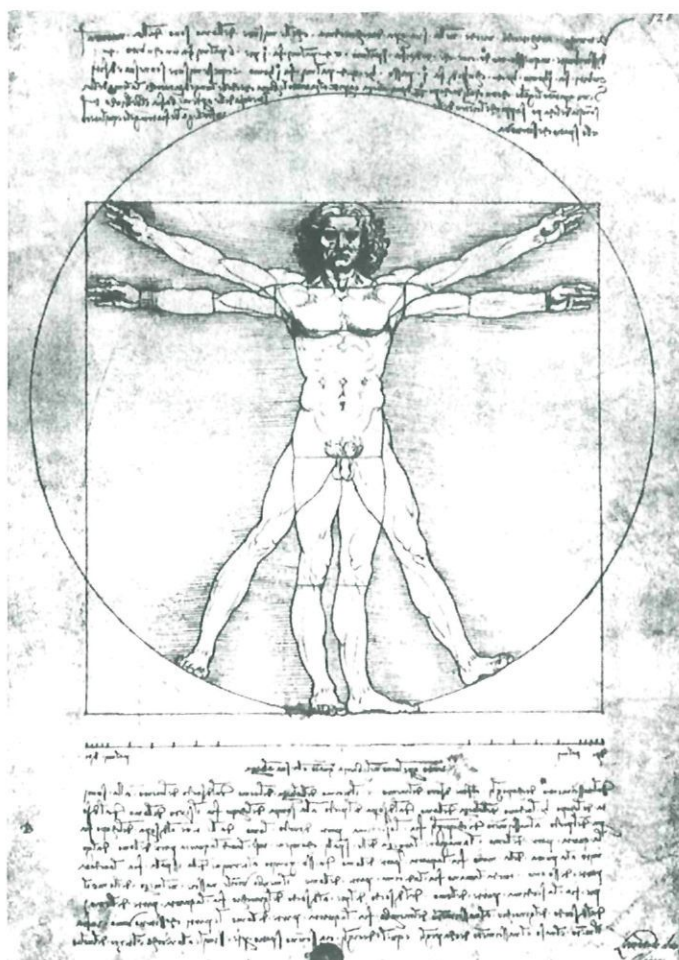
Den berømteste proportionstegning er Leonardo da Vinci's fra 1492. Leonardo da Vinci er bl.a. kendt for sit maleri af Mona Lisa.

Mennesket er indtegnet i et kvadrat og en cirkel. På kroppen er der markeret forskellige inddelinger, f.eks. hvor en 4-deling af højden er placeret. Men der er tre 'påstande' om de vigtigste menneskelige proportioner.

- 1) strækvidden (fra fingerspids til fingerspids) er lig med højden.
- 2) navlen er centrum i en cirkel, hvis diameter er lig med rækkehøjden (hvis armene strækkes op over hovedet).
- 3) navlen er placeret i det gyldne snit på højden.

Øvelse o

Kontroller de tre påstande ved måling på figur 59.

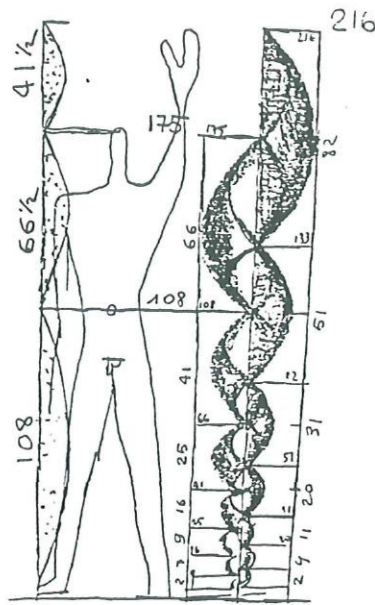


Figur 59
Proportionsstudie af Leonardo da Vinci, 1492.

Øvelse p

Man finder den samme grundide i en moderne udgave hos den franske arkitekt Le Corbusier. Hans tegning på figur 60 viser de samme menneskelige proportioner med standardmål: navlehøjden (108 cm) er halvdelen af strækhøjden (216 cm), og navlehøjden er det gyldne snit af hovedhøjden (174-175 cm). De moduler, som Le Corbusier inddeler tegningen efter, er nogle specielle 'Fibonacci-rækker', valgt til formålet, f.eks. 2, 7, 9, 16, 25, 41, 66, ...

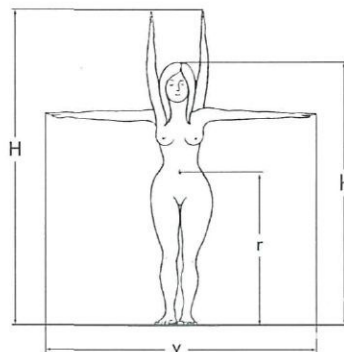
Prøv at finde en forklaring på, hvordan Le Corbusier har fundet frem til sin talrække.



Figur 60
Le Modulor af le Corbusier, 1948.

Øvelse q De menneskelige proportioner

Påstandene om de menneskelige proportioner kan jo afprøves. Tag f.eks. eleverne i klassen som forsøgspersoner. Til øvelsen kræves en tommestok og et registreringsskema, hvor målene på figur 61 noteres for hver forsøgsperson.



Figur 61

Man kan så undersøge, om de tre 'regler' holder:

1) er $h = v$?

2) er $H = 2r$?

3) er $\frac{r}{h} = 0,6180$?

Er der systematiske afvigelser fra reglerne? Det kunne f.eks. være, at v altid var lidt større end h , eller at H altid var større end $2r$.