Egenskaber for logistisk vækst

# Sætning

Lad være en løsning til den logistiske differentialligning hvor og .

1. Væksthastigheden er størst, netop når .
2. Når , vil
3. Når , vil

# Bevis

For at bevise påstand 1 skal vi kigge på selve differentialligningen.

Vi starter med at gange parentesen ud:

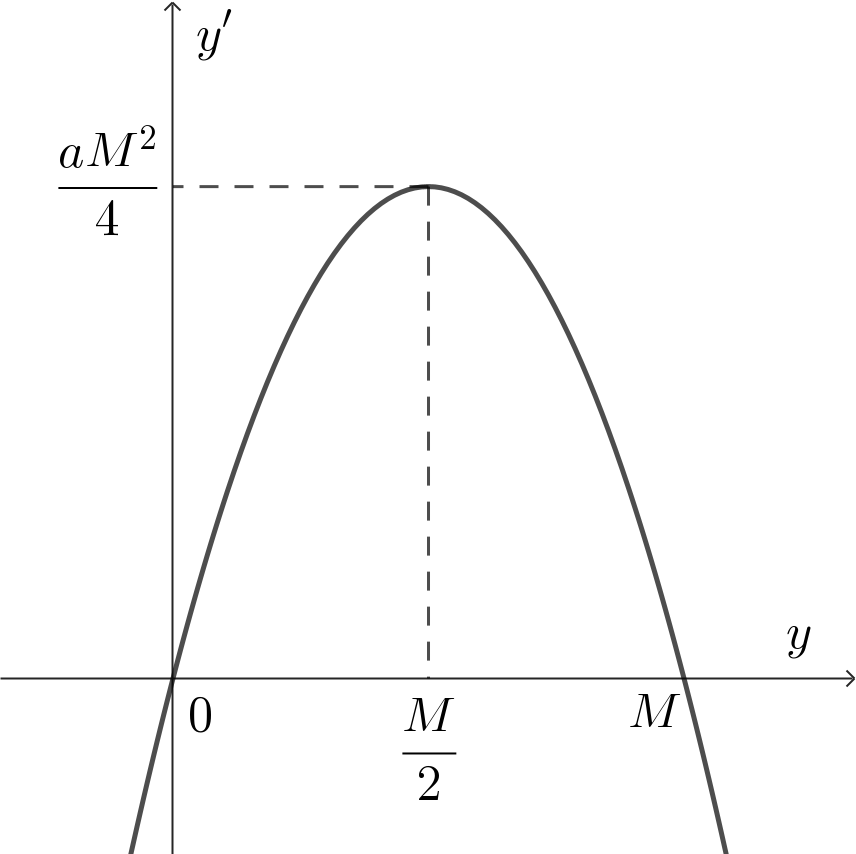
Dette er et andengradspolynomium med negativ andengradskoefficient. Den tilsvarende parabel vil dermed have grenene nedad, og toppunktet vil være et maksimumspunkt.

For at finde den y-værdi, hvor y’ er størst skal vi dermed bare finde toppunktets førstekoordinat.

Vi starter med at finde rødderne vha. nulreglen:

Parablen har dermed to rødder, og . Da parabler er symmetriske om den lodrette linje gennem toppunktet skal toppunktets førstekoordinat være gennemsnittet af de to rødder, altså .

Altså har sit maksimum når , og dermed er den første påstand bevist.



For at bevise påstand 2 og 3 skal vi kigge på den fuldstændige løsning til den logistiske differentialligning.

Vi ved at den fuldstændige løsning er givet ved

Først kigger vi på grænseværdien for når .

Her benytter vi at:

* og ikke afhænger af , og at der derfor gælder at og
* er en aftagende eksponentialfunktion og dermed er
* Da alle tre dele af funktionen har en grænseværdi som er et tal, kan vi regne med grænseværdierne som om de var tal.

Dermed er påstand 2 bevist.

Nu kigger vi på grænseværdien for når .

Grænseværdierne for og 1 er stadig og 1.

Men og det betyder at vi ikke længere kan regne med grænseværdierne som om det var tal. I stedet må vi argumentere lidt uformelt for påstanden, da et formelt argument bliver for omsiggribende.

Hvis vi kigger på brøken og lader ved vi at tælleren vil gå mod mens nævneren vil gå mod .

Når vi dividerer et tal med et meget større tal, vil vi få et resultat tæt på 0. Og jo større divisoren er, desto tættere på 0 kommer resultatet. Dermed vil hele brøken have grænseværdien 0 når tælleren går mod .

Altså gælder at

Og dermed er påstand 3 også bevist.

◼