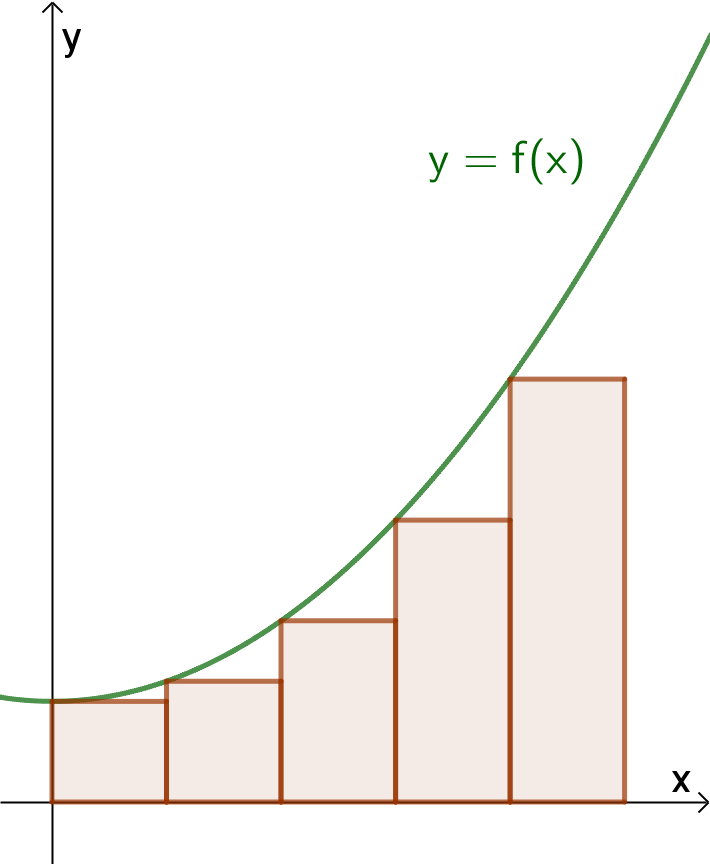
# Beviser i integralregning

Vi har oprindeligt indført integralet af fra til som

hvor .

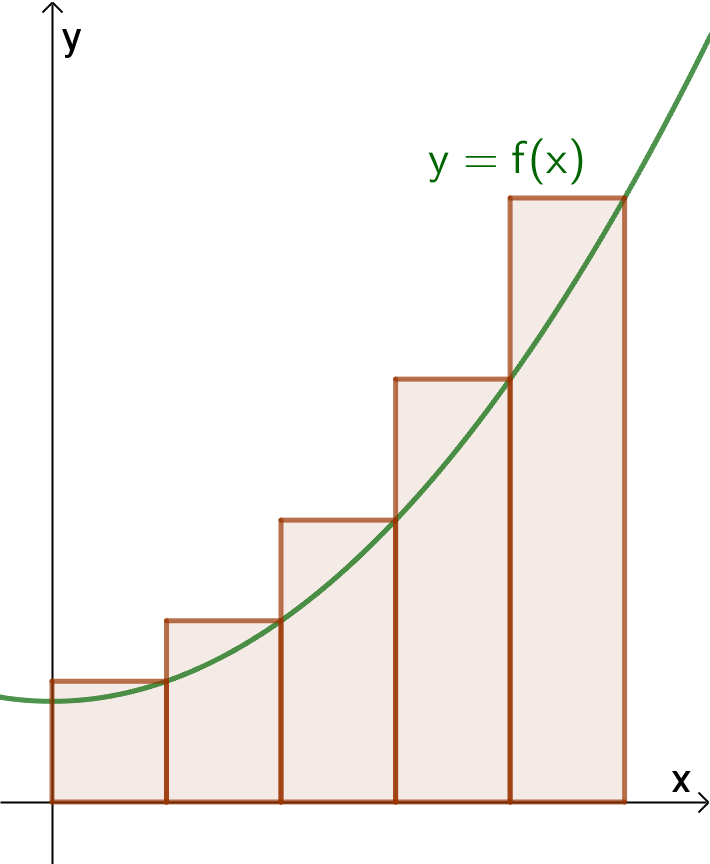
Vi vil nu bevise at når er en positiv og voksende funktion på , så er integralet lig arealet under på .

 Lad være en positiv og voksende funktion på .

Figur : undersum.

1. Argumentér for at summen ,  
   se figur 1, er mindre end arealet under på .

Den sum vi har ovenfor kaldes af denne grund for en *undersum*.



1. Argumentér for at summen ,  
   se figur 2, er større end arealet under på .

Figur : oversum.

Den sum vi har ovenfor kaldes af denne grund for en *oversum*.

Hvis er arealet under på har vi dermed

.

Man kan desuden vise at , se næste side, dvs.   
undersummen og oversummen går mod den samme grænseværdi.

1. Brug dette til at argumentere for at

Da vi indførte integralet fra til som har vi dermed at integralet er lig med arealet under på . Generelt kan man vise at dette er tilfældet når er en positiv og kontinuert funktion.

For at vise det ovenstående ser vi på differensen og viser at dens grænseværdi er nul.

Idet har vi at hvilket giver at .

### Opgave 1

Tag udgangspunkt i figur 1 ovenfor og lav til hver regneregel nedenfor **en illustration i hånden** som kan bruges til at forklare hvorfor regnereglen gælder.

1. Lad og være to intervaller. Vi har da at man kan dele integralet op:
2. Vi kan flytte en konstant udenfor:
3. Hvis er en negativ funktion på , så har vi at integralet af fra til er lig minus arealet under på :
4. Integralet af en sum af to funktioner kan deles op:
5. Hvis for , så er arealet mellem og på givet ved: