# Monotonisætningen

En funktion kaldes *voksende* hvis $x\_{2}>x\_{1}$ medfører $f\left(x\_{2}\right)\geq f(x\_{1})$, *aftagende* hvis $x\_{2}>x\_{1}$ medfører $f\left(x\_{2}\right)\leq f\left(x\_{1}\right)$ og *konstant* hvis $x\_{2}>x\_{1}$ medfører $f\left(x\_{1}\right)=f\left(x\_{2}\right)$.

### Monotonisætningen

Givet en funktion $f$ som er kontinuert på intervallet $a\leq x\leq b$ og differentiabel på intervallet $a<x<b$.

* Så er $f$ voksende på $a\leq x\leq b$ hvis og kun hvis $f^{'}\left(x\right)\geq 0$ på intervallet $a<x<b$.
* Så er $f$ aftagende på $a\leq x\leq b$ hvis og kun hvis $f^{'}\left(x\right)\leq 0$ på intervallet $a<x<b$.
* Så er $f$ konstant på $a\leq x\leq b$ hvis og kun hvis $f^{'}\left(x\right)=0$ på intervallet $a<x<b$.

**Bevis for første del**
Vi starter med at vise at $f$ voksende medfører at $f^{'}\left(x\_{0}\right)\geq 0$ for $a<x\_{0}<b$.
Vi har at

$$f^{'}\left(x\_{0}\right)=\lim\_{h\to 0}\frac{f\left(x\_{0}+h\right)-f(x\_{0})}{h}$$

Idet $f$ er voksende, så har vi at $f\left(x\_{0}+h\right)-f\left(x\_{0}\right)\geq 0$ for $h>0$. Dermed har vi at

$$\frac{f\left(x\_{0}+h\right)-f(x\_{0})}{h}\geq 0$$

Det samme kan vises for $h<0.$
Hvis alle tallene i en følge er positive eller nul så bliver grænseværdien også positiv eller nul. Dermed har vi at $f^{'}\left(x\_{0}\right)\geq 0$.

Vi viser nu at $f^{'}\left(x\right)\geq 0$ medfører at $f\left(b\right)\geq f(a)$.

Til det skal vi bruge middelværdisætningen:

*Givet en funktion* $f$ *som er kontinuert på intervallet* $a\leq x\leq b$ *og differentiabel på intervallet*$a<x<b$*. Så eksisterer der* $x\_{0}$ *hvor* $a<x\_{0}<b$ *således at*

$$f^{'}\left(x\_{0}\right)=\frac{f\left(b\right)-f(a)}{b-a}$$

Idet $f^{'}\left(x\right)\geq 0$, så har vi at

$$f\left(b\right)-f(a)\geq 0$$

Hvilket medfører at $f\left(b\right)\geq f(a)$. Tilsvarende kan man for alle par af $x$-værdier, $a\leq x\_{1}<x\_{2}\leq b$, vise at $f\left(x\_{2}\right)\geq f(x\_{1})$. Dermed har vi at $f$ er voksende.

### Opgave 1

Bevis den sidste del af monotonisætningen:

Givet en funktion $f$ som er kontinuert på intervallet $a\leq x\leq b$ og differentiabel på intervallet $a<x<b$.

Så er $f$ konstant på $a\leq x\leq b$ hvis og kun hvis $f^{'}\left(x\right)=0$ på intervallet $a<x<b$.