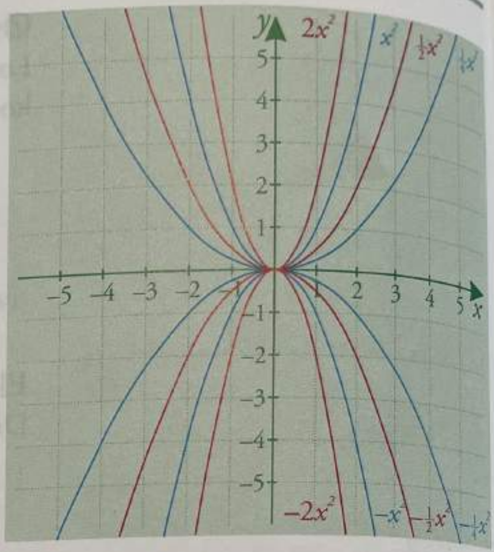
4. Parabler

Vi har tidligere stiftet bekendtskab med grafen for funktionen $y = x^2$ som et eksempel på en *parabel*. Også graferne for $y = 2x^2$, $y = -\frac{1}{2}x^2$ osv., som er vist på tegningen, kaldes parabler.



Et udvalg af parabler

Definition 4.1: Parabel

En *parabel* er grafen for en funktion af typen:

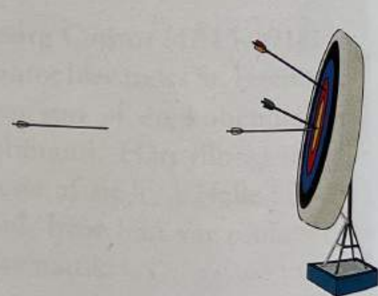
$$y = ax^2,\ a \neq 0.$$

Punktet (0,0), der kaldes parablens *toppunkt*, deler den i to *grene*

En parabel består af et *toppunkt* og to *grene*. Hvis $a > 0$, vender grenene og parablens åbning opad, og toppunktet er et minimumspunkt. Hvis $a < 0$, vender grenene nedad, og toppunktet er et maksimumspunkt.

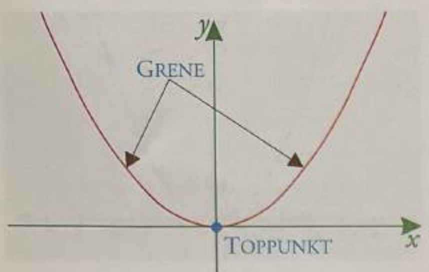
Logiske problemer 6: Zenons paradoks

De græske naturfilosoffer Parmenides og hans elev Zenon filosoferede omkring 460 fvt. over begrebet bevægelse og nåede frem til, at bevægelse er umulig. Når vi ser noget bevæge sig omkring os, er det ifølge disse filosoffer et bedrag. Den virkelige verden, dvs. den verden man erkender ved logiske ræsonnementer, er evig og uforanderlig.
Zenon fremførte bl.a. følgende „beviser" for denne påstand:

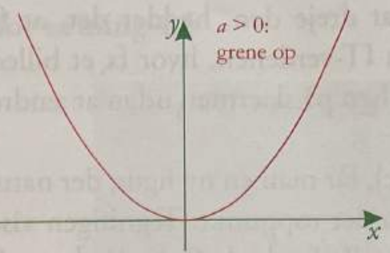


1. En pils bevægelse
Spidsen af en pil, der afskydes fra en bue, vil være i ethvert punkt af sin bane i et lille tidsrum. Da der er uendeligt mange punkter i banen, vil det tage uendeligt lang tid for pilen at nå frem. Bevægelse er umulig.

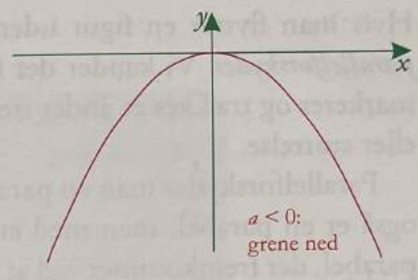
2. At gå hen til en dør
Hvis man vil gå hen til døren, må man først tilbagelægge halvdelen af vejen. Herefter må man tilbagelægge halvdelen af den resterende strækning. Herefter må man igen tilbagelægge halvdelen af den resterende strækning osv. i det uendelige. Da vejen på denne måde kan deles op i uendeligt mange dele, må det tage uendeligt lang tid at nå hen til døren. Man når den aldrig. Bevægelse er umulig.



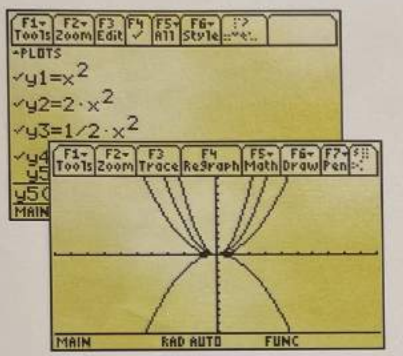
En parabel har et toppunkt og to grene



Parabel med grenene opad



Parabel med grenene nedad



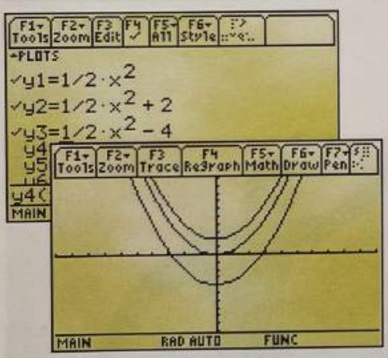
Tegning af parabler på grafregner

Eksempel 4.2: Parabler på grafregner

De to dumps i margenen viser, hvordan grafregneren kan tegne parabler. Ligningerne indtastes i grafregnerens funktionseditor [Y=].

PARALLELFORSKYDNING AF PARABLER

Kurver, der fremkommer af de ovennævnte parabler ved såkaldt *parallelforskydning*, er også parabler, fordi de har nøjagtigt samme kurveform. Inden vi går videre, ser vi på et par eksempler.



Hvis man lægger et tal til y, forskydes parablen i y-aksens retning

Eksempel 4.3: Lodret forskydning

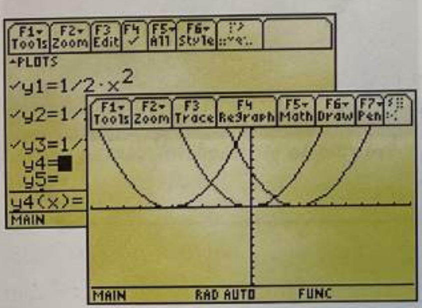
Med grafregneren kan vi tegne grafer for følgende funktioner:

$$y_1 = \tfrac{1}{2}x^2$$

$$y_2 = \tfrac{1}{2}x^2 + 2$$

$$y_3 = \tfrac{1}{2}x^2 - 4$$

Graferne ses i margenen. Virkningen af de tal, +2 og –4, vi har lagt til $\tfrac{1}{2}x^2$, er, at grafen flyttes. I forhold til y_1 er y_2 flyttet 2 opad, og y_3 er flyttet 4 nedad.



Hvis man trækker et tal fra x, forskydes parablen i x-aksens retning

Eksempel 4.4: Vandret forskydning

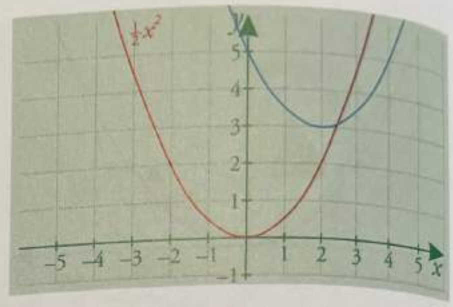
Med grafregneren kan man tegne grafer for:

$$y_1 = \tfrac{1}{2}x^2$$

$$y_2 = \tfrac{1}{2}(x + 5)^2$$

$$y_3 = \tfrac{1}{2}(x - 3)^2$$

Skærmbillederne i margenen viser, at når vi lægger 5 til x inde i parentesen, flytter grafen 5 enheder i *negativ* retning på x-aksen. Når vi derimod trækker 3 fra x, flytter grafen 3 enheder i *positiv* retning.



Parablen bliver forskudt 2 i x-aksens retning og 3 i y-aksens retning

Hvis man flytter en figur uden at dreje den, hedder det, at figuren *parallelforskydes*. Vi kender det fra IT-verdenen, hvor fx et billede kan markeres og trækkes et andet sted hen på skærmen uden at ændre form eller størrelse.

Parallelforskyder man en parabel, får man en ny figur, der naturligvis også er en parabel, men med et andet toppunkt. Tegningen viser den parabel, der fremkommer ved at parallelforskyde $f(x) = ½x^2$ to enheder i x-aksens retning og tre enheder i y-aksens retning. Eksemplerne ovenfor får os til at gætte på, at forskriften for den forskudte parabel kunne være $g(x) = ½(x - 2)^2 + 3$. Mere præcist gælder:

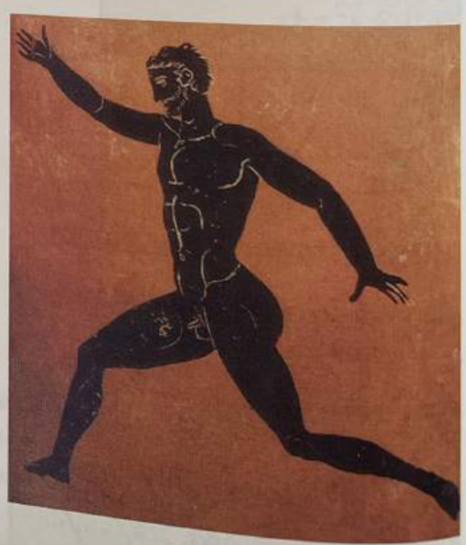
Sætning 4.5: Hjælpesætning

Grafen for en funktion af typen $h(x) = a(x - h)^2 + k$ er en parabel med toppunkt i (h,k)

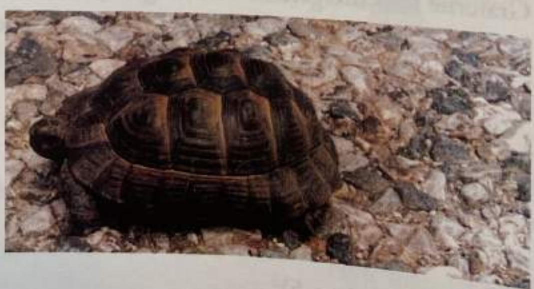
Logiske problemer 7: Achilleus og skildpadden

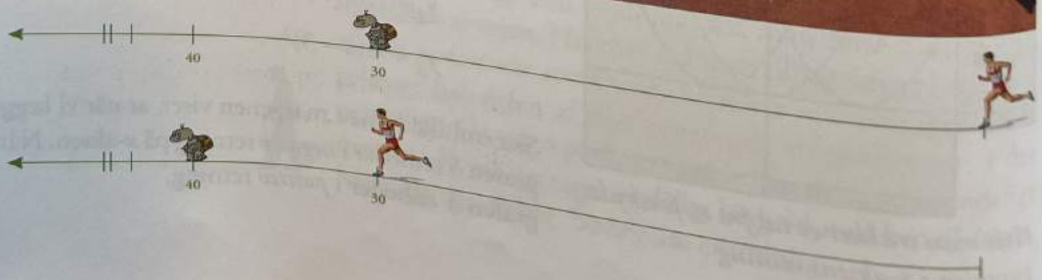
Zenon kom med flere „beviser" for, at den virkelige verden er uforanderlig og bevægelse derfor umulig. Et af dem er hans berømte historie om Achilleus og skildpadden.

Zenon tænker sig, at den fodrappe helt Achilleus skal løbe om kap med en skildpadde. Da man godt ved, at Achilleus kan løbe hurtigere end skildpadden, får den et forspring. Herefter argumenterer Zenon således:

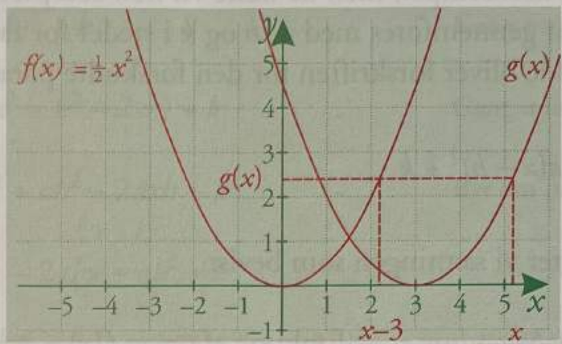


Hvis Achilleus skal kunne overhale skildpadden, må han først nå frem til det punkt, hvor skildpadden startede. I mellemtiden er skildpadden imidlertid også nået et stykke frem. Hvis Achilleus skal overhale skildpadden, må han derfor først nå frem til skildpaddens nye position. I mellemtiden er skildpadden imidlertid nået endnu et lille stykke længere frem. Osv. osv. i det uendelige. Achilleus vil aldrig overhale skildpadden.





Bevis for sætning 4.5



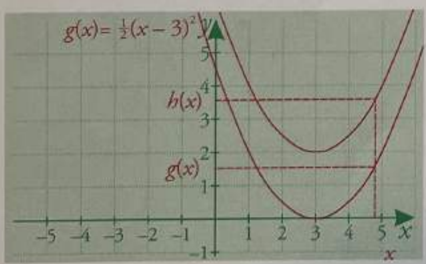
Vandret parallelforskydning af parabel

Vandret forskydning: Vi ser først på tilfældet $a = ½$, $h = 3$ og $k = 0$. Vi forskyder altså parablen $f(x) = ½x^2$ tre enheder i x-aksens retning.

Tegningen viser parablen $f(x) = ½x^2$ og den forskudte parabel, hvis forskrift $g(x)$ vi skal fastlægge. Vi vælger et vilkårligt tal x på x-aksen. Den tilsvarende funktionsværdi $g(x)$ er markeret med stiplede linjer. Går vi de tre enheder tilbage langs x-aksen, som vi før gik frem, kommer vi til tallet $x - 3$. Som det fremgår af figuren, er $g(x)$ samme tal som funktionsværdien $f(x - 3)$:

$$g(x) = f(x-3) = ½(x-3)^2$$

Man opnår altså en forskydning i x-aksens retning på 3 enheder ved at trække 3 fra x, før man kvadrerer.



Lodret parallelforskydning af parabel

Lodret forskydning: Vi forskyder nu $g(x) = ½(x-3)^2$ to enheder i y-aksens retning. Margenfiguren viser graferne for $g(x)$ og den forskudte parabel, hvis forskrift $h(x)$ vi nu skal bestemme. På figuren er som før afsat en vilkårlig x-værdi, og de to tilsvarende funktionsværdier $g(x)$ og $h(x)$ er markeret. Da vi har forskudt parablen to enheder, må der gælde:

$$h(x) = g(x) + 2$$
$$h(x) = ½(x-3)^2 + 2$$

Man opnår altså en forskydning på to enheder i y-aksens retning ved at lægge 2 til i forskriften.

Bemærkning: Ovenstående er ikke et helt igennem holdbart bevis, fordi vi har brugt et taleksempel, men de fleste vil nok acceptere, at et tilsvarende bevis kan gennemføres med a, h og k i stedet for tallene ½, 3 og 2. I dette tilfælde bliver forskriften for den forskudte parabel:

$$h(x) = a(x - h)^2 + k$$

Hermed betagter vi sætningen som bevist.

Et *andengradspolynomium* er en funktion af typen $f(x) = ax^2 + bx + c$, hvor $a = 0$. Fx er $f(x) = 2x^2 + 3x - 4$ et andengradspolynomium. Nedenfor vil vi vise, at grafen for et andengradspolynomium altid er en parabel. Det generelle udtryk $ax^2 + bx + c$, kender vi i forvejen fra andengradsligningen. I den forbindelse indførte vi *diskriminanten* $d = b^2 - 4ac$, som vi nu får brug for igen. Om andengradspolynomier og parabler gælder nemlig følgende sætning:

Sætning 4.6: Grafen for et andengradspolynomium

Grafen for et andengradspolynomium $f(x) = ax^2 + bx + c$, hvor $a \neq 0$, er en parabel med toppunkt:

$$Tp = \left(\frac{-b}{2a}, \frac{-d}{4a}\right)$$

Størrelsen $d = b^2 - 4ac$ er polynomiets *diskriminant*

Bevis for sætning 4.6: Grafen for et andengradspolynomium
Vi udnytter først hjælpesætning 4.5, som fortæller os, at grafen for $f(x) = a(x - h)^2 + k$ er en parabel med toppunkt i (h,k).

Resten af beviset klares ved at vise, at et polynomium $ax^2 + bx + c$ altid kan skrives på formen $a(x - h)^2 + k$. Det gøres lettest ved at regne baglæns, dvs. vi begynder med udtrykket $a(x - h)^2 + k$ og viser, at det kan omskrives til $ax^2 + bx + c$. Sådan:

$$a(x-h)^2 + k \qquad \text{Gang parentesen ud}$$

$$= a\,(x^2 + h^2 - 2xh) + k \qquad \text{Gang } a \text{ ind i parentesen}$$

$$= ax^2 + ah^2 - 2axh + k \qquad \text{Byt om på to led}$$

$$= ax^2 - 2ahx + ah^2 + k$$

Nu begynder det at ligne. Det første led er, som det skal være. Hvis vi sætter $b = -2ah$ og $c = ah^2 + k$, får vi det ønskede resultat $ax^2 + bx + c$. Af ligningen $b = -2ah$ får vi:

$$h = \frac{-b}{2a}$$

Ligningen $c = ah^2 + k$ giver:

$$k = c - ah^2 \qquad \text{Indsæt } h = -\frac{b}{2a}$$

$$k = c - a \cdot \frac{b^2}{4a^2} \qquad \text{Fællesnævner } 4a$$

$$k = \frac{4ac - b^2}{4a} \qquad \text{Indfør } d = b^2 - 4ac$$

$$k = \frac{-d}{4a}$$

Hermed har vi som ønsket fået omskrevet polynomiet til et udtryk af formen $a(x-h)^2 + k$, hvor h og k er givet ved:

$$h = \frac{-b}{2a} \quad \text{og} \quad k = \frac{-d}{4a}$$

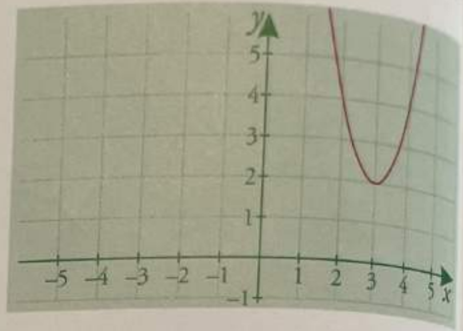
Da vi ved, at $y = a(x-h)^2 + k$ fremstiller en parabel med toppunkt i (h,k), har vi bevist sætningen.

Eksempel 4.7: Bestemmelse af toppunkt

Vi betragter funktionen $f(x) = 2x^2 - 12x + 20$. Af sætning 4.6 følger, at grafen er en parabel. Diskriminanten er $d = b^2 - 4ac = 144 - 4 \cdot 2 \cdot 20 = -16$. Toppunktet er bestemt ved:

$$Tp = \left(\frac{-b}{2a}, \frac{-d}{4a}\right) = \left(\frac{-(-12)}{4}, \frac{-(-16)}{8}\right) = (3,2)$$

Vi ved, at parablen er en parallelforskydning af $y = 2x^2$. Når grafen, der er vist i margenen, skal tegnes, kan man tegne den ligesom $2x^2$, blot med toppunkt i (3,2) i stedet for (0,0).



Parablen $y = 2x^2$ parallelforskudt, så toppunktet bliver (3,2)

Øvelse 4.8: Toppunkt og graf

Der er givet en parabel ved forskriften $f(x) = -½x^2 + ½x + 3$.
Bestem parablens toppunkt og skitsér grafen.

BESTEMMELSE AF FORSKRIFT

Som bekendt er en ret linje fastlagt ved to punkter. Tilsvarende gælder det for en parabel, at kender man tre punkter på grafen, kan man bestemme dens forskrift. Vi vil ikke gennemføre noget formelt bevis for denne påstand, men nøjes med at illustrere den ved et eksempel.

Eksempel 4.9: Bestemmelse af forskrift

Vi tænker os, at der er givet de tre punkter (0,5), (1,2) og (5,10) på en parabel, og at vi skal bestemme forskriften. Denne er af typen $y = ax^2 + bx + c$, så opgaven er at bestemme a, b og c.

Vi ved, at når et punkt ligger på parablen, passer dets koordinater i parablens ligning. Ved at indsætte (x,y)-værdier for de tre punkter får vi:

$$a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = 5$$
$$a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c = 2$$
$$a \cdot 5^2 + b \cdot 5 + c = 10$$

Hermed har vi fået opstillet tre ligninger med tre ubekendte a, b og c, som vi kan løse. Først reducerer vi ligningerne:

$$c = 5$$
$$a + b + c = 2$$
$$25a + 5b + c = 10$$

Her er vi heldige, idet den første ligning uden videre giver $c = 5$. Denne c-værdi kan vi indsætte i de to sidste ligninger, som herved bliver til to ligninger med to ubekendte:

$$a + b = -3$$
$$25a + 5b = 5$$

Løsningen er $a = 1$ og $b = -4$, og forskriften for parablen er derfor:

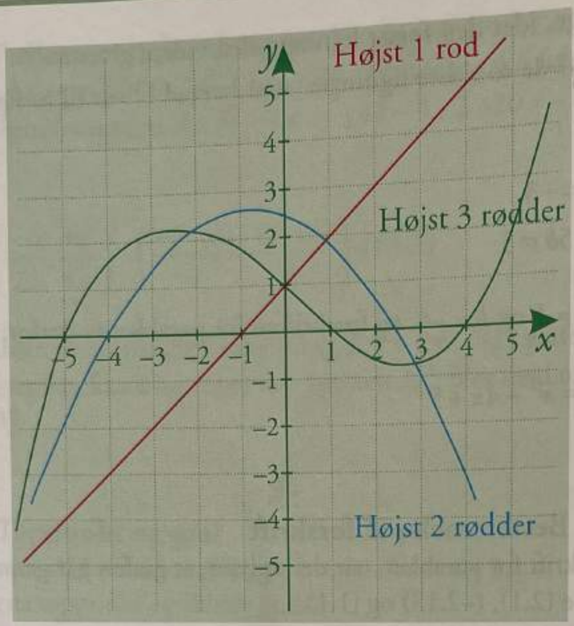
$$f(x) = x^2 - 4x + 5$$

Øvelse 4.10: Bestemmelse af forskrift

Bestem en forskrift for parablen, når det oplyses, at grafen går gennem:

a. Punkterne (2,1), (–2,13) og (1,1).
b. Punkterne (–2,5), (1,–1) og (2,–11).

Vandet, der strømmer ud gennem vandrette rør, danner en parabelbue



Et førstegradspolynomium $ax + b$ har højst én rod, et andengradspolynomium højst to rødder og et trediegradspolynomium højst tre rødder.

Nulpunkter

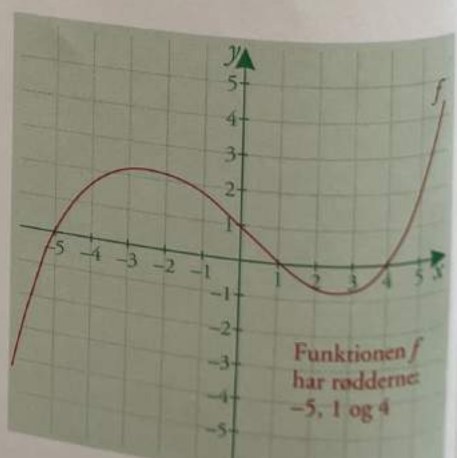
Definition 4.11: Nulpunkt/rod

Ved en *rod* eller et *nulpunkt* (eng. *zero*) for en funktion forstås en x-værdi for et skæringspunkt mellem grafen og x-aksen, dvs. en x-værdi, der giver $y = f(x) = 0$

Eksempel 4.12: Rødder

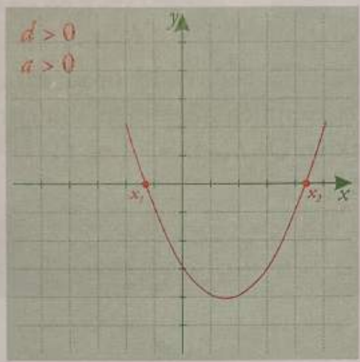
Tegningen viser grafen for en funktion f, der har de tre rødder –5, 1 og 4. Ligningen $f(x) = 0$ har altså løsningerne $x = -5 \vee x = 1 \vee x = 4$.

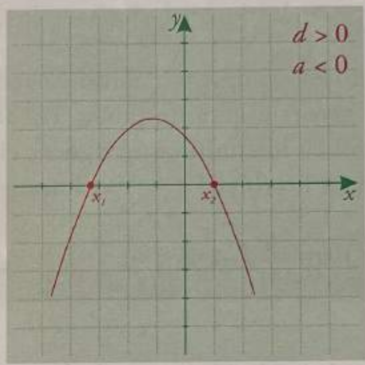
Grafen har tre skæringspunkter med x-aksen



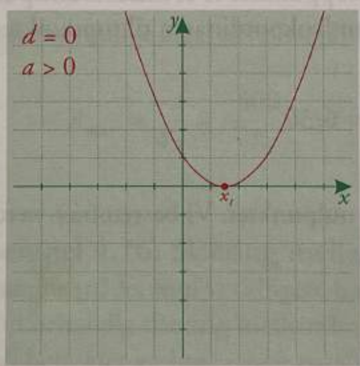
Tidligere har vi lært at løse en andengradsligning, dvs. en ligning af typen $f(x) = 0$, hvor $f(x) = ax^2 + bx + c$ er et andengradspolynomium. Ved at løse ligningen $ax^2 + bx + c = 0$ finder man andengradspolynomiets rødder/nulpunker, dvs. x-værdierne for en parabels skæringspunkter med x-aksen. Antallet af rødder afhænger af diskriminanten d. Vi kan dele op i tre tilfælde:

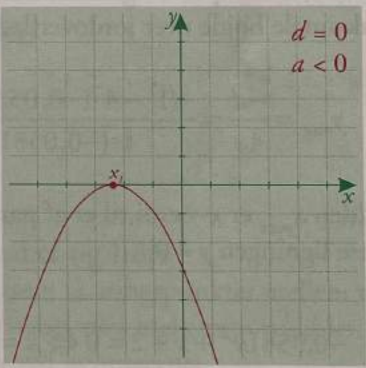
Tilfælde 1, $d > 0$:
Andengradsligningen har to løsninger og andengradspolynomiet derfor to rødder x_1 og x_2. Parablens grene vender opad, hvis $a > 0$, og nedad, hvis $a < 0$.



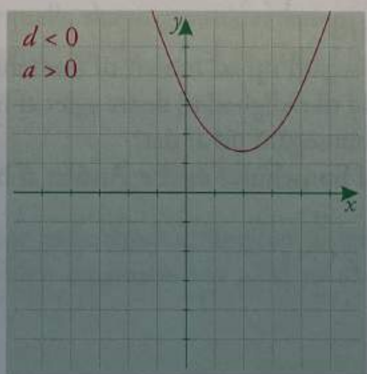


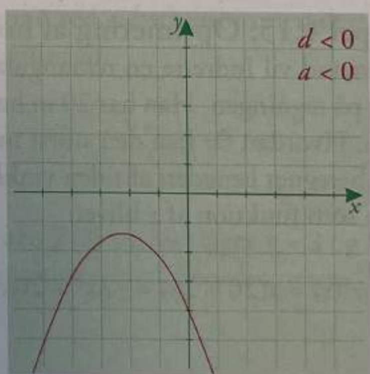
Tilfælde 2, $d = 0$:
I dette tilfælde har andengradsligningen én løsning, og polynomiet derfor én rod x_1.





Tilfælde 3, $d < 0$:
Ligningen har ingen løsninger, og parablen skærer ikke x-aksen.





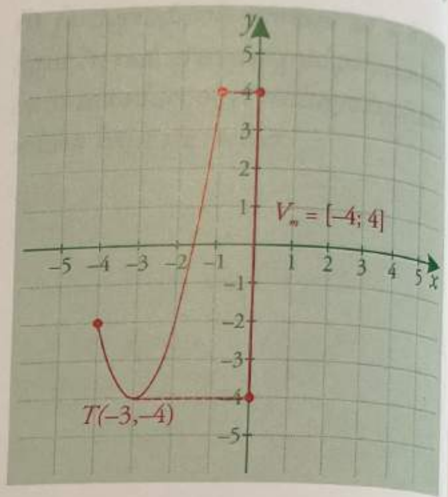
Eksempel 4.13: Værdimængde

En funktion har forskriften $f(x) = 2x^2 + 12x + 14$ og definitionsmængden $[-4,-1]$. Vi skal bestemme dens værdimængde. Først bestemmes parablens toppunkt:

$$Tp = \left(\frac{-b}{2a}, \frac{-d}{4a}\right) = \left(\frac{-12}{4}, \frac{-32}{8}\right) = (-3,-4)$$

Da x-værdien -3 ligger i definitionsmængden, og grenene vender opad, må toppunktet være et minimumspunkt. For at finde et eventuelt maksimum undersøger vi funktionen i definitionsmængdens endepunkter. Da $f(-4) = -2$ og $f(-1) = 4$, slutter vi, at $\max(f(x)) = 4$. Værdimængden er:

$$Vm(f) = [-4,4]$$



Værdimængden er intervallet fra funktionens minimum til dens maksimum

Eksempel 4.14: Kasteparabel

En kuglestøder støder sin kugle skråt op i luften. Ifølge fysikkens love beskriver kuglen herefter en parabelformet bane, indtil den lander. I et bestemt kuglestød er ligningen for banekurven $y = -0{,}0581x^2 + x + 2$. Hvor højt kommer kuglen op, og hvor langt bliver kastet?

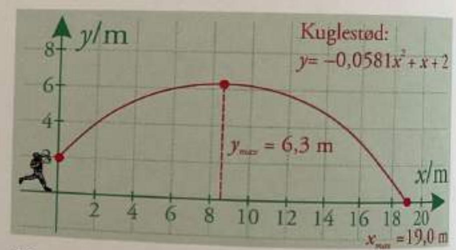
Da $a < 0$, vender parabelgrenene nedad, og toppunktet er et maksimumspunkt. Den maksimale højde over jordoverfladen er andenkoordinaten til toppunktet:

$$y_{max} = \frac{-d}{4a} = \frac{-(1^2 - 4\cdot(-0{,}0581)\cdot 2)}{4\cdot(-0{,}0581)} = 6{,}30$$

Kastevidden x_{max} er x-værdi til et af parablens nulpunkter. Vi bestemmer værdien ved at løse ligningen $y = 0$:

$$-0{,}0581x^2 + x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = \begin{cases} -1{,}81 \\ 19{,}0 \end{cases}$$

Den negative løsning kan vi ikke bruge. Kastevidden er $x_{max} = 19{,}0$ m.



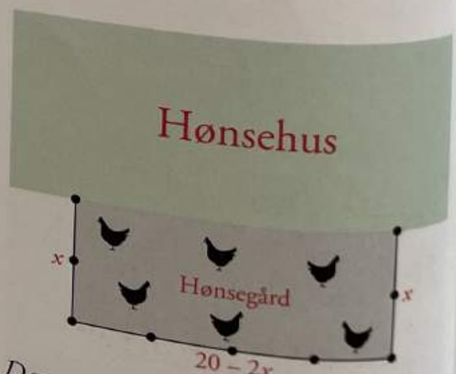
Kasteparabel

Eksempel 4.15: Optimering af hønsegård

En landmand vil indrette en rektangulær hønsegård op ad muren til hønsehuset som vist på tegningen. Han har 20 m hønsetråd til rådighed til de tre sider af hønsegården. Hvordan får han den størst mulige hønsegård ud af det?

Han betegner længden af siden vinkelret på hønsehuset med x. Arealet af hønsegården som funktion af x bliver:

$$A(x) = x(20 - 2x) = -2x^2 + 20x$$



Den størst mulige hønsegård af 20 meter hegn

Kasteparabler. De to vandkanoner udsender vandstråler, der danner hver sin kasteparabel. Billedet er fra verdensudstillingen i Lissabon 1998

Dette er forskriften for en parabel med grenene nedad og maksimum i toppunktet. Den værdi af x (maksimumsstedet), der giver den største hønsegård er derfor:

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-20}{2\cdot(-2)} = 5$$

Det størst mulige areal af hønsegården bliver:

$$A_{max} = \frac{-d}{4a} = \frac{-400}{-8} = 50$$

Eksempel 4.16: Skæring mellem parabel og linje

På samme måde, som vi tidligere har undersøgt skæringspunkter mellem to linjer, kan vi behandle skæring mellem linje og parabel eller mellem to parabler.

Vi betragter en linje og en parabel givet ved ligningerne:

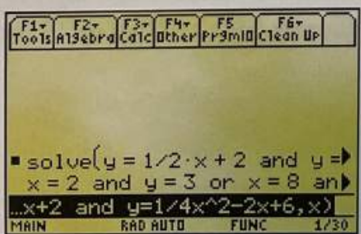
$$y = \tfrac{1}{2}x + 2$$

$$y = \tfrac{1}{4}x^2 - 2x + 6$$

Eventuelle skæringspunkter kan vi bestemme ved substitutionsmetoden, idet vi indsætter $y = \frac{1}{2}x + 2$ på y's plads i parabelligningen:

$$\tfrac{1}{2}x + 2 = 1/4x^2 - 2x + 6$$

$$\tfrac{1}{4}x^2 - 2\tfrac{1}{2}x + 4 = 0$$



Denne andengradsligning har diskriminanten 2,25 og løsninger $x = 2$ og $x = 8$. Parablen og linjen har altså to skæringspunkter med koordinaterne (2,3) og (8,6).

OPLØSNING I FAKTORER

Som bekendt kan man kun forkorte i en brøk, hvis tæller og nævner indeholder fælles faktorer. Fx kan brøken 32/56 forkortes således:

$$\frac{32}{56}=\frac{4\cdot 8}{7\cdot 8}=\frac{4}{7}$$

Først blev tæller og nævner opløst i faktorer, og derefter blev der forkortet med 8. Et andet eksempel er:

$$\frac{4x+8}{2x+4}=\frac{4(x+2)}{2(x+2)}=2$$

Brøker med andengradspolynomier i tæller og nævner kan også sommetider forkortes efter opløsning i faktorer. Her får man brug for følgende sætning.

Sætning 4.17: Opløsning i faktorer

Et andengradspolynomium med ikke-negativ diskriminant og rødder r_1 og r_2 kan omskrives således:

$$ax^2 + bx + c = a(x-r_1)(x-r_2)$$

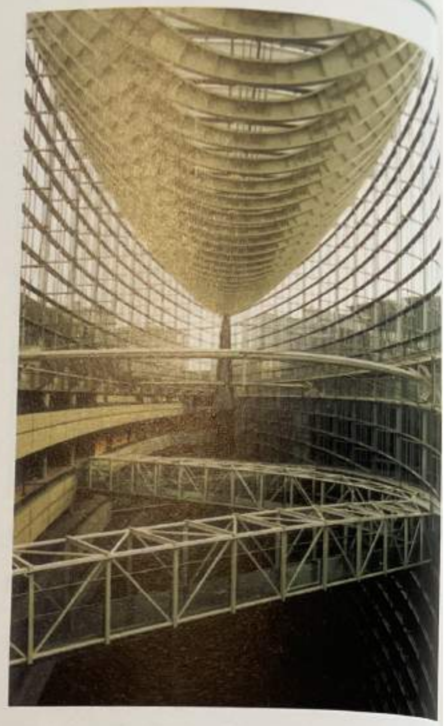
Man siger, at andengradspolynomiet er blevet opløst i faktorer. Hvis $d = 0$, er $r_1 = r_2$, og polynomiet har en såkaldt *dobbeltrod*

Bevis for sætning 4.17

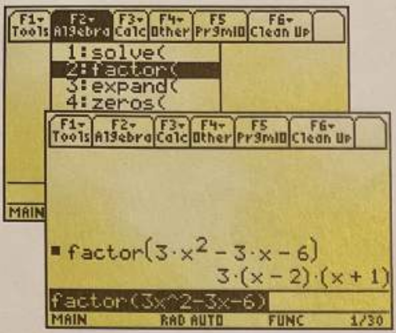
For at bevise sætningen udregner man:

$$a(x-r_1)(x-r_2)$$

$$= a\left(x-\frac{-b+\sqrt{d}}{2a}\right)\left(x-\frac{-b-\sqrt{d}}{2a}\right)$$



„International Forum" i Tokyo. Den bærende kontruktion under taget er parabelformet både på langs og på tværs



Grafregneren kan opløse et andengradspolynomium i faktorer

$$= a \cdot \left[x^2 - x \cdot \frac{-b-\sqrt{d}}{2a} - x \cdot \frac{-b+\sqrt{d}}{2a} + \frac{-b+\sqrt{d}}{2a} \cdot \frac{-b-\sqrt{d}}{2a} \right]$$

$$= ax^2 - \frac{x(-b-\sqrt{d})}{2} - \frac{x(-b+\sqrt{d})}{2} + \frac{(-b)^2 - \sqrt{d}^2}{4a}$$

$$= ax^2 + \frac{x(b+\sqrt{d}+b-\sqrt{d})}{2} + \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a}$$

$$= ax^2 + \frac{2bx}{2} + \frac{4ac}{4a}$$

$$= ax^2 + bx + c$$

Hermed er sætningen bevist.

Eksempel 4.18: Opløsning i faktorer

Polynomiet $3x^2 - 3x - 6$ skal opløses i faktorer. Først betemmes rødderne ved løsning af ligningen $3x^2 - 3x - 6 = 0$ (facit $x = 2 \vee x = -1$). Herefter bliver faktoropløsningen:

$$3x^2 - 3x - 6 = 3(x-2)(x+1)$$

Eksempel 4.19

Vi skal undersøge, om brøken:

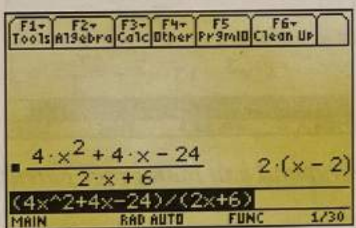
$$\frac{4x^2 + 4x - 24}{2x + 6}$$

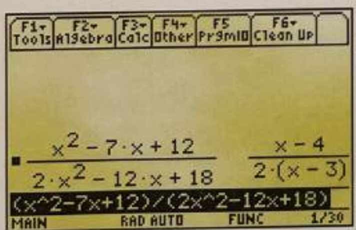
kan forkortes ved at opløse tæller og nævner i faktorer. Rødderne i tælleren bestemmes til $x = 2 \vee x = -3$ ved at løse ligningen $4x^2 + 4x - 24 = 0$. Ifølge sætning 4.17 kan tælleren derfor omskrives til $4(x-2)(x+3)$.

Nævneren opløses i faktorer ved at sætte 2 uden for parentes. Herefter kan brøken omskrives og forkortes:

$$\frac{4(x+3)(x-2)}{2(x+3)} = 2(x-2)$$

Læg mærke til, at forkortning kun er mulig, når tæller og nævner har en fælles rod.





Grafregneren kan forkorte brøkerne

Eksempel 4.20

Vi vil forkorte endnu en brøk ved at opløse tæller og nævner i faktorer:

$$\frac{x^2-7x+12}{2x^2-12x+18}$$

Man finder først rødderne i tælleren (3 og 4). Nævnerens diskriminant er 0, og derfor har nævneren kun én rod (tallet 3). Når nævneren opløses i faktorer, skal denne rod medregnes to gange (dobbeltrod). Brøken omskrives og forkortes således:

$$\frac{(x-3)(x-4)}{2(x-3)^2}=\frac{x-4}{2(x-3)}$$

Eksempel 4.21: Et polynomium med bestemte rødder

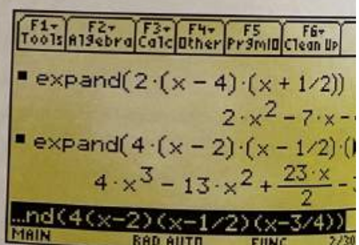
Sætning 4.17 om opløsning i faktorer kan også bruges baglæns. Man kan konstruere sig et andengradspolynomium, der har bestemte tal som rødder. Det er noget, som matematiklærere meget tit har brug for, når de skal stille opgaver.

Som eksempel vil vi konstruere et andengradspolynomium med $a = 2$ og rødderne 4 og $-½$. Ifølge sætning 4.17 ser polynomiet således ud, når det er opløst i faktorer:

$$2(x-4)(x+½)$$

Ved at gange parenteserne ud og gange ind med 2 får vi det ønskede andengradspolynomium:

$$2x^2 -7x-4$$



Med expand kan man gange paren ud

NULREGLEN

Når et funktionsudtryk er skrevet ud i faktorer, kan man i mange tilfælde aflæse rødderne med et enkelt blik. Funktionen:

$$f(x) = 2(x-2)(x+3)$$

har fx rødderne 2 og -3. Det kan man se ved at indsætte tallene i funktionen. Indsætter man $x = 2$, bliver den første parentes 0, og indsætter man $x = -3$, bliver den anden parentes 0. Eksemplet illustrerer denne sætning:

Sætning 4.22: Nulreglen

Et produkt er nul, hvis og kun hvis en af faktorerne er nul

Eksempel 4.23: En speciel andengradsligning

Andengradsligninger, hvor c er nul, kan løses ved hjælp af nulreglen. Fx ligningen:

$$x^2 - 3x = 0$$

Først opløses i faktorer ved at sætte x uden for parentes:

$$x(x-3) = 0$$

Ifølge nulreglen skal en af faktorerne være 0, dvs.:

$$x = 0 \vee x - 3 = 0$$

$$x = 0 \vee x = 3$$

Øvelse 4.24: Brug af nulreglen

Bestem rødder for følgende funktioner ved hjælp af nulreglen:

$f_1(x) = x^2 - 5x$ $\qquad$ $f_2(x) = 2x^2 - 6x$

$f_3(x) = 3(x-4)(x+2)$ $\qquad$ $f_4(x) = x - 3$

$f_5(x) = 3(x-2)(x+5)(x-1)$ $\qquad$ $f_6(x) = (2x^2 - x)(x-4)$

$f_7(x) = 2e^x(x-5)$ $\qquad$ $f_8(x) = (x+3)\ln x$