Arbejdsseddel: Teori om vektorer i planen

KBJ, september 2024 3u MA

**Definition 1: Vektor i planen**

En vektor i planen (dvs. det 2-dimensionale koordinatsystem) er et orienteret linjestykke (en pil), som fra sit udgangspunkt beskriver en samlet bevægelse langs førsteaksen og langs andenaksen. Slutpunktet kaldes spidsen af vektoren.

Vi betegner vektoren:

Vi opfatter vektoren , som en vektor med længde 1 i førsteaksens retning og som en vektor i andenaksens retning. Dermed kan man også skrive: .

**Sætning 1: Vektorlængde**

En vektor har længden

**Opgave 1:** Bevis sætning 1.

**Definition 2: Enhedsvektor**

En vektor kaldes en enhedsvektor, netop hvis .

**Sætning 2: Enhedsvektor med retning**

Hvis en enhedsvektor danner vinklen med førsteaksen, har den koordinatsæt .

**Opgave 2:** Bevis sætning 2

**Definition 3: Vektorsum**

Summen af to vektorer og er en vektor , som går fra udgangspunktet på til spidsen af , når afsættes med udgangspunkt i spidsen på .

**Sætning 3: Udregning af vektorsum**

Summen af og er givet ved .

**Opgave 3:** Bevis sætning 3

**Sætning 4: Grundlæggende regneregler for vektorsum**

Vektorsum er kommutativt:

Vektorsum er associativt:

**Opgave 4:** Bevis sætning 4

**Definition 4: Nulvektor**

Vektoren med kaldes for *nulvektoren*. En vektor kaldes en egentlig vektor.

**Sætning 5: Modsat vektor**

Til en vektor hører en modsat vektor , så .

**Opgave 5:** Bevis sætning 5

**Definition 5: Vektordifferens**

Ved differens mellem vektorerne og forstås

**Sætning 6: Udregning af vektordifferens**
For og gælder at

**Opgave 6:** Bevis sætning 6

**Sætning 7: Tegning af vektordifferens**

Hvis og lægges ud fra samme udgangspunkt, kan vektordifferensen tegnes med udgangspunkt i spidsen af og til spidsen af .

**Opgave 7:** Bevis sætning 7

**Definition 6: Tal gange vektor**

Produktet mellem et tal og en vektor kan bestemmes som .

**Sætning 8: Længde af**

Det gælder at .

**Opgave 8:** Bevis sætning 8

**Sætning 9: Gange ind i parentes**

Det gælder at

**Opgave 9:** Bevis sætning 9

**Sætning 10: Vektor med længde og retning**

En vektor med længde og retning kan bestemmes som .
En enhedsvektor med samme retning som kan bestemme som .

**Opgave 10:** Bevis sætning 10

**Sætning 11: Retning for**

Hvis vektor har retningen , så har retningen for og for .

**Opgave 11:** Bevis sætning 11

**Definition 7: Prikprodukt (skalarproduktet)**

Prikproduktet mellem og er bestemt ved .

**Sætning 12: Prikke ind i parentes**

Distributiv lov for prikprodukt og vektorsum:

**Opgave 12:** Bevis sætning 12

**Sætning 13: Kvadrat på vektor**

Det gælder at:

**Opgave 13:** Bevis sætning 13

**Sætning 14: Kvadratsætninger**

**Opgave 14:** Bevis sætning 14

**Sætning 15: Prikprodukt uafhængig af placering**

Værdien af prikproduktet er uafhængigt af hvordan og er orienteret i planen, men afhænger alene af længderne på og , samt vinklen imellem dem.

**Opgave 15:** Bevis sætning 15
(Hint: Brug sætning 14 og sætning 7).

**Sætning 16: Prikprodukt og vinkel**

For vektor og med den mellemliggende vinkel gælder:

**Opgave 16:** Bevis sætning 16.

(Hint! Vis at det gælder når er parallel med førsteaksen, og brug sætning 15).

**Sætning 17: Fortegn på prikprodukt**

For to egentlige vektorer og med den mellemliggende vinkel gælder:

For gælder at , det vil sige at vinkel er spids.
For gælder at , det vil sige at vinkel er ret (vektorerne er altså ortogomale).
For gælder at , det vil sige at vinkel er stump.

**Opgave 17:** Bevis sætning 17

**Sætning 18: Tværvektor**

Vektoren har tværvektoren , om hvilken det gælder at og at vinklen fra til er ret, i positiv omløbsretning. Tværvektoren er altså drejet imod uret.

**Opgave 18:** bevis sætning 18

**Sætning 19: Projektion af vektor på vektor**

Projektionen af vektor på vektor kan bestemmes som

**Opgave 19:** Bevis sætning 19
(Hint: For og , indfør projektionspunkt for på som og brug )

**Definition 8: Determinant**

Ved determinanten forstås:

**Sætning 20: Beregning af determinant**

**Opgave 20:** Bevis sætning 20

**Sætning 21: Areal af parallelogram**

Arealet af det af og udspændte parallellogram kan bestemmes som .
Det vil sige: , hvor er vinklen mellem og .

**Opgave 21:** Bevis sætning 21
(Hint! Brug formel for areal af parallelogram, og udnyt projektion af på ).