

Arbejdsseddel: Funktioner og vækst

KBJ, april 2024

1s Ma

I skal arbejde med at forberede jer på at gå til årsprøve i spørgsmål 1 og 2:

1. Funktioner og vækst

Forklar om lineære funktioner, herunder graf, forskrift og vækstegenskaber.

Giv et bevis for topunktsformlen og et bevis for sætningen om lineær vækst.

2. Funktioner og vækst

Forklar om eksponentialfunktioner, herunder graf, forskrift og vækstegenskaber.

Giv et bevis for sætningen om eksponentiel vækst, og udled formelen for fordoblingskontant.

Opgave 1

Lav en liste over hvad man kan sige om lineære funktioner, særligt ud fra ”graf, forskrift og vækstegenskaber”. Overvej hvilke figurer og formler der kan laves på tavlen som del af det.

Opgave 2

Læs uddrag af grundforløbsnoten på side 3-6. Prøv at forstå beviserne for topunktsformlen og for lineær vækst. Tal om hvordan man skal præsentere disse.

Opgave 3

Lav en liste over hvad man kan sige om eksponentielle funktioner, særligt ud fra ”graf, forskrift og vækstegenskaber”. Overvej hvilke figurer og formler der kan laves på tavlen som del af det.

Opgave 4

Læs noten på side 7-8. Prøv at forstå beviserne. Tal om hvordan man skal præsentere disse, herunder især hvilke ord der kan sættes på de mange symbolske omskrivninger.

Modul 10: Beviser

Matematikkens teori består af *sætninger* der udsiger generelle egenskaber ved matematiske objekter. To eksempler på sætninger fra de foregående moduler er:

Sætning 1: Topunktsformlen

For den lineære funktion $f(x) = a \cdot x + b$ hvis graf går gennem $P(x_1, y_1)$ og $Q(x_2, y_2)$ gælder at $a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ og $b = y_1 - a \cdot x_1$.

Sætning 2: Lineær vækst

For den lineære funktion $f(x) = a \cdot x + b$ gælder, at hvis x vokser med Δx så vokser y med $a \cdot \Delta x$.
Det vil sige: $f(x + \Delta x) = f(x) + a \cdot \Delta x$.

Et vigtigt spørgsmål er hvordan vi kan vide at disse to sætninger faktisk gælder. Det kan vi kun vide fordi vi er i stand til at lave et *matematisk bevis* for sætningerne.

Matematik i gymnasiet er opdelt i en *skriftlig* og en *mundtlig* del. I den skriftlige del regnes der opgaver som ligner dem fra grundforløbets screening. I den mundtlige del skal man kunne forklare matematisk teori, herunder give beviser for sætninger. Til den mundtlige årsprøve ved afslutningen af 1.g vil man på B-niveau kunne få et spørgsmål der lyder:

Lineære funktioner

Redegør for lineære funktioner, herunder graf, forskrift og vækstegenskaber.
Giv beviser for topunktsformlen og sætningen om lineær vækst.

Det er altså en central del af evalueringen af grundforløbet, at man er i stand til at fremstille og begrunde beviserne for ovenstående to sætninger. På de følgende sider vil beviserne blive gennemgået. Man skal aldrig selv opfinde beviset til mundtlige prøver, men man skal kunne forklare og begrunde tankegangen i det, uden manuskript. Det kræver en dyb forståelse.

Hvad er et bevis?

Et bevis er det som godtgør at en sætning gælder. Udgangspunktet for et bevis er altid en stribe *forudsætninger* (dvs. udsagn der går *forud* for sætningen). Ud fra de sande forudsætninger argumenterer man sig skridt for skridt frem til, at sætningen må gælde.

Bevis for Sætning 1: Topunktsformlen

Forudsætningerne for beviset af topunktsformlen er:

1. Vi kender to punkter $P(x_1, y_1)$ og $Q(x_2, y_2)$ som ligger på grafen for $f(x) = a \cdot x + b$.
2. Et punkt $P(x_1, y_1)$ ligger på grafen for f netop hvis $f(x_1) = y_1$.
3. To ting der er lig med hinanden kan i ethvert udtryk erstatte hinanden.
4. En plus-parens kan hæves, en minus-parens kan hæves hvis alle fortegn skiftes.
5. Man kan gange ind i og sætte udenfor parentes: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

Udover de fire nævnte forudsætninger gælder almindelige regler for regning og ligninger.

Beviset for sætningen falder her i fire trin:

Trin 1: Opstil ligninger for y_1 og y_2 .

Betingelsen for at $P(x_1, y_1)$ ligger på grafen for f er at der gælder: $y_1 = a \cdot x_1 + b$

Betingelsen for at $Q(x_2, y_2)$ ligger på grafen for f er at der gælder: $y_2 = a \cdot x_2 + b$

Disse to ligninger må altså være sande jf. forudsætning 1 og 2 og kan anvendes videre i beviset.

Trin 2: Slip af med b

Da b ikke optræder i formelen for a og da formelen kun udgør én ligning, skal vi have kombineret de to ligninger til én og samtidig slippe af med b . Da minus er omvendt af plus får vi den idé at kigge på udtrykket $y_2 - y_1$. Da " y_2 " er lig " $a \cdot x_2 + b$ " kan disse to udtryk, jf. forudsætning 3, altid erstatte hinanden. Det samme for " y_1 " og " $a \cdot x_1 + b$ ". Dette udnyttes med brug af parentes:

$$y_2 - y_1 = (a \cdot x_2 + b) - (a \cdot x_1 + b)$$

For at hæve parenteserne bruges forudsætning 4. Det kræver at fortegn i minusparentesen skiftes.

$$y_2 - y_1 = a \cdot x_2 + b - a \cdot x_1 - b$$

Fra almindelig regning ved vi at $+b$ og $-b$ tilsammen giver 0 og derfor "går ud" med hinanden:

$$y_2 - y_1 = a \cdot x_2 - a \cdot x_1$$

Trin 3: Isolér a

Vi udnytter at siderne i en ligning altid kan ombyttes og opskriver seneste trin igen omvendt:

$$a \cdot x_2 - a \cdot x_1 = y_2 - y_1$$

Med forudsætning 4 sættes a udenfor parentes på højre side:

$$a \cdot (x_2 - x_1) = y_2 - y_1$$

Da dividere er omvendt af gange divideres på begge sider med $(x_2 - x_1)$ for at isolere a :

$$\frac{a \cdot (x_2 - x_1)}{(x_2 - x_1)} = \frac{y_2 - y_1}{(x_2 - x_1)}$$

På venstre side går $(x_2 - x_1)$ i tæller og nævner ud med hinanden. På højre side er parentesens overflødig og fjernes. Til sidst er a isoleret og det ønskede udtryk er fundet:

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Trin 4: Isolér b

Fra forudsætning 1 fik vi at $y_1 = a \cdot x_1 + b$, som nu opskrives i omvendt rækkefølge:

$$a \cdot x_1 + b = y_1$$

På begge sider trækkes $a \cdot x_1$ nu fra og $a \cdot x_1 - a \cdot x_1$ går ud, så den ønskede formel opnås:

$$a \cdot x_1 + b - a \cdot x_1 = y_1 - a \cdot x_1$$

$$b = y_1 - a \cdot x_1$$

Hermed er de to formler udledt og sætningen er bevist.

Det fulde bevis kan skrives langt mere kompakt uden forklaringer, men med samme gyldighed:

$$y_1 = a \cdot x_1 + b \text{ og } y_2 = a \cdot x_2 + b$$

$$y_2 - y_1 = (ax_2 + b) - (ax_1 + b) = ax_2 + b - ax_1 - b = ax_2 - ax_1 = a(x_2 - ax_1)$$

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$y_1 = ax_1 + b$$

$$b = y_1 - ax_1$$

Bevis for sætning 2: Lineær vækst

Sætning 2 siger: For $f(x) = a \cdot x + b$ gælder at $f(x + \Delta x) = f(x) + a \cdot \Delta x$

Udtrykket siger at y -værdien der hører til $x + \Delta x$, som kaldes $f(x + \Delta x)$, kan bestemmes ved at tage y -værdien der hører til x , som kaldes $f(x)$, og lægge $a \cdot \Delta x$ til denne.

Beviset kan fremstilles meget kompakt:

$$f(x + \Delta x) = a \cdot (x + \Delta x) + b = a \cdot x + a \cdot \Delta x + b = a \cdot x + b + a \cdot \Delta x = f(x) + a \cdot \Delta x$$

Hermed er sætningen bevist.

Har man brug for et mere udfoldet bevis kunne det se ud på følgende vis:

Vi ved at $f(\text{"symbol"})$ betyder at "symbol" skal sættes ind på x 'ets plads i forskriften. F.eks. ved vi at $f(2) = a \cdot 2 + b$ samt at $f(q) = a \cdot q + b$ og dermed ved vi også at:

$$f(x + \Delta x) = a \cdot (x + \Delta x) + b$$

Parentesen er nødvendig så hele "symbolet" ganges med a . Herefter ganges a ind i parentesen:

$$f(x + \Delta x) = a \cdot x + a \cdot \Delta x + b$$

Da rækkefølgen man lægger sammen i er ligegyldig ombyttes de to sidste led:

$$f(x + \Delta x) = a \cdot x + b + a \cdot \Delta x$$

Da $f(x) = a \cdot x + b$ kan " $f(x)$ " og " $a \cdot x + b$ " erstatte hinanden hvilket udnyttes her:

$$f(x + \Delta x) = f(x) + a \cdot \Delta x$$

Hermed er det vist at hvis man lægger Δx til x og sætter den nye værdi ind i funktionen, så kommer der en funktionsværdi ud af det som svarer til at man havde taget $f(x)$ og lagt $a \cdot \Delta x$ til.

Eksponentialfunktionen

Definition:

$$f(x) = b \cdot a^x, a > 0 \text{ og } b > 0.$$

Sætning: Eksponentiel vækst

$$f(x + \Delta x) = f(x) \cdot a^{\Delta x}$$

Bevis:

$$f(x + \Delta x) = b \cdot a^{x+\Delta x} = b \cdot a^x \cdot a^{\Delta x} = f(x) \cdot a^{\Delta x}$$

Sætning: Fordoblingskonstant

Der fås $f(x + T_2) = 2 \cdot f(x)$ netop for $T_2 = \frac{\log(2)}{\log(a)}$

Bevis:

For $2 \cdot f(x)$ sættes $a^{\Delta x} = 2$ og $\Delta x = T_2$:

$$a^{T_2} = 2$$

$$\log(a^{T_2}) = T_2 \cdot \log(a) = \log(2)$$

$$T_2 = \frac{\log(2)}{\log(a)}$$

Sætning: Topunktsformlen

For eksponentialfunktionen f med graf gennem $P(x_1, y_1)$ og $Q(x_2, y_2)$ fås:

$$a = \sqrt[x_2 - x_1]{\frac{y_2}{y_1}} \text{ og } b = \frac{y_1}{a^{x_1}}$$

Bevis:

$$y_1 = f(x_1) = b \cdot a^{x_1} \text{ og } y_2 = f(x_2) = b \cdot a^{x_2}$$

$$\frac{y_2}{y_1} = \frac{b \cdot a^{x_2}}{b \cdot a^{x_1}} = \frac{a^{x_2}}{a^{x_1}} = a^{x_2 - x_1}$$

$$a = \sqrt[x_2 - x_1]{\frac{y_2}{y_1}}$$

$$y_1 = b \cdot a^{x_1}$$

$$b = \frac{y_1}{a^{x_1}}$$

Sætning: Betydning af b

Grafen for f skærer andenaksen i punktet $(0, b)$.

Bevis:

$$f(0) = b \cdot a^0 = b \cdot 1 = b$$

Sætning: Betydning af a

For $a > 1$ er f voksende, for $0 < a < 1$ er f aftagende. For $a = 1$ bliver f en konstant funktion.

Bevis:

I det følgende ses der på hvad der sker med $f(x)$, når x vokser - det vil sige når $\Delta x > 0$.

For $a > 1$ fås $a^{\Delta x} > 1$. Dermed fås: $f(x + \Delta x) = f(x) \cdot a^{\Delta x} > f(x)$.

Da $f(x)$ vokser, når x vokser, er f voksende.

For $0 < a < 1$ fås $a^{\Delta x} < 1$. Dermed fås: $f(x + \Delta x) = f(x) \cdot a^{\Delta x} < f(x)$.

Da $f(x)$ aftager, når x vokser, er f aftagende.

For $a = 1$ fås $a^{\Delta x} = 1^{\Delta x} = 1$. Dermed fås: $f(x + \Delta x) = f(x) \cdot a^{\Delta x} = f(x) \cdot 1 = f(x)$.

Da $f(x)$ har samme værdi, når x vokser, er f konstant.