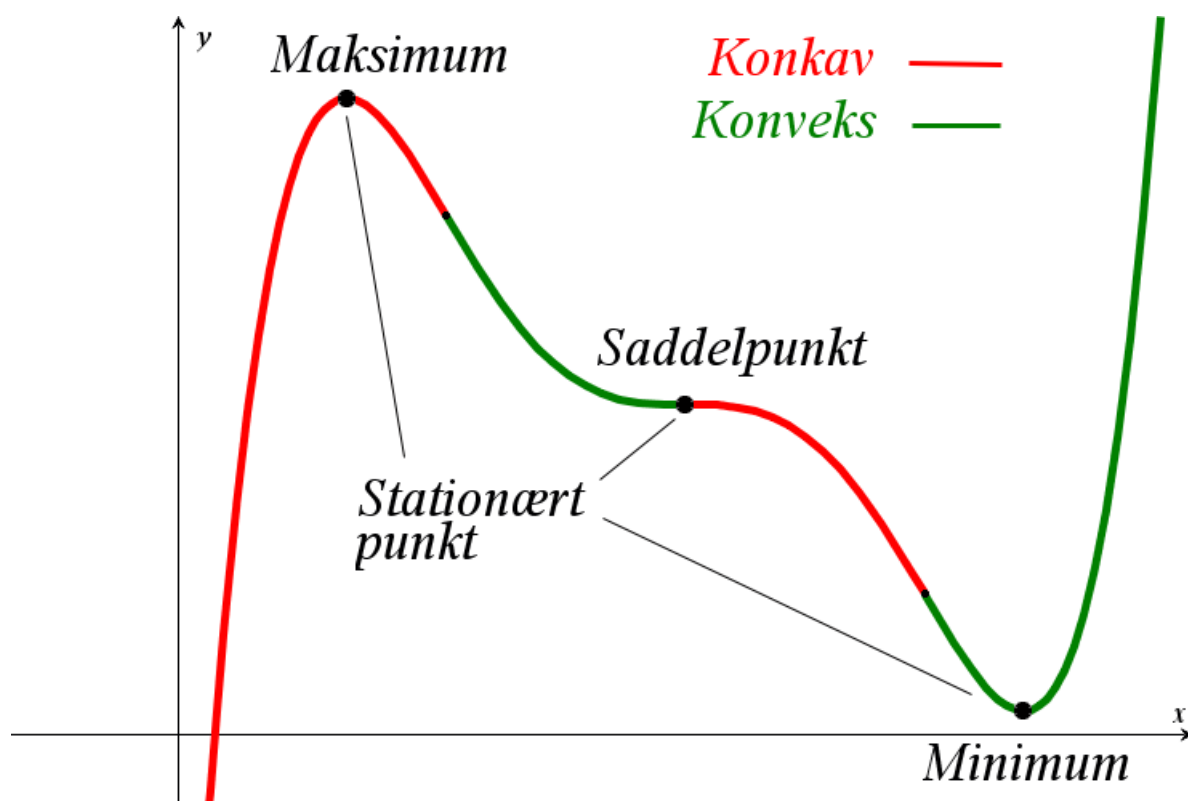




FUNKTIONSTEORIENS GRUNDBEGREBER

- note til gymnasial matematikundervisning

Af Kasper Bjering Søby Jensen

2021

Noten må bruges frit og gratis uden forudgående tilladelse.

Noten må ændres og anvendes ikke-kommercielt uden forudgående tilladelse.

Kommentarer til indholdet og rettelser af fejl modtages med glæde: rkkbj@rks-gym.dk

Funktionsteoriens grundbegreber - note til gymnasial matematikundervisning

Indholdsfortegnelse

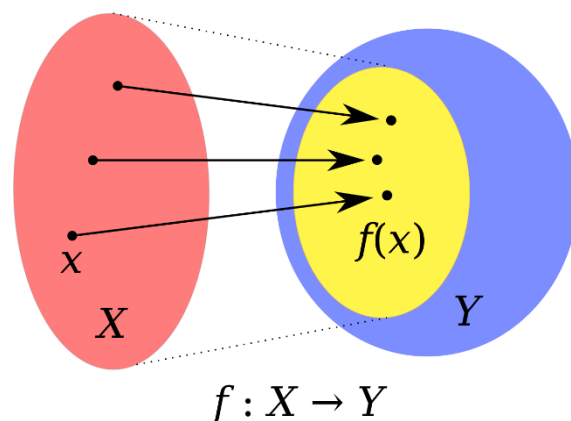
1. Hvad er en funktion?	3
2. Reelle funktioner bestemt ved forskrift	5
3. Graf	7
4. Kontinuitet	9
5. Nulpunkt og fortegnsvariation	10
6. Differentiabilitet.....	13
7. Tangent og tangenthældning.....	14
8. Ekstremumspunkt og monotoniforhold	16
9. Vendepunkt og krumningsforhold	20
10. Funktioner og modeller.....	25
11. Regning med funktioner.....	28
12. Afledet funktion uden CAS-værktøj.....	32
13. Oversigt over centrale begreber i funktionsanalysen.....	38

1. Hvad er en funktion

En funktion er en bestemt type relation mellem to mængder. En funktion forbinder elementer i et *domæne*, med elementer i et *codomæne*, således at hvert element i domænet forbindes med ét og kun ét element i codomænet.

Hvis domænet kaldes X , og codomænet Y , vil vi symbolsk skrive:

$$f: X \rightarrow Y$$



Figur 1. Lånt fra en.wikipedia.org

Vi vil tale om at f er en afbildning af X ind i Y . For et x i domænet, vil vi kalde det element som x knyttes sammen med i codomænet, for funktionsværdien af x , betegnet $f(x)$. Man udtaler symbolet $f(x)$ som ” f -af- x ”. De værdier i codomænet, som er funktionsværdier for elementer i domænet, kaldes generelt for *billedmængden*. På figur 1 er domænet rødt, codomænet blå og gult, og billedmængden er gul.

Den helt centrale egenskab ved en *funktion* er, at et element i domænet netop kun er knyttet sammen med ét element fra codomænet - og aldrig flere. Der er tilgængelig ikke noget problem i, at to forskellige elementer i domænet er knyttet til samme element i codomænet.

Eksempel 1.1

Hvis vi forestiller os et domæne bestående af 28 gymnasieelever. Lad os kalde mængden for G . Vi forestiller os nu en funktion $A: G \rightarrow \mathbb{N}_0$, som til hver elev knytter et naturligt tal, som er elevens alder målt i hele år. Helt oplagt har alle eleverne en alder, og lige så oplagt har de kun én. Man kan ikke både være 15 og 18 år gammel. Der er tilgængelig intet problem med, at to forskellige elever har den samme alder.

Hvis Peter er en 17 årig gymnasieelev, siger funktionen altså: $A(\text{Peter}) = 17$.

Eksempel 1.2

Hvis vi forestiller os et domæne bestående af tidspunkter i løbet af et bestemt døgn, så er temperaturen et bestemt sted en funktion af tidspunktet. Helt oplagt må der til hvert tidspunkt være en temperatur, og lige så oplagt kan der ikke være to forskellige temperaturer samtidigt. Der kan tilgængelig godt være to forskellige tidspunkter, hvor temperaturen er den samme. F.eks. kan den være $7,3^\circ\text{C}$ både kl. 8.13 og kl. 22.41. Men kl. 11.45 kan temperaturen ikke være både $4,3^\circ\text{C}$ og $9,2^\circ\text{C}$.

De to eksempler viser grundtanken i en funktion. Fra billedmængden knyttes netop én funktionsværdi til hver værdi i domænet.

Bemærk i eksempel 1.1, at en funktion ikke behøver at hedde f . Den kan hedde hvad som helst. Ofte bruges et enkelt bogstav, men det kan også være et mere avanceret symbol (f.eks. et ord).

Når vi i almindelighed taler om en vilkårlig funktion, bruger vi navnet " f ". Har vi flere funktioner i spil, bruges ofte f , g og evt. h . Er der endnu flere i spil, navngives de i situationen.

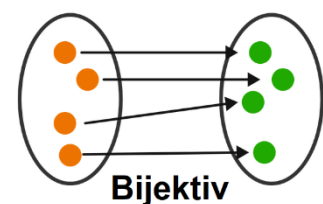
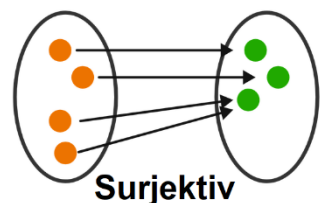
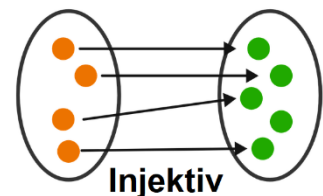
Bemærk også at vi refererer til funktionen blot ved dens navn, f.eks. " f ". Man behøver ikke at skrive $f(x)$, som strengt taget henviser til "funktionsværdien af x ", som ikke er helt det samme som funktionen f som helhed.

Karakterisering af funktion

En funktion hvor intet element i codomænet er funktionsværdi af mere end ét element i domænet, siges at være *injektiv*. Det betyder altså, at x kan være sikker på at have sin funktionsværdi $f(x)$ for sig selv.

En funktion hvor alle elementer i codomænet er funktionsværdi for mindst ét element i domænet, siges at være *surjektiv*. Det vil sige at funktionen rammer hele codomænet. Man kan også sige at billedmængden fylder hele codomænet.

En funktion som både er injektiv og surjektiv, siges at være *bijektiv*. Det betyder at elementerne i domænet og codomænet hænger sammen én og én. Hvis der findes en bijektiv funktion mellem to mængder, har disse to mængder nøjagtigt samme antal elementer.



2. Reelle funktioner bestemt ved forskrift

I matematik arbejder vi det meste af tiden med såkaldt *reelle funktioner*. Det betyder funktioner hvis domæne udgøres af et udsnit af de reelle tal ($\mathbb{R}$), samt at codomænet er de reelle tal. Hvis A er en delmængde af de reelle tal (symbolsk skrives det $A \subseteq \mathbb{R}$), så er en reel funktion af én variabel, en funktion som opfylder: $f: A \rightarrow \mathbb{R}$.

Engang i mellem vil sådanne reelle funktion blot blive sammenfattende beskrevet ved: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

Domænet for en reel funktion kaldes ofte for funktionens *definitions­mængde*, og betegnes $D_m(f)$. Samtidig kaldes *billed­mængden* for funktionens *værdimængde*, og betegnes $V_m(f)$.

For reelle funktioner betegner vi typisk en værdi i definitions­mængden som x , og en værdi i værdimængden som y . Da x og y oftest repræsenterer mange forskellige værdier, kalder vi disse to for *variable*.

Da x repræsenterer værdier der kan ”vælges frit” fra definitions­mængden, kalder vi denne for en *uafhængig variabel*. Da den til x tilknyttede funktions­værdi $y = f(x)$ er bestemt, ved vores valg af x , kaldes y for en *afhængig variabel*.

Generelt vil vi således kunne beskrive en funktion som en sammenhæng mellem en uafhængig variabel x og en afhængig variabel y .

For at kunne bestemme hvilket y der hører til et givent x , anvendes ofte en *forskrift*. En forskrift er et regneudtryk, hvor en bestemt x -værdi kan indsættes, så dens tilhørende y -værdi kan bestemmes.

Eksempel 2.1

En funktion f er bestemt ved forskriften: $f(x) = x^2 - 5 \cdot x + 6$.

Til den uafhængige værdi $x = 4$ bestemmes funktions­værdien:

$$f(4) = 4^2 - 5 \cdot 4 + 6 = 16 - 20 + 6 = 2$$

Til $x = 4$ er altså knyttet $y = 2$. Oplagt kan en regne­forskrift ikke give mere end én funktions­værdi, da en konkret udregning ikke kan have to resultater.

Omvendt ses, at til $x = 1$ er knyttet $f(1) = 1^2 - 5 \cdot 1 + 6 = 1 - 5 + 6 = 2$. Det ses altså at $y = 2$ er funktions­værdi for både $x = 1$ og $x = 4$.

Bemærk også at vi bruger symbolerne $f(1)$ og $f(4)$ om de funktions­værdier der er knyttet til $x = 1$ og $x = 4$. Fra et beregnings­mæssigt synspunkt betyder ” $f(1)$ ” altså ”sæt 1 ind på x ’ets plads i regne­forskriften for f og udregn hvad det giver”.

Stykvist defineret funktion

Vi vil tillade at en funktion kan være defineret ved forskellige regneforskrifter, for forskellige x -værdier. Sådanne funktioner vil vi kalde *stykvist definerede*.

Hvis en stykvist defineret funktion f bruger regneudtrykket $u(x)$ når $x \leq k$ og $v(x)$ når $x > k$, så vil vi skrive funktionsforskriften som en såkaldt gaffelforskrift:

$$f(x) = \begin{cases} u(x), & x \leq k \\ v(x), & x > k \end{cases}$$

I princippet kan en stykvist defineret funktion være bestemt over vilkårligt mange forskellige intervaller, bare disse ikke overlapper, så der risikerer at blive flere funktionsværdier for samme x .

$$f(x) = \begin{cases} u_1(x), & x \in I_1 \\ u_2(x), & x \in I_2 \\ \vdots & \\ u_n(x), & x \in I_n \end{cases}$$

Eksempel 2.2

En funktion er bestemt ved: $f(x) = \begin{cases} x^3 - 5, & x < 2 \\ 2^x + x, & x \geq 2 \end{cases}$

Det ses at $f(1) = 1^3 - 5 = 1 - 5 = -4$, samt at $f(3) = 2^3 + 3 = 8 + 3 = 11$.

Endvidere ses det at $2^3 - 5 = 8 - 5 = 3$ og $2^2 + 2 = 4 + 2 = 6$. De to regneudtryk giver altså ikke samme værdi for $x = 2$. Derfor er det vigtigt at forskriften afgør, hvilket af de to udtryk der anvendes, for $x = 2$. Da den nederste gælder for $x \geq 2$ og ikke kun for $x > 2$, gælder denne. Det er således entydigt bestemt, at $f(2) = 6$.

Bestemmelse af værdier

Som det fremgår vil vi generelt betegne funktionsværdien til $x = a$ med $f(a)$. Vi kan således bestemme det y der hører til $x = a$, blot ved at regne dette tal ud.

Hvis vi omvendt ønsker at bestemme hvilke x -værdier der knyttes til en bestemt funktionsværdi $y = b$, kan dette opstilles som en ligning: $f(x) = b$.

Ligningen kan have fra ingen og op til uendeligt mange løsninger, svarende til at funktionen kan knytte $y = b$ som funktionsværdi til alt fra ingen til uendeligt mange forskellige x -værdier.

3. Graf for funktion

Når det for en funktion gælder, at x har funktionsværdien $y = f(x)$, udgør de to tilsammen et *punkt* (x, y) eller $(x, f(x))$. Den samlede mængde af punkter på formen $(x, f(x))$ kaldes for funktionens *graf*. En graf er altså først og fremmest en mængde af punkter, som siges at *ligge på grafen for f* .

Punkt og koordinatsystem

Et punkt er helt generelt et ordnet talpar (x, y) . At de er ordnet, betyder at tallene betyder noget forskelligt, afhængigt af om de står først ellers sidst. De to tal i et punkt (x, y) kaldes henholdsvis for punktets førstekoordinat og andenkoordinat, eller x -koordinat og y -koordinat.

Hvis vi forestiller os alle de punkter der kan laves ud af to reelle tal, har vi et koordinatsystem. Vi tegner normalt koordinatsystemet med en førsteakse og en andenakse fremhævet. Førsteaksen består af alle punkter hvor andenkoordinaten er $y = 0$, mens andenaksen består af alle de punkter hvor førstekoordinaten er $x = 0$. På begge akser ligger altså punktet $(0,0)$, som kaldes koordinatsystemets begyndelsespunkt, eller med et fint ord *origo*. Punktet hedder normalt $O(0,0)$.

På førsteaksen ligger eksempelvis punkterne $A(2,0)$, $B(\pi, 0)$, $C(5,4, 0)$, $D(-7, 0)$ og $O(0,0)$.

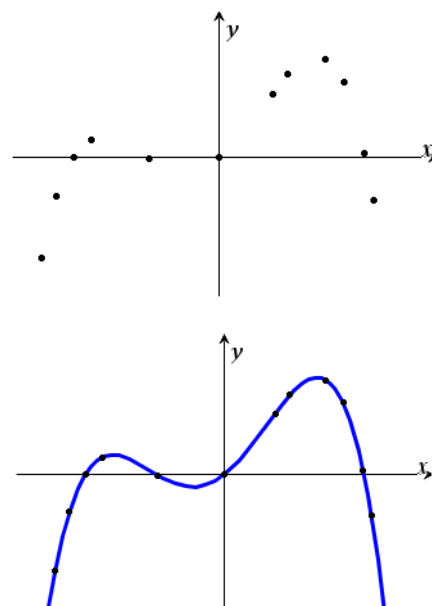
På andenaksen ligger eksempelvis punkterne $O(0,0)$, $P(0,1)$, $Q(0, \sqrt{2})$, $R(0, -12)$ og $S(0, 0,023)$.

Vi tegner normalt koordinatsystemet ved at repræsentere hver af de to akser med to rette tallinjer, vinkelret på hinanden og med skæringspunkt i $O(0,0)$. Et punkt kan da grafisk placeres, så det er ud for sin førstekoordinat på førsteaksen, og andetkoordinat på andenaksen.

Graf i koordinatsystem

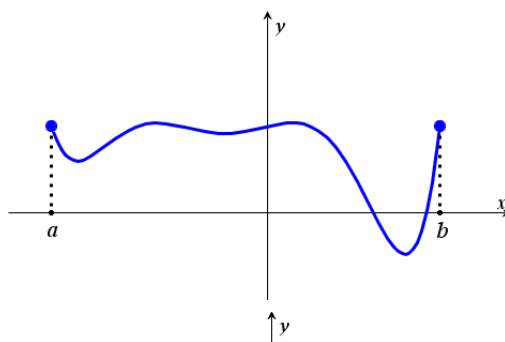
Vi forbinder især grafen for en funktion med dens visuelle repræsentation, som kan indtegnes i et koordinatsystem. På figuren til højre er tegnet 12 punkter, som ligger på grafen for en funktion f . 12 punkter er naturligvis et meget lille udsnit af samtlige punkter (som der er uendeligt mange af).

Vi kan naturligvis tegne lidt flere punkter ind - f.eks. 100 mere. Men hvad sker der hvis vi tegner ”dem alle sammen”? Ja, så vil vi få en sammenhængende kurve, som den vist her til højre. Den visuelle repræsentation af en graf er således netop en kurve, der består af alle de punkter i et valgt udsnit af koordinatsystemet, som ligger på grafen for f . Kurven er ofte uendelig lang, så der er som regel kun tale om et udsnit.

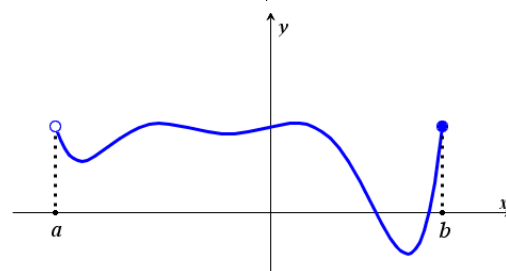


Grafer med særlige punkter

Hvis definitionsmængden for en funktion er afgrænset til et endeligt interval $[a; b]$, så vil grafen for f ofte være en endelig kurve, som f.eks. vist her til højre. De to endepunkter er markeret som udfyldte ringe, for at markere at endepunkterne ligger *på* grafen.

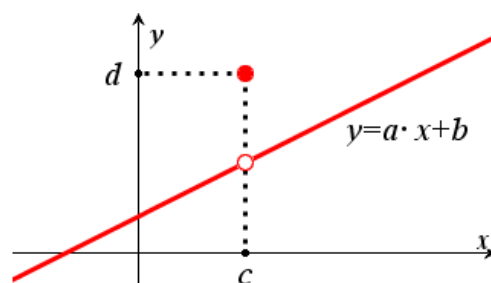


Hvis definitionsmængden i stedet var $]a; b]$, så kurvens endepunkt til venstre *ikke* ligger på kurven, mens der dog er punkter uendeligt tæt på $x = a$, så markerer vi at grafen går helt hen til punktet, men at punktet ikke selv er med, ved at markere det med en åben ring.

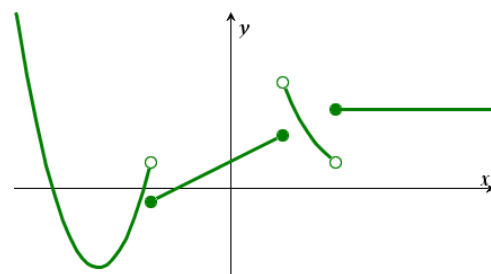


Vi kan også forestille os en funktion hvor et enkelt punkt er klippet ud af kurven. Hullet vises da med en åben ring. Og måske har grafen et løsrevet punkt ved den pågældende x -værdi, som markeres med en udfyldt ring. En forskrift kunne her være:

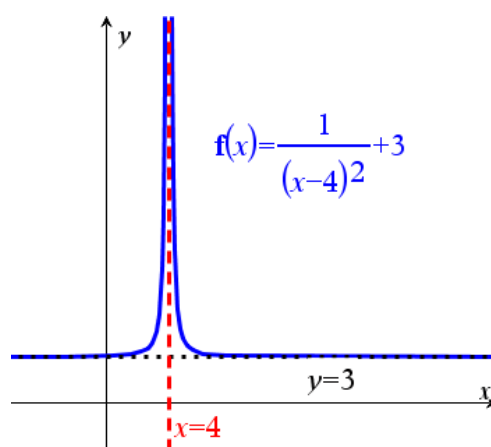
$$f(x) = \begin{cases} a \cdot x + b, & x \neq c \\ d, & x = c \end{cases}$$



Også hvis en stykvisst defineret funktion laver et hop i funktionsværdierne ved de x -værdier, hvor forskriften skifter, er det nødvendigt at angive med åbne og lukkede ringe, hvilket kurvestykkets ende der ligger på grafen for funktionen, og hvilket der ikke gør, som vist her til højre.



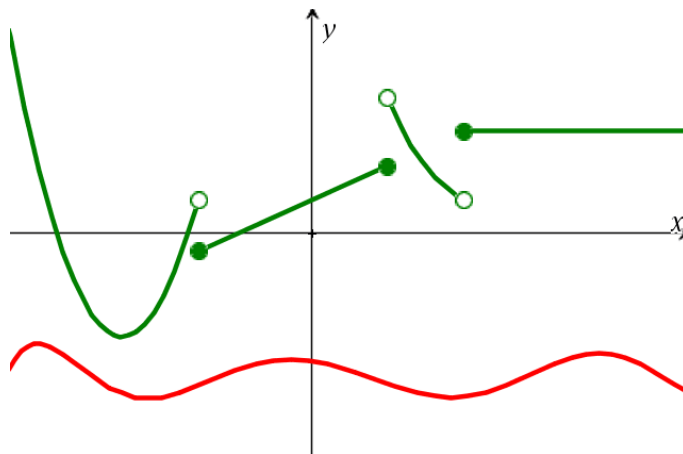
Endeligt kan man have funktioner med et egentligt hul i definitionsmængden. Til højre ses grafen for funktionen $f(x) = \frac{1}{(x-4)^2} + 3$. Oplagt kan man ikke sætte $x = 4$, da man så kommer til at dividere med 0. Men jo tættere x kommer på 4, jo større bliver y . Derfor kravler grafen for f op langs linjen $x = 4$ som vist. Omvendt vil meget store x -værdier få brøken $\frac{1}{(x-4)^2}$ til at komme meget tæt på 0, hvorfor y kommer meget tæt på 3. Derfor kravler grafen ud langs linjen $y = 3$, som vist. De to linjer kalder vi henholdsvis for lodret og vandret asymptote for grafen for f .



4. Kontinuitet

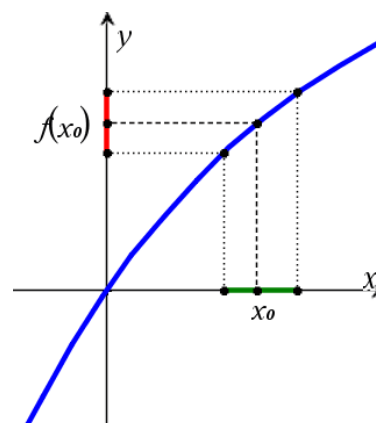
Populært sagt, så siges en funktion hvis graf kan tegnes uden at man skal løfte blyanten fra papiret, at være *kontinuert*. Kontinuitet er en ganske central egenskab for en funktion, som meget af den teori der præsenteres senere afhænger af.

På figuren til højre ses grafer for to forskellige funktioner. Den røde graf er kontinuert. Den kan tegnes uden at løfte blyanten, mens den grønne graf har tre punkter hvor den ikke er kontinuert. Vi siger at den i de tre punkter er *diskontinuert* eller blot *ikke-kontinuert*.



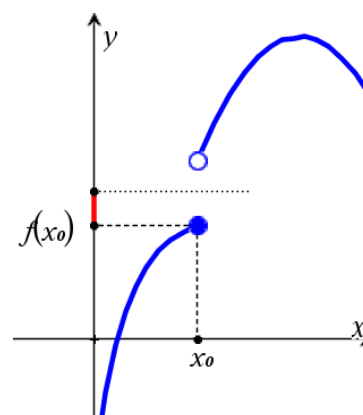
Strengt taget er den kontinuert i de øvrige punkter. Vi vil dog kun kalde en funktion for *kontinuert*, hvis den er kontinuert i *alle* punkter.

Mere formelt, så betyder det at en funktion f er kontinuert i x_0 , at hvis et x kun afviger en smule fra x_0 , så vil $f(x)$ kun afvige en smule fra $f(x_0)$.



Endnu mere formelt kan man sige, at hvis man for et nok så lille interval rundt om funktionsværdien $f(x_0)$, kan finde et interval rundt om x_0 , så alle funktionsværdier til disse x -værdier ligger inden for intervallet rundt om $f(x_0)$, så er f kontinuert i x_0 .

Hvis det omvendt er sådan, at en tilpas lille afvigelse fra $f(x_0)$ betyder, at selv x -værdierne meget tæt på x_0 har funktionsværdier med større afvigelse til $f(x_0)$, så er f diskontinuert i x_0 .



I mere dagligt sprog, så betyder kontinuert, at når x vokser glidende fra a til b , så vil $f(x)$ forandres glidende fra $f(a)$ til $f(b)$. Det sidste kan godt gå op og ned på vejen fra $f(a)$ til $f(b)$, det centrale er at det sker glidende.

Et eksempel på en funktion, som ikke er kontinuert i ét eneste punkt kan være:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

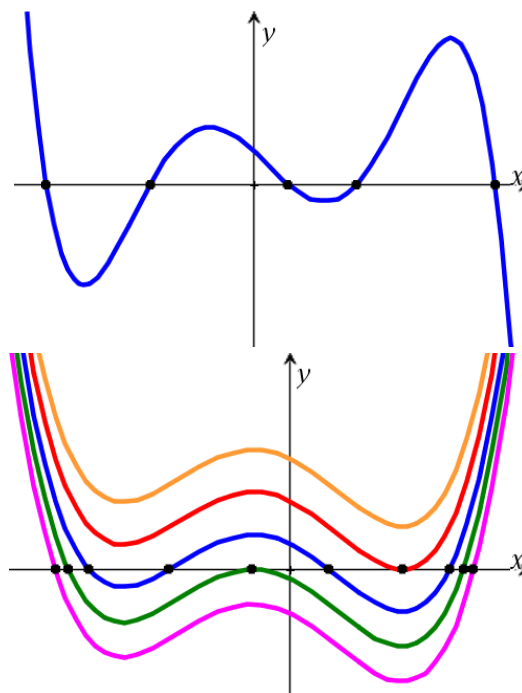
5. Nulpunkter og fortegnsvariation

En x -værdi der for en funktion f har funktionsværdien $f(x) = 0$, kaldes et *nulpunkt* for f .

På tegningen af grafen for f , kan nulpunkterne genkendes som skæringspunkter med førsteaksen. Funktionen til højre har således vist fem nulpunkter.

Alene formen på en graf kan ikke fortælle, hvor mange nulpunkter funktionen har.

På figuren til højre ses fem grafer med samme form, men med ingen nulpunkter (orange), et nulpunkt (rød), to nulpunkter (pink), tre nulpunkter (grøn) og fire nulpunkter (blå).



Fortegn og fortegnsvariation

Hvis en funktion i et interval af x -værdier opfylder, at $f(x) \geq 0$ for alle værdier i intervallet, siger vi at f er *positiv* i intervallet.

Hvis en funktion i et interval af x -værdier opfylder, at $f(x) \leq 0$ for alle værdier i intervallet, siger vi at f er *negativ* i intervallet.

Grafisk er f positiv hvis dens grafen ligger over førsteaksen, og negativ hvis den ligger under.

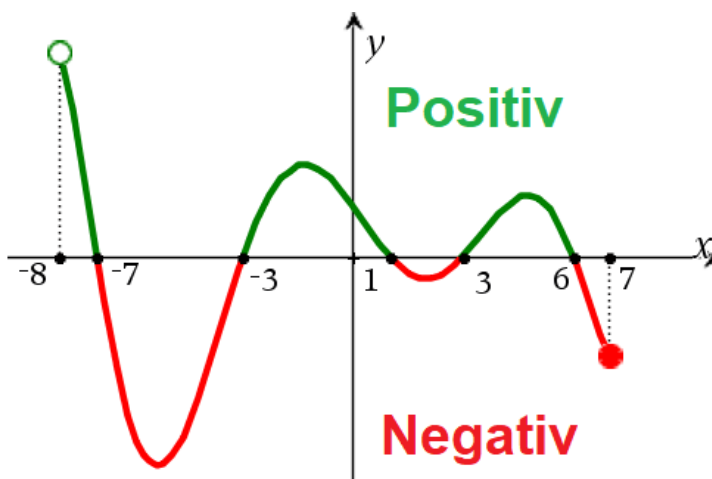
En angivelse af hvor på x -aksen en funktion er henholdsvis positiv og negativ, kaldes for en angivelse af funktionens *fortegnsvariation*.

Til højre ses grafen for en funktion f , med definitionsmængden $D_m(f) =]-8; 7]$.

Det ses at f er positiv for $x \in]-8; -7]$, $x \in [-3; 1]$ og $x \in [3; 6]$.

Endvidere ses at f er negativ for $x \in [-7; -3]$, $x \in [1; 3]$ og $x \in [6; 7]$.

Ovenstående er altså en angivelse af fortegnsvariationen for f .



Bestemmelse af fortegnsvariation

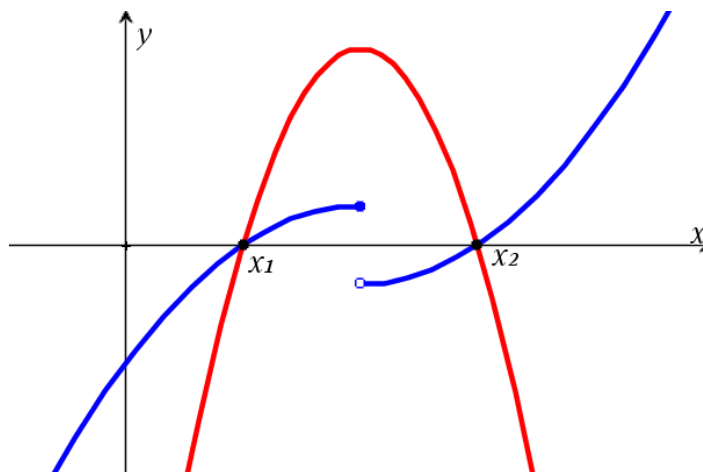
Som udgangspunkt kan fortegnsvariationen for en funktion bestemmes ved at tegne grafen og bestemme hvor grafen ligger over førsteaksen og hvor den ligger under. Ulempen ved denne metode kan være, at hvis funktionen har en uendeligt stor definitionsmængde, så er det ikke sikkert at alle nulpunkter er vist på en tegning. Og derudover kan en tegning have en opløsning som gør, at et nulpunkt ikke kan ses.

Derfor er vi ofte interesseret i at kunne regne os frem til fortegnsvariationen:

Nulpunkterne for f bestemmes ved at løse ligningen $f(x) = 0$. Løsningerne til denne ligning er netop samtlige nulpunkter.

Hvis x_1 og x_2 er nulpunkter for f , og der ingen nulpunkter er i mellem, så må f være enten positiv eller negativ i intervallet $[x_1; x_2]$, såfremt f er kontinuert. For en kontinuert funktion kan ikke skifte fortegn, uden at passere 0. Som vist med den røde graf til højre.

Det kan en funktion med en diskontinuitet derimod godt, som vist med den blå graf på figuren til højre. Derfor er kontinuitet en betingelse for at antage det følgende.



Vi kan bestemme fortegn for f i intervallet $[x_1; x_2]$ blot ved at bestemme en vilkårlig funktionsværdi $f(a)$ for $x_1 < a < x_2$. Funktionen vil i hele intervallet have samme fortegn som $f(a)$.

Hvis x_1 er det mindste nulpunkt for f , ved vi at f har samme fortegn for alle $x < x_1$. Hvis definitionsmængden er alle reelle tal, bestemmes f 's fortegn for $] -\infty; x_1]$ blot som fortegnet for $f(b)$, hvor b er et vilkårligt valgt tal mindre end x_1 .

Hvis x_n tilsvarende er det største nulpunkt, kan f 's fortegn for $x > x_n$ bestemmes. Er $\text{Dm}(f) = \mathbb{R}$, så vil f i $[x_n; \infty[$ have samme fortegn som $f(c)$, hvor c er et vilkårligt tal større end x_n .

Hvis $f(x) = 0$ har løsningerne $x = x_1, x = x_2, \dots, x = x_n$, så bestemmes fortegnsvariationen for f ved at bestemme funktionsværdier for tal mellem alle disse. Mellem to nabo-nulpunkter vil f da have samme fortegn, som funktionsværdien for et vilkårligt tal mellem disse to. Tilsvarende findes fortegn før mindste nulpunkt og efter største nulpunkt ved en funktionsværdi før hhv. efter disse.

Eksempel 5.1

En funktion f er bestemt ved forskriften $f(x) = x^2 - 8x + 12$.

For at bestemme fortegnsvariationen for f , bestemmes først funktionens nulpunkter, ved at løse ligningen $f(x) = 0$.

$$x^2 - 8x + 12 = 0$$

Koefficienter for andengradsligningen aflæses: $a = 1$, $b = -8$ og $c = 12$

Diskriminant beregnes: $d = b^2 - 4ac = (-8)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 12 = 64 - 48 = 16$

Da $d > 0$ har ligningen to løsninger som bestemmes: $x = \frac{-b \pm \sqrt{d}}{2a} = \frac{-(-8) \pm \sqrt{16}}{2 \cdot 1} = \frac{8 \pm 4}{2} = 4 \pm 2$

Løsningen er altså: $x = 2$ eller $x = 6$.

For at bestemme fortegnsvariationen, bestemmes funktionsværdier rundt om nulpunkterne.

Som punkter vælges $x = 0$, $x = 4$ og $x = 10$. Der fås:

$$f(0) = 0^2 - 8 \cdot 0 + 12 = 0 - 0 + 12 = 12$$

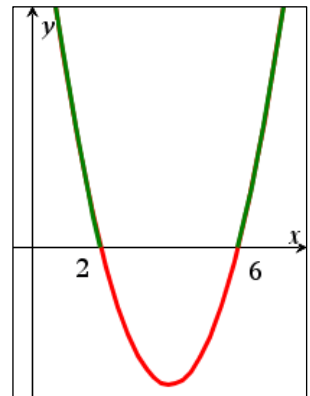
$$f(4) = 4^2 - 8 \cdot 4 + 12 = 16 - 32 + 12 = -4$$

$$f(10) = 10^2 - 8 \cdot 10 + 12 = 100 - 80 + 12 = 32$$

Da $f(0) > 0$, så er f positiv i intervallet $] -\infty; 2]$.

Da $f(4) < 0$, så er f negativ i intervallet $[2; 6]$.

Da $f(10) > 0$, så er f positiv i intervallet $[6; \infty[$.



Funktionen f er altså positiv for $x \in] -\infty; 2]$ og $x \in [6; \infty[$, samt negativ for $x \in [2; 6]$.

Eksempel 5.2

En funktion f er bestemt ved $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 4$

For at bestemme fortegnsvariation, bestemmes nulpunkterne ved at løse $f(x) = 0$ med et CAS-værktøj: Løsningen er $x = 1$ eller $x = 4$. Rundt om undersøges $x = 0$, $x = 2$ og $x = 10$:

$$f(0) = 0^3 - 6 \cdot 0^2 + 9 \cdot 0 - 4 = 0 - 0 + 0 - 4 = -4$$

$$f(2) = 2^3 - 6 \cdot 2^2 + 9 \cdot 2 - 4 = 8 - 24 + 18 - 4 = -2$$

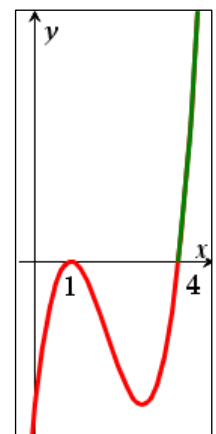
$$f(10) = 10^3 - 6 \cdot 10^2 + 9 \cdot 10 - 4 = 1000 - 600 + 90 - 4 = 486$$

Da $f(0) < 0$ er f negativ i intervallet $] -\infty; 1]$.

Da $f(2) < 0$ er f negativ i intervallet $[1; 4]$.

Da $f(10) > 0$ er f positiv i intervallet $[4; \infty[$

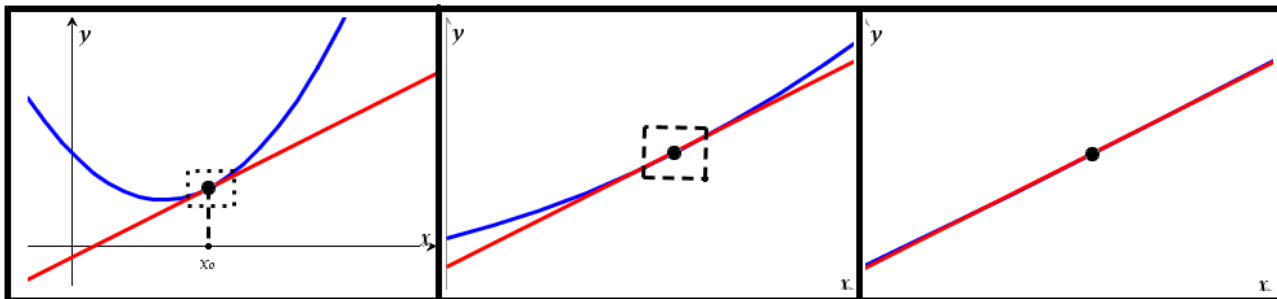
Funktionen f er altså negativ i intervallet $] -\infty; 4]$ og positiv i intervallet $[4; \infty[$.



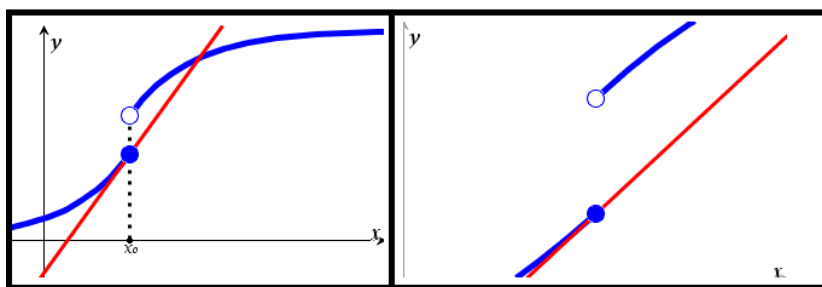
6. Differentiabilitet

Hvis en graf har den egenskab, at den omkring et punkt x_0 ligner en *ret linje*, så kalder vi funktionen ”lokalt lineær”, ”glat” eller mere fagligt *differentiabel* i punktet x_0 .

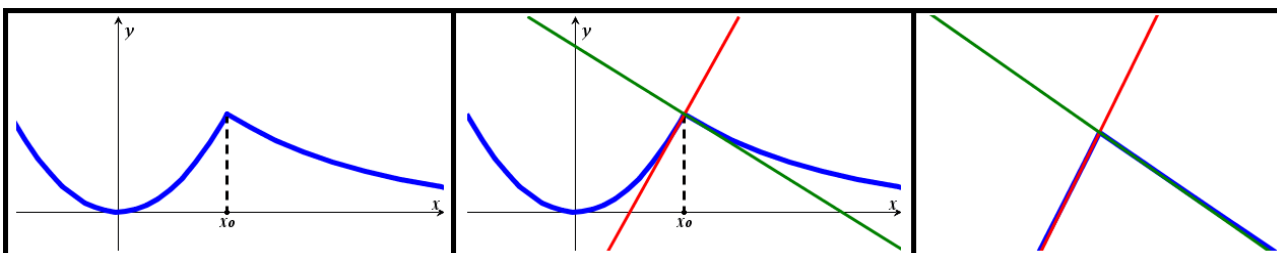
På figuren herunder ses et eksempel på en funktion der er differentiabel i x_0 . Jo mere vi zoomer ind på punktet $(x_0, f(x_0))$ på grafen for f , jo mere kommer grafen til at ligne en ret linje.



Meget oplagt er det nødvendigt at en funktion er kontinuert, for at den kan være differentiabel. På figuren til højre ses, at en diskontinuert funktion ikke kan ligne en ret linje, når man zoomer ind.



En anden ting der er afgørende, er at grafen er ”glat”. Det betyder at den ikke må have en ”skarp kant”, som det f.eks. ses ved punktet $(x_0, f(x_0))$ på nedenstående eksempel. Hvis vi zoomer ind på punktet, så ligner grafen godt nok en ret linje for $x \leq x_0$ og det gælder også for $x \geq x_0$, men det er ikke den samme rette linje den ligner. Det er altså en betingelse for differentiabilitet, at grafen ”på begge sider” af x_0 ligner den samme rette linje.

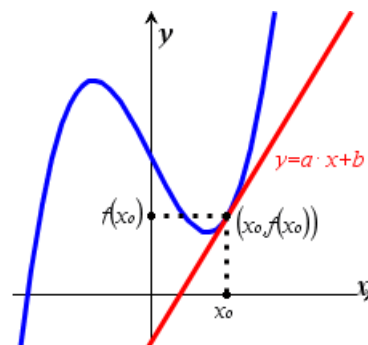


Hvis en graf er kontinuert og uden ”knæk”, det vil sige hvis den er ”glat” alle steder, eller ”lokalt lineær” i betydningen, at den i ethvert punkt ligner en ret linje ”tilpas meget”, hvis blot vi ”zoomer nok ind”, så siger vi at funktionen bag grafen er *differentiabel*.

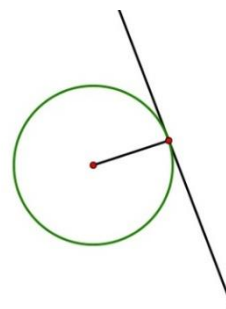
7. Tangent og tangenthældning

En differentiabel funktion ligner som bekendt en ret linje omkring ethvert punkt. Den linje som grafen ligner tæt omkring punktet $P(x_0, f(x_0))$, kalder vi for tangenten til grafen for f , med $P(x_0, f(x_0))$ som *røringspunkt*.

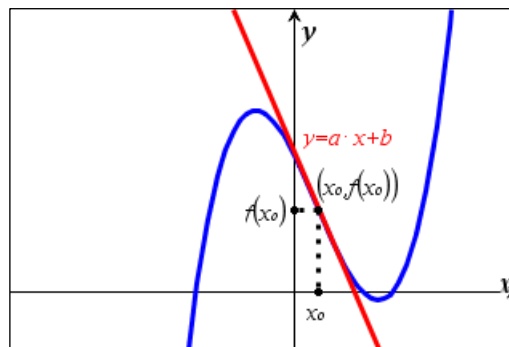
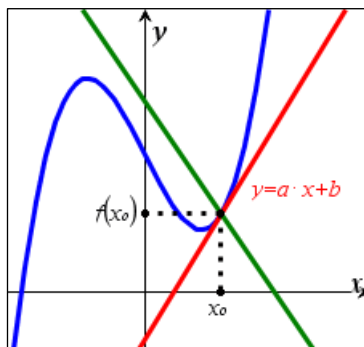
Ideen er vist på figuren til højre, i det det skal bemærkes, at hvert eneste punkt på grafen har sin egen tangent.



Begrebet *tangent* er lånt fra læren om cirkler, hvor en tangent er en ret linje der lige nøjagtigt rører cirklen i ét punkt. Man kan altså tænke på en tangent som en linje, der lige nøjagtigt rører grafen i ét punkt. Men det er ikke en tilstrækkelig betingelse. Som det ses af billedet herunder til venstre, så kan en linje (grøn) godt ramme grafen i netop ét punkt, uden at være tangent.



Heller ikke en formulering om at den "ikke går i gennem grafen" kan bruges, for det findes der tangenter som gør, eksempelvis tangenten vist yderst til højre her.



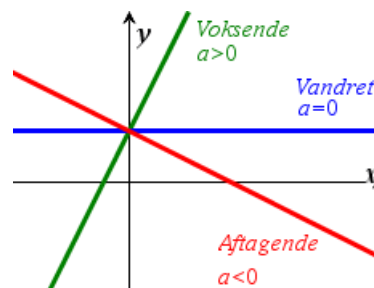
En tangent til en graf, med røringspunkt i x_0 , er altså den linje som lokalt omkring punktet, er stort set sammenfaldende med grafen, og jo tættere vi zoomer ind på punktet, jo mere sammenfaldende bliver graf og linje. Tangenten kan i øvrigt sagtens skære grafen mange andre steder, end i lige røringspunktet.

Tangenthældning

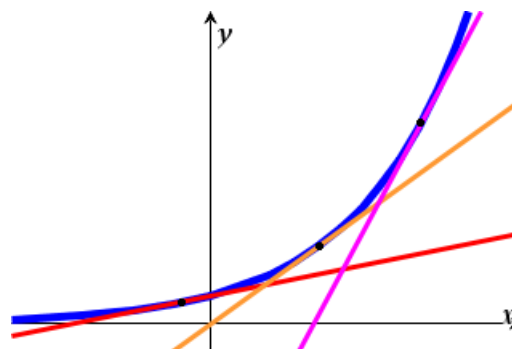
En tangen er en ret linje, og den kan derfor fremstilles ved en ligning på formen

$$y = a \cdot x + b$$

Vi kalder tallet a for linjens hældning. Det betyder at hvis man fra et vilkårligt punkt på linjen lader x vokse med 1, så vil y vokse med a . Jo større a er, jo stejlere vil linjen derfor være. Og hvis a er negativ, vil linjen være aftagende. For $a = 0$ siger vi at linjen er vandret.



Hældningen på en tangent fortæller altså, hvor hurtigt y -værdierne på tangenten ændrer sig, når man bevæger sig langs x -aksen. Da grafen ligner linjen omkring røringspunktet, vil grafens funktionsværdier lige omkring punktet, vokse med samme hastighed som tangentens y -værdier. Men kun lige ved punktet. Så snart man er kommet lidt væk fra røringspunktet, vil tangenthældningen have ændret sig.



Vi kalder derfor hældningen på tangenten med røringspunkt x_0 for funktionens *væksthastighed* i x_0 . Væksthastigheden er således et tal, som fortæller hvor meget funktionsværdierne vokser pr. skridt langs x -aksen. Men da væksthastigheden hele tiden ændrer sig, ændrer stigningstakten i funktionsværdierne sig også hele tiden.

Afledet funktion

Da tangenthældninger for en funktion f er særdeles vigtige for vores analyse af funktionen, giver vi denne størrelse sit eget symbol. Tangenthældningen til punktet x_0 kalder vi $f'(x_0)$. Vi udtaler symbolet ” f -mærke-af- x_0 ”.

Hvis grafen for funktionen f viser sig at have en tangent til punktet $(2, f(2))$, som har en hældning på 7, så vil vi altså skrive: $f'(2) = 7$ (udtalt ” f -mærke-af-2-lig-7”).

Hvis f er differentiabel, har den en tangent til alle punkter på grafen. Dermed vil der for hver eneste x -værdi være en tangenthældning $f'(x)$. Dermed bliver $f'(x)$ i sig selv en funktion, som til hver eneste x -værdi knytter et tal, som netop er hældningen på tangenten til punktet.

En funktion der til hvert x knytter den tilhørende tangenthældning for funktionen f , kalder vi for en *afledet funktion* for f , og betegner altså f' (udtales ” f -mærke”).

Det er en selvstændig disciplin at bestemme $f'(x)$ ud fra $f(x)$. Disciplinen kaldes for *differentialregning*, og vil først blive omtalt senere. Indtil da kan et CAS-værktøj benyttes til dette.

Tangentens ligning

Tangenten til grafen for f med røringspunkt x_0 har altså en ligning $y = a \cdot x + b$.

Det gælder at hældningen er $a = f'(x_0)$ og at $b = y_0 - a \cdot x_0 = f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0$

Dermed fås: $y = f'(x_0) \cdot x + f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0 = f'(x_0) \cdot x - f'(x_0) \cdot x_0 + f(x_0)$.

Ved at sætte $f'(x_0)$ uden for parentes på de første to led fås da formelen for tangentens ligning:

$$y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$$

8. Ekstremumpunkter og monotoniforhold

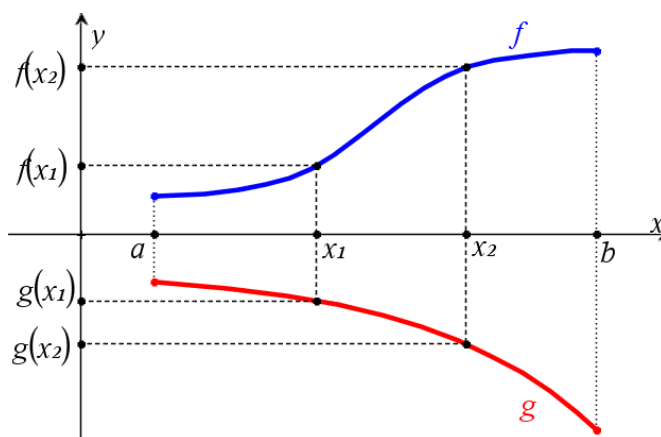
Vi siger at en funktion f er *voksende* i et interval $[a; b]$, hvis vi for to tal x_1 og x_2 valgt vilkårligt i intervallet $[a; b]$ er sikre på, at hvis $x_2 > x_1$, så er $f(x_2) > f(x_1)$.

På tilsvarende vis siger vi, at f er *aftagende* i intervallet $[a; b]$, hvis vi for $x_2 > x_1$ kan være sikre på, at $f(x_2) < f(x_1)$.

Vi siger også at f er voksende hvis y vokser når x vokser, og aftagende hvis y aftager, når x vokser.

På figuren ses at for f er $f(x_2) > f(x_1)$ overalt i intervallet $[a; b]$, så længe $x_2 > x_1$. Derfor er f voksende i $[a; b]$.

Det ses også at for g er $g(x_2) < g(x_1)$ overalt i intervallet, så længe $x_2 > x_1$. Derfor er g aftagende i $[a; b]$.



Mere lavpraktisk kan vi se på tegningen af en graf, at en funktion er voksende, når den fra venstre mod højre (det vil sige i x -aksens retning) går opad. Og den er aftagende, hvis den fra venstre mod højre går nedad.

Generelt vil vi kalde bestemmelse af om en funktion er voksende eller aftagende, for en bestemmelse af funktionens *monotoni*.

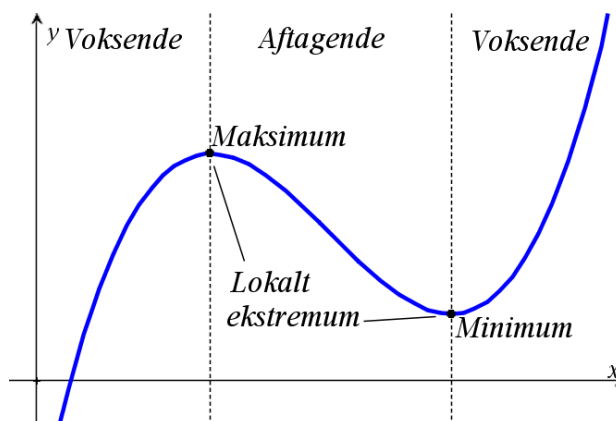
Ekstremumpunkter

Et punkt hvor en funktion skifter monotoni, vil vi kalde for et *lokalt ekstremumpunkt*.

Førstekординaten til punktet kalder vi *ekstremumsstedet*, fordi det er det sted på x -aksen, hvor funktionen har *ekstremum*. Andenkoordinaten vil vi kalde *ekstremumsværdien*.

Et lokalt ekstremumpunkt, hvor en funktion skifter fra voksende til aftagende, kaldes for et *lokalt maksimumspunkt*. Førstekordinaten angiver *maksimumstedet*, anden koordinaten *maksimumværdien*, eller blot *maksimum*.

Tilsvarende kaldes et lokalt ekstremum med skifte fra aftagende til voksende for et *lokalt minimum*.

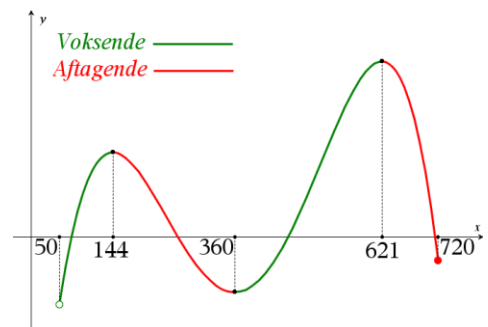


Monotoniforhold

En angivelse af hvor på x -aksen at en funktion er henholdsvis voksende og aftagende, kaldes en angivelse af funktionens monotoniforhold.

Til højre ses grafen for en funktion f med definitionsmængden $D_m(f) =]50; 720]$.

Det ses at f er *voksende* for $x \in]50; 144]$ og $x \in [360; 621]$, samt *aftagende* for $x \in [144; 360]$ og $x \in [621; 720]$.



Dette er altså en angivelse af funktionens monotoniforhold.

Tangenthældning, monotoni og stationært punkt

Da tangenthældningen $f'(x_0)$ angiver væksthastigheden for f i punktet x_0 , må det gælde at:

Hvis $f'(x) > 0$ for alle $x \in [a; b]$, så er f voksende i intervallet.

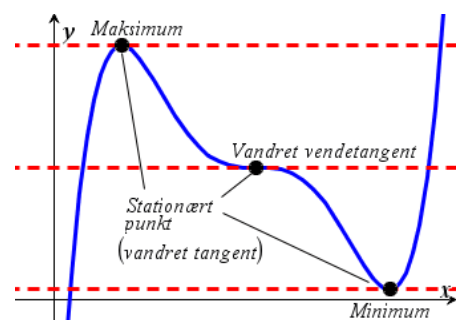
Hvis $f'(x) < 0$ for alle $x \in [a; b]$, så er f aftagende i intervallet.

Tangenthældningens fortegn angiver altså funktionens monotoni. Eller sagt på en anden måde: Fortegnsvariationen for den afledede funktion $f'(x)$ angiver monotoniforholdene for f .

Hvis tangenthældningen er $f'(x_0) = 0$ siger vi, at f har *vandret tangent* i x_0 . Da det svarer til en væksthastighed på 0, kalder vi også punktet for et *stationært punkt*.

For en differentiabel funktion gælder almindeligvis, at den afledede funktion $f'(x)$ også er differentiabel, og dermed kontinuert. Det betyder, at når f i et lokalt ekstremumspunkt skifter monotoni, så skifter f' fortegn. Og for at f' skifter fortegn, skal den passere værdien 0. Og det sker netop ved det lokale ekstremumspunkt. Et stationært punkt er altså et lokalt ekstremumspunkt, hvis f' skifter fortegn henover det. Og omvendt kan f' ikke skifte fortegn, uden at passerer 0, så der kan ikke langs grafen opstå et lokalt ekstremum, uden at der er et stationært punkt.

De stationære punkter for f , svarer altså til nulpunkterne for f' . Der er dog ingen garanti for, at et stationært punkt nødvendigvis er et lokalt ekstremum. Det kræver en yderligere undersøgelse. Hvis et stationært punkt *ikke* er et ekstremum, siger man at funktionen har *vandret vendetangent* i punktet (som også kaldes for et *saddelpunkt*). På figuren til højre er stationære punkter og vandrete tangenter vist.



Bestemmelse af monotoniforhold

Monotoniforholdene for en funktion kan bestemmes dels med et grafisk værktøj, dels ved beregninger. Grafisk kan det bestemmes ved at tegne grafen for funktionen, bestemme maksimum og minimum med indbyggede værktøjer, og ud fra dette kortlægge monotoniforholdene. Det kræver dog at vi ved at alle lokale ekstrema er synlige på den tegnede graf.

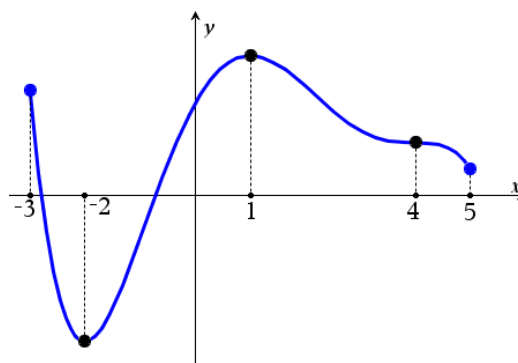
Hvis man kender den afledte funktion $f'(x)$, kan den anvendes til undersøgelsen. De stationære punkter for f bestemmes, ved at bestemme nulpunkter for f' . Dette gøres ved at løse ligningen $f'(x) = 0$. Herefter bestemmes fortegnsvariationen for f' på samme måde, som for f i kapitel 5. Herefter udnyttes, at hvor f' er positiv, er f voksende, og hvor f' er negativ, er f aftagende.

Eksempel 8.1

Funktionen f er bestemt for $-3 \leq x \leq 5$ ved

$$f(x) = -2x^5 + 17,5x^4 - 20x^3 - 160x^2 + 320x + 300$$

Det ses af den grafiske analyse, at f har lokalt minimum ved $x = -2$ og lokalt maksimum ved $x = 1$, samt vandret vendetangt ved $x = 4$. Monotoniforholdene kan således opskrives:



f er aftagende for $x \in [-3; -2]$ og $x \in [1; 5]$ samt voksende for $x \in [-2; 1]$.

Eksempel 8.2

En funktion f er bestemt ved $f(x) = 3x^4 - 16x^3 + 18x^2 + 20$. Først bestemmes funktionens stationære punkter ved med et værktøjsprogram at løses ligningen $f'(x) = 0$.

Løsningerne er: $x = 0$ eller $x = 1$ eller $x = 3$.

Rundt om nulpunkterne for f' vælges $x = -1$, $x = 0,5$, $x = 2$ og $x = 4$.

Med værktøjsprogram fås: $f'(-1) = -96$, $f'(0,5) = 7,5$, $f'(2) = -24$ og $f'(4) = 144$

Da $f'(-1) < 0$ er f' negativ i $] -\infty; 0]$ og dermed er f aftagende.

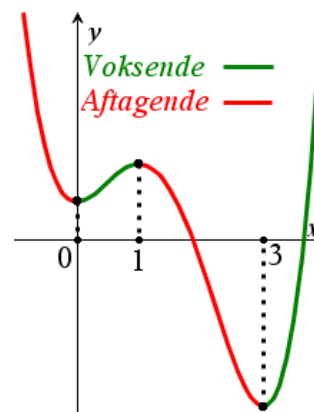
Da $f'(0,5) > 0$ er f' positiv i $[0; 1]$ og dermed er f voksende.

Da $f'(2) < 0$ er f' negativ i $[1; 3]$ og dermed er f aftagende.

Da $f'(4) > 0$ er f' positiv i $[3; \infty[$ og dermed er f voksende.

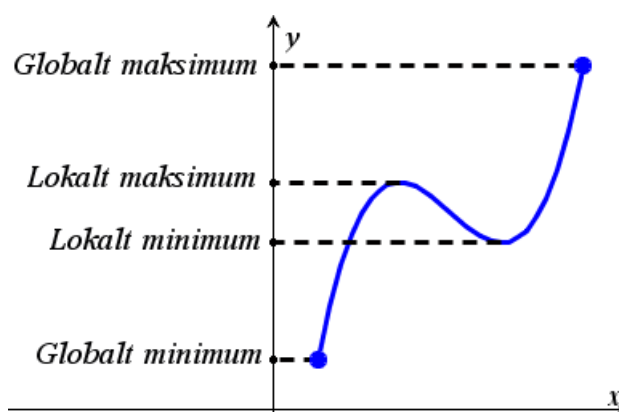
Funktionen f er altså aftagende for $x \in] -\infty; 0]$ og $x \in [1; 3]$, samt voksende for $x \in [0; 1]$ og $x \in [3; \infty[$.

Det bemærkes at f har lokalt minimum i $x = 0$ og $x = 3$, samt lokalt maksimum i $x = 1$.



Globale ekstrema

Ordet lokalt maksimum anvendes om et stationært punkt, hvor f skifter fra voksende til aftagende. Det gør det, fordi det stationære punkts funktionsværdi er den største funktionsværdi i et eller andet område omkring punktet. Det betyder imidlertid ikke, at funktionen ikke andre steder kan have større funktionsværdier. Den største funktionsværdi for hele funktionen, kaldes for dens *globale maksimum*.

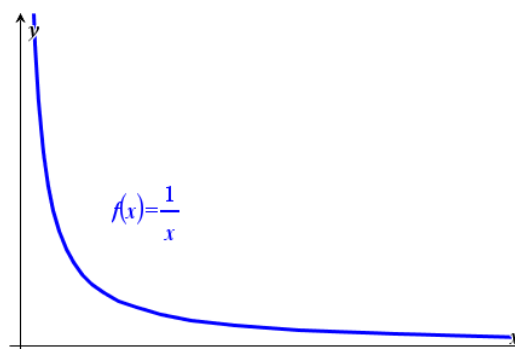


På samme måde gælder, at et lokalt minimum er den mindste funktionsværdi omkring det pågældende område, men at de sagtens kan være mindre. Den mindste funktionsværdi for en funktion, kaldes for dens *globale minimum*.

Ethvert globalt ekstremum er i sagens natur også et lokalt ekstremum. Hvis verdens højeste mand bor i Danmark, så er han samtidig Danmarks højeste mand.

Det er ikke alle funktioner der har et globalt maksimum og/eller minimum. Det kan enten være fordi den indeholder vilkårligt store funktionsværdier (det vil sige at den vokser mod ∞ eller falder mod $-\infty$), eller det kan være fordi den kommer vilkårligt tæt på en øvre eller nedre grænse, uden nogensinde at ramme denne grænse.

Tag eksempelvis funktionen $f(x) = \frac{1}{x}$, hvor $x > 0$. Jo tættere x kommer på 0 (oppe fra), jo større bliver $\frac{1}{x}$. Vi kan faktisk gøre $\frac{1}{x}$ vilkårligt stor, så det er ikke muligt at udpege et *globalt maksimum* for f . Samtidig kan vi ved at lade x vokse sig større og større, få $\frac{1}{x}$ til at komme vilkårligt tæt på 0. Men det bliver aldrig 0. Så 0 er altså ikke funktionens globale minimum, for det er slet ikke en funktionsværdi. Der er altså ingen mindste funktionsværdi.



Har f et globalt minimum a og globalt maksimum b , så er værdimængden $V_m(f) = [a; b]$.

Hvis man skal undersøge en funktion for globale ekstremumpunkter, skal man være særligt opmærksom omkring "huller" i definitionsmængden, samt grænserne for definitionsmængden. Denne note vil dog ikke gå i dybden med sådanne undersøgelser.

9. Vendepunkter og krumningsforhold

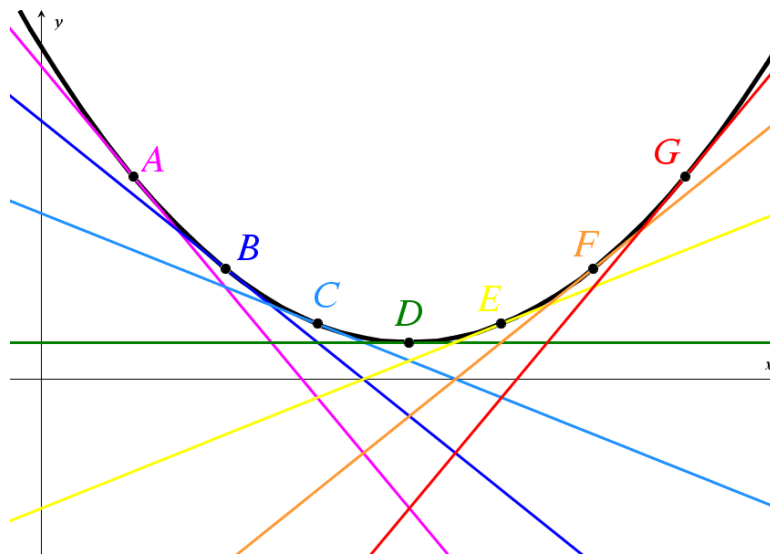
Hvis det om en funktion gælder, at tangenthældningerne til grafen for f er voksende i et interval $[a; b]$, da siges f at være *konveks* i intervallet. Man bruger også begrebet at f *krummer opad*.

Hvis det om en funktion gælder, at tangenthældningerne til grafen for f er aftagende i et interval $[a; b]$, da siges f at være *konkav* i intervallet. Man bruger også begrebet at f *krummer nedad*.

Konveks og konkav

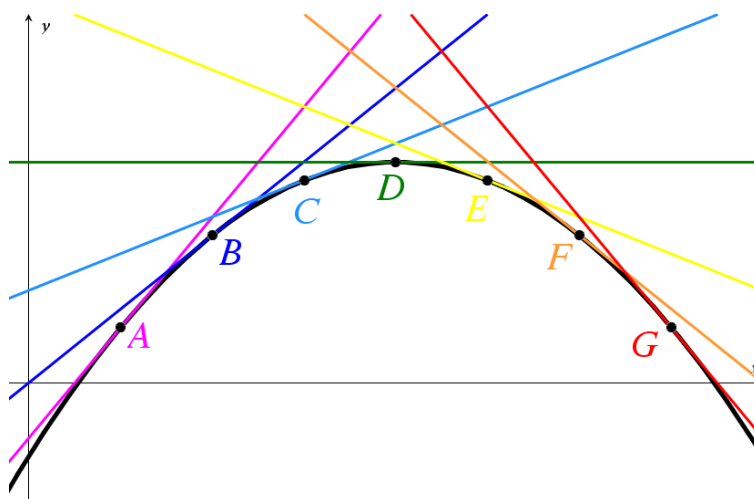
På figuren til højre ses et eksempel på en konveks graf. I punktet A er tangenten stejlt aftagende, mens den bliver mindre og mindre stejl i B og C, og i D får den hældning 0. I E er tangenthældningen blevet positiv, og derpå stejlere og stejlere i F og G.

Vi kan altså se at tangenthældningerne vokser, når x vokser. Det betyder også at alle tangenter befinder sig *under* grafen for f (sort kurve).



På den anden figur ses et eksempel på en konkav graf. I punktet A er tangenten stejlt voksende, mens den bliver mindre og mindre stejl i B og C, og i D får den hældning 0. I E er tangenthældningen blevet negativ, og derpå stejlere og stejlere i F og G.

Vi kan altså se at tangenthældningerne aftager, når x vokser. Det betyder også at alle tangenter befinder sig *over* grafen for f (sort kurve).



Ligesom vi henviser til positiv/negativ som fortegn og voksende/aftagende som monoton, vil vi om konveks/konkav bruge begrebet *krumning*.

En huskeregel for konVeks og konkAv kan være, at **V** "krummer opad" og **A** "krummer nedad".

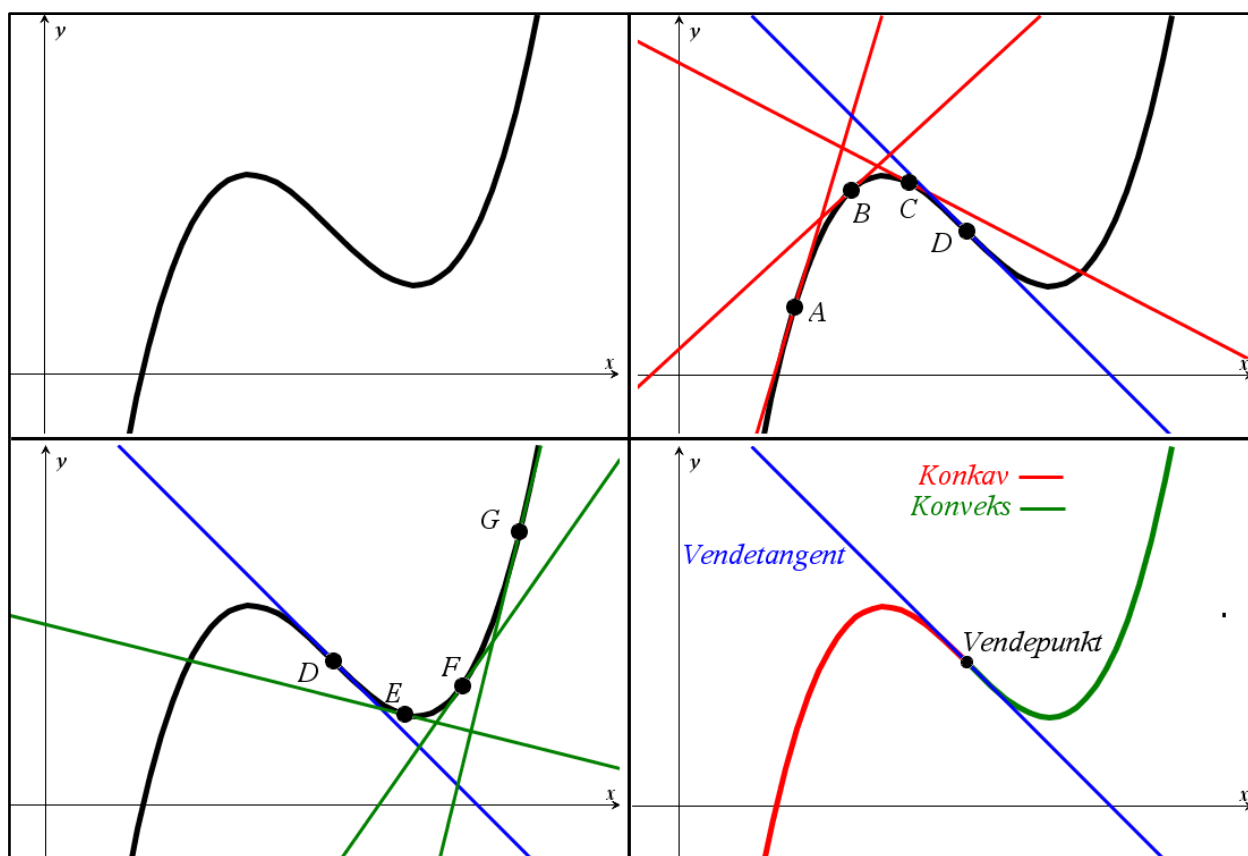
Vendepunkt

På figuren herunder ses grafen for en funktion. Følger vi tangenthældningerne i punkterne A, B, C og D, ses det at de aftager. Samt at tangenterne ligger over grafen. For tangenten i punktet D, gælder sidstnævnte dog kun for den halvdel af tangenten, der ligger på samme side som A, B og C. Udviklingen viser, at f er konkav i dette område af x -aksen.

Følger man tangenthældningerne i punkterne D, E, F og G, ses det at de vokser, samt at tangenterne på denne side af D, ligger under grafen. Dette viser at f er konveks i dette område af x -aksen.

Eksemplet viser, at funktionen skifter krumning ved punktet D. I det konkrete tilfælde fra konkav til konveks, fordi tangenthældningerne skifter fra aftagende til voksende. Vi kalder derfor punktet D for et *vendepunkt*, og tangenten til grafen for f med D som røringsspunkt for en *vendetangent*.

Hvis D tillige havde været et stationært punkt, det vil sige med vandret tangent, ville vi have talt om en vandret vendetangent.



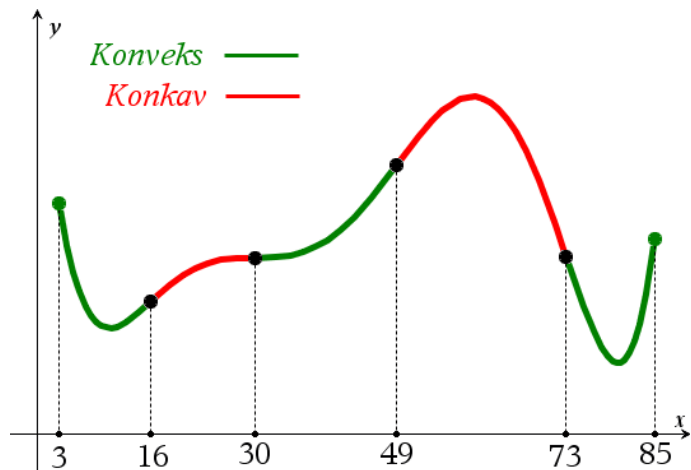
På engelsk kaldes ”vendepunkt” for ”point of inflection”, som direkte oversat betyder ”bøjningspunkt”. Til gengæld bruges det engelske ord ”turning point” (som direkte oversat betyder ”vendepunkt”) om punkter hvor tangenthældninger skifter fra positiv til negativ - altså det vi på dansk kalder *ekstremumspunkt*. Stationært punkt hedder på engelsk ”stationary point”.

Krumningsforhold

En angivelse af hvor på x -aksen at en funktion f er konveks hhv. konkav, kaldes en angivelse af funktionens krumningsforhold.

På figuren til højre ses en funktion f , med definitionsmængde $\text{Dm}(f) = [3; 85]$.

På grafen er markeret funktionens fire vendepunkter, og ud fra dette aflæses krumningsforholdene til at være:



Funktionen f er konveks for $x \in [3; 16]$ og $x \in [30; 49]$ og $x \in [73; 85]$, samt konkav for $x \in [16; 30]$ og $x \in [49; 73]$.

Dobbelt-afledet funktion

Som sagt er f konveks i et interval $[a; b]$, hvis tangenthældningerne vokser i intervallet. Det vil sige hvis $f'(x)$ er voksende i intervallet $[a; b]$. Men at f' er voksende, betyder at den afledede funktion til f' er positiv. Da den afledede funktion til f' er "den afledede til den afledede for f ", kaldes denne "den dobbelt-afledede af f " og betegnes f'' (udtales "f-dobbeltmærke").

Da der tilsvarende gælder at f er konkav i $[a; b]$, hvis f' er aftagende i intervallet, så gælder at den dobbelt-afledede skal være negativ. Sammenfattende ved vi altså:

Hvis $f''(x) > 0$ for alle $x \in [a; b]$, så er f konveks i intervallet.

Hvis $f''(x) < 0$ for alle $x \in [a; b]$, så er f konkav i intervallet.

Vi kan således se, at fortegnsvariationen for f'' angiver krumningsforholdene for f .

Hvis f er differentiabel, kan vi almindeligvis regne med at det samme gælder for f' og f'' , som således også begge er kontinuerte.

Det er altså kun muligt for f'' at skifte fortegn, hvis funktionsværdierne passerer 0. Dermed kan f altså kun skifte krumning, hvis den passerer et nulpunkt for f'' . Vi kan altså bestemme de mulige vendepunkter for f , ved at bestemme nulpunkterne for f'' . Det gøres ved at løse $f''(x) = 0$.

Bemærk at f'' godt kan have et nulpunkt, uden at f har et vendepunkt. Det kræver at der sker et fortegnsskifte henover nulpunktet for f'' , før man ved at der er et vendepunkt.

Bestemmelse af krumningsforhold

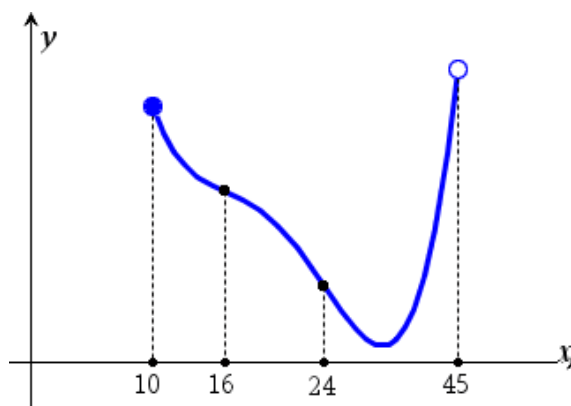
Krumningsforhold kan bestemmes dels med et grafisk værktøj dels ved beregninger. Grafisk kan det bestemmes ved at tegne grafen for f , og med et indbygget værktøj bestemme vendepunkterne. Herefter kan man ved at se på grafen, opskrive krumningsforholdene. Det kræver at man kan være sikker på, at alle vendepunkter er synlige på grafen.

Krumningsforhold kan også beregnes, hvis man kender $f''(x)$. De mulige vendepunkter kan bestemmes ved at løse ligningen $f''(x) = 0$, og herefter kan krumningsforholdene bestemmes, ved at bestemmes fortegnsvariationen for f'' (på samme måde, som det skete for f i kapitel 5) og udnytte, at hvis f'' er positiv, så er f konveks, og hvis f'' er negativ, så er f konkav.

Eksempel 9.1

For en funktion f med $\text{Dm}(f) = [10; 45[$ er grafen tegnet med et grafisk værktøj, som vist til højre. Og grafens to vendepunkter er bestemt til at ligge ved $x = 16$ og $x = 24$. Ved at se på krumningen på grafen, aflæses krumningsforholdene til:

f er konveks for $x \in [10; 16]$ og $x \in [24; 45[$, samt konkav for $x \in [16; 24]$.



Eksempel 9.2

En funktion f er bestemt ved forskriften

$$f(x) = x^4 - 14x^3 + 60x^2 - 96x + 156.$$

For at bestemme mulige vendepunkter, løses med et værktøjsprogram ligningen $f''(x) = 0$. Løsninger er: $x = 2$ eller $x = 5$.

Rundt om disse nulpunkter undersøges fortegn for f'' , ved at bestemme f'' -værdier for $x = 0$, $x = 4$ og $x = 6$:

$$f''(0) = 120$$

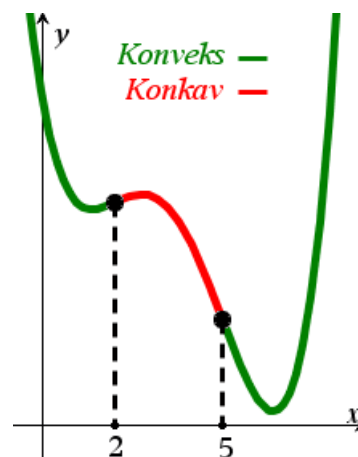
$$f''(4) = -24$$

$$f''(6) = 48$$

Da $f''(0) > 0$, så er f konveks i $] -\infty; 2]$, da $f''(4) < 0$, så er f konkav i $[2; 5]$ og da $f''(6) > 0$, så er f konveks i $[5; \infty[$.

Krumningsforholdene for f er altså bestemt til:

f er konveks for $x \in] -\infty; 2]$ og $x \in [5; \infty[$ samt konkav for $x \in [2; 5]$.

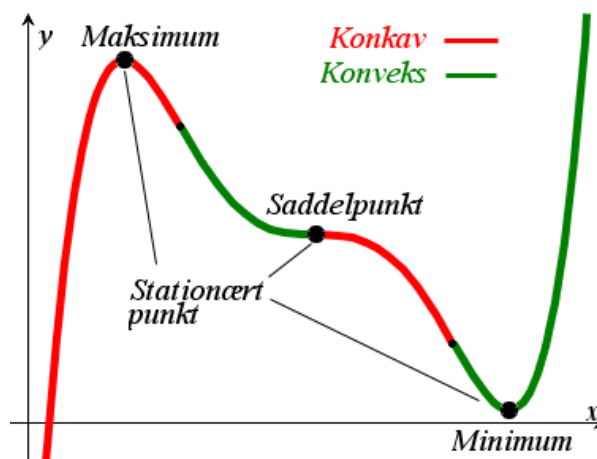


Bestemmelse af arten for stationære punkter

Et punkt på grafen for f med tangenthældning 0, det vil sige et punkt der opfylder at $f'(x) = 0$, kaldes som sagt for et *stationært punkt*. Det er tidligere vist, at et sådan punkt kan være af tre forskellige arter. Det kan være et *lokalt maksimum*, et *lokalt minimum* eller et *saddelpunkt*.

En konkav graf er kendetegnet ved, at tangenthældningerne aftager, det vil sige at f' er aftagende. I et stationært punkt på en konkav graf, det vil sige at $f''(x) < 0$, må der have gjaldt $f'(x) > 0$ lige før punktet, og $f'(x) < 0$ lige efter. I det stationære punkt skifter f' altså fra positiv til negativ, og dermed f fra voksende til aftagende og dermed er punktets art, at det er et lokalt maksimum.

På samme måde må f' i et stationært punkt på en konveks graf skifte fra positiv til negativ, hvorfor punktets art må være et lokalt minimum.



Hvis et stationært punkt er et vendepunkt, hvor f'' skifter fortegn, så vil f' skifte monotoni i punktet. Det betyder at f' har samme fortegn på begge sider af det stationære punkt. I så fald vil arten af det stationære punkt være et saddelpunkt. Det er imidlertid ikke nok at $f''(x) = 0$, for at konstatere at der er et vendepunkt. Det kræver også at f'' skifter fortegn i punktet. Vi kan således nu sige følgende om arten af et stationært punkt:

Hvis $f'(x_0) = 0$ og $f''(x_0) < 0$, så er det stationære punkt for f i x_0 af arten: *lokalt maksimum*

Hvis $f'(x_0) = 0$ og $f''(x_0) > 0$, så er det stationære punkt for f i x_0 af arten: *lokalt minimum*

Hvis $f'(x_0) = 0$ og $f''(x_0) = 0$, og $f''(x_0)$ skifter fortegn i x_0 , så er det stationære punkt for f i x_0 af arten: Saddelpunkt. Skifter f'' ikke fortegn i x_0 , er arten ubestemt.

Eksempel 9.3

For funktionen $f(x) = x^3 - 3x + 2$ fås som løsning til $f'(x) = 0$ at $x = -1$ eller $x = 1$. Endvidere fås at $f''(-1) = -6$, hvorfor f har lokalt maksimum ved $x = -1$, og $f''(1) = 6$, hvorfor f har lokalt minimum ved $x = 1$. Dermed kan monotoniforholdene for f opskrives: f er voksende for $x \in]-\infty; -1]$ og $x \in [1; \infty[$ samt aftagende for $x \in [-1; 1]$.

Eksempel 9.4

For funktionen $f(x) = x^4$ fås at $f'(0) = 0$ og $f''(0) = 0$. Men da $f''(-1) = 12$ og $f''(1) = 12$, skifter f'' ikke fortegn. Arten af $x = 0$ er altså ubestemt. En undersøgelse af krumningsforholdene vil dog vise, at f er konveks alle steder. Således vil vi kunne se, at $x = 0$ er lokalt minimum.

10. Funktioner og modeller

Når vi benytter matematiske strukturer, eksempelvis en funktion, til at beskrive forhold uden for matematikken selv, taler vi om at vi bruger strukturen som en *matematisk model*. En matematisk model er altså et stykke matematik, som vi forsøger at bruge til at beskrive forhold og sammenhænge i ”virkeligheden” med.

Når vi bruger funktioner som matematiske modeller, er det altså som regel et forsøg på at beskrive hvordan to kvantitative størrelser afhænger af hinanden. Vi lader da den uafhængige variabel x repræsentere den ene størrelse, mens den afhængige variabel $f(x)$ repræsenterer den anden.

Modellen er således en påstand om, at den størrelse der repræsenteres af $f(x)$ rent faktisk ”afhænger” af den størrelse der repræsenteres af x . Således må vi forlange af virkeligheden, at der til én værdi af x hører netop én værdi af $f(x)$.

Her vil vi ikke interessere os for hvor modeller kommer fra, men alene hvordan vi bruger dem til at udtale os om virkeligheden. Som udgangspunkt sker modelanvendelse i tre skridt.

Først en *matematisering* hvor et ”virkelighedsspørgsmål” oversættes til et ”matematikspørgsmål” der kan stilles til modellen. Så en *matematisk analyse*, hvor der findes et ”matematiksvar” på ”matematikspørgsmålet”. Og til sidst en *fortolkning*, hvor ”matematiksvarret” oversættes til et ”virkelighedssvar” på ”virkelighedsspørgsmålet”.

De spørgsmål vi kan svare på er eksempelvis hvad bliver den afhængige størrelse, når den uafhængige antager en bestemt værdi a . Matematikspørgsmålet bliver da at bestemme funktionsværdien $f(a)$ ved hjælp af den funktion, som udgør modellen.

Det kan også være, at vi ønsker at vide for hvilke værdier af den uafhængige størrelse, at vi kan forvente den afhængige størrelse antager en bestemt værdi b . Matematikspørgsmålet bliver da at løses ligningen $f(x) = b$.

Også spørgsmål om hvad den største eller mindste værdi for den afhængige størrelse er kan besvares, ved at undersøge matematiske spørgsmål om at bestemme ekstrema for funktionen.

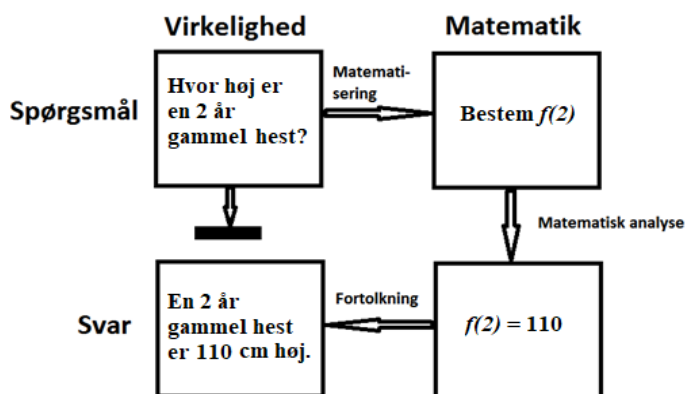
Et særligt type spørgsmål er spørgsmål om væksthastigheden for den afhængige størrelse. Det kan f.eks. være for en bestemt værdi af den uafhængige størrelse a , som kan oversættes til matematikspørgsmålet bestem $f'(a)$. Eller bestemmelse af for hvilke værdier af den uafhængige størrelse at væksthastigheden er b , som kan findes ved at løse ligningen $f'(x) = b$.

Endeligt kan største eller mindste væksthastighed findes som et vendepunkt hvor der skiftes fra konveks til konkav, eller omvendt.

Eksempel 10.1

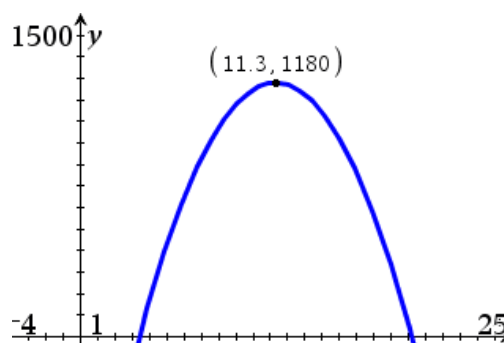
I en model beskrives sammenhængen mellem alderen x (målt i år) og højden $f(x)$ (målt i cm) for en bestemt hesterace.

Højden på en 2 år gammel hest kan da matematisk beskrives til matematikspørgsmålet ”bestem $f(2)$ ”, hvis svar derpå kan fortolkes tilbage til et virkelighedssvar på spørgsmålet.



Eksempel 10.2

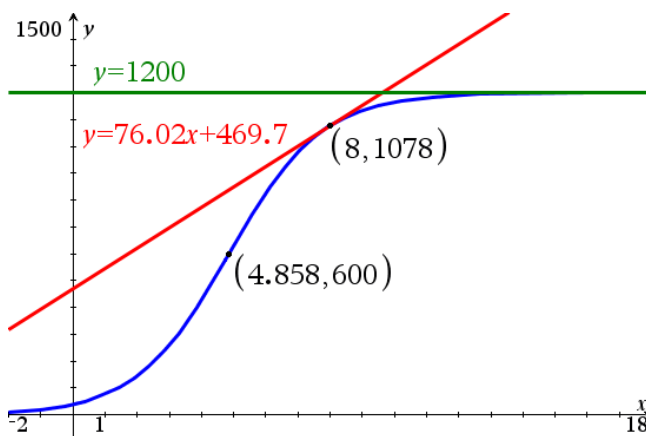
I en model beskrives den mulige omsætning $f(x)$ (målt i mio. kr.) for en bestemt vare på markedet, som afhængig af prisen på varen x (målt i kr. pr. kg.). Modellen er funktionen $f(x) = -18,9x^2 + 427,1 \cdot x + 1233,8$. Spørgsmålet om for hvilken pris omsætningen bliver størst, besvares ved at bestemme maksimumspunktet for f . Det ses at være $(11,3, 1180)$, som fortolkes til at for en pris på 11,3 kr. pr. kg., fås den størst mulige omsætning på 1180 mio. kr.



Eksempel 10.3

I en model beskrives udviklingen i antal smittede $f(x)$ under en bestemt epidemi som funktion af tiden x (målt i antal uger efter udbruddet), ved funktionen $f(x) = \frac{1200}{1+29 \cdot 2^{-x}}$.

Ved at analysere på funktionen kan vi se forskellige træk ved udviklingen. Eksempelvis ser det klart ud som om, at antallet af smittede vokser op til 1200, men der stopper.

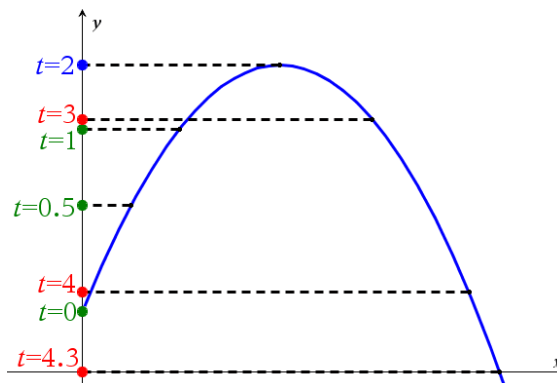


Det ses også at tangenten til grafen for f med røringspunkt $P(8, f(8))$ har hældning $f'(8) = 76,0$. Det betyder at præcis 8 uger efter epidemiens udbrud vokser antallet af smittede med 76 personer pr. uge. Bemærk at enheden på væksthastigheden altid er ”enhed på y pr. enhed på x ”.

Endeligt ses der at være et vendepunkt ved $x = 4,86$. Før dette er grafen konveks (voksende væksthastighed) og efter er den konkav (aftagende væksthastighed). Væksthastigheden er altså størst efter ca. 4,9 uger, når der er 600 smittede (halvdelen af den slutværdi der vokses op imod).

Kinematiske modeller

En særlig vigtig type matematisk model, er modeller der beskriver bevægelse af et punkt. En sådan bevægelse kan beskrives ved en *stedsfunktion* $s(t)$, hvor s angiver positionen af et punkt P på en talakse, repræsenteret ved andenaksen, til tidspunktet t , repræsenteret ved førsteaksen.



På figuren er dette illustreret ved et punkt der fra tiden $t = 0$ og frem til $t = 2$ bevæger sig opad langs andenaksen, mens det fra $t = 2$ og frem bevæger sig nedad (i det det for $t = 4,3$ rammer førsteaksen, hvor bevægelsen måske stopper). Værdierne på andenaksen (som ikke kan ses her), angiver positionen i forhold til $y = 0$. Bevægelsen behøver ikke være lodret op/ned. Det eneste krav til den er, at den foregår via en ret linje. Bemærk at fortegnet på $s(t)$ angiver på hvilken side af $y = 0$ punktet befinder sig, mens den numeriske værdi $|s(t)|$ angiver afstanden til $y = 0$.

Den afledede funktion $s'(t)$ vil vi kalde *hastighedsfunktionen*, fordi den angiver hastigheden af punktet til tidspunktet t . Vi vil også betegne denne $v(t) = s'(t)$ (hvor v kommer af det engelske ord for hastighed: *velocity*). Hastigheden svarer altså til tangenthældningen på grafen, og det ses at hastighed har fortegn, afhængigt af om y -værdierne vokser eller aftager. En hastighed er altså ikke bare en størrelse, men også en retning. Den numeriske værdi af hastigheden, $|v(t)|$, kalder vi for punktets *fart*. Farten er altså størrelsen på hastigheden, men indeholder ikke information om retningen på bevægelsen.

Endeligt vil vi kalde $s''(t)$ for *accelerationsfunktionen*, fordi den angiver ændringen i hastigheden til tidspunktet t . En bil der "accelererer" er netop kendetegnet ved, at dens fart vokser, mens en aftagende fart i hverdagssprog ofte kaldes "deceleration". Her taler vi dog kun om acceleration, som til gengæld har et fortegn. Vi vil også betegne accelerationsfunktionen med $a(t) = v'(t) = s''(t)$.

Eksempel 10.3

Et punkt P bevæger sig som beskrevet ved stedsfunktionen $s(t) = t^3 - 9t^2 + 15 \cdot t$, $t \geq 0$.

Det ses at til tidspunktet $t = 3$ er P 's position $s(3) = -9$, mens det for $t = 8$ er $s(8) = 56$.

Det ses også at til tidspunktet $t = 3$ er hastigheden $v(3) = s'(3) = -12$, mens farten er $|v(3)| = |-12| = 12$. Endeligt ses, at til tidspunktet $t = 4$ er accelerationen $a(4) = s''(4) = 6$.

De stationære punkter bestemmes ved at løse $s'(t) = 0$ til $t = 1$ og $t = 5$, og det kan afgøres at deres art er hhv. lokalt maksimum og lokalt minimum. Det ses altså at punktet P skifter retning i sin bevægelse disse to steder.

11. Regning med funktioner

Vi kan regne med funktioner på samme måde, som vi kan regne med tal. Det er altså muligt at anvende de fire almindelige regnearter på funktioner, samt regnearter der knytter sig specifikt til funktioner.

Almindelige regning med funktioner

Lad $f(x)$ være givet som summen af funktionerne $g(x)$ og $h(x)$.

Det vil sige: $f(x) = g(x) + h(x)$

Hvis der gælder $g(a) = b$ og $h(a) = c$, så er $f(a) = b + c$.

På samme måde defineres differens mellem funktioner: $f(x) = g(x) - h(x)$

Multiplikation af funktioner: $f(x) = g(x) \cdot h(x)$

Division af funktioner, når $h(x) \neq 0$: $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$

I almindelighed kan forskriften for f bestemmes, ved almindelig bogstavregning.

Eksempel 11.1

Lad $g(x) = x^2 + 5$ og $h(x) = 5x - 2$, samt $f(x) = g(x) + h(x)$.

Da $g(6) = 41$ og $h(6) = 28$, fås at $f(6) = g(6) + h(6) = 41 + 28 = 69$

Forskriften for f bestemmes: $f(x) = (x^2 + 5) + (5x - 2) = x^2 + 5 + 5x - 2 = x^2 + 5x + 3$

Herefter kan udregnes: $f(6) = 6^2 + 5 \cdot 6 + 3 = 36 + 30 + 3 = 69$.

Eksempel 11.2

Lad $g(x) = 4x^2 + 5$ og $h(x) = 3x^2 - 5x$, samt $f(x) = g(x) - h(x)$

Da $g(2) = 21$ og $h(2) = 2$, fås at $f(2) = g(2) - h(2) = 21 - 2 = 19$

Forskriften for f bestemmes:

$$f(x) = (4x^2 + 5) - (3x^2 - 5x) = 4x^2 + 5 - 3x^2 + 5x = x^2 + 5x + 5$$

Herefter kan udregnes: $f(2) = 2^2 + 5 \cdot 2 + 5 = 4 + 10 + 5 = 19$

Eksempel 11.3

Lad $g(x) = x^2 + 4$ og $h(x) = 2x - 5$, samt $f(x) = g(x) \cdot h(x)$

Da $g(1) = 5$ og $h(1) = -3$ fås $f(1) = g(1) \cdot h(1) = 5 \cdot (-3) = -15$

Forskriften for f bestemmes: $f(x) = (x^2 + 4)(2x - 5) = 2x^3 - 5x^2 + 8x - 20$

Herefter kan udregnes: $f(1) = 2 \cdot 1^3 - 5 \cdot 1^2 + 8 \cdot 1 - 20 = 2 - 5 + 8 - 20 = -15$

Sammensætning af funktioner

Lad $g(x)$ være en funktion med værdimængden $Vm(g)$ og $h(x)$ være en funktion med definitionsmængden $Dm(h)$.

Hvis $Vm(g)$ er en delmængde af $Dm(h)$, så kan man sammensætte de to funktioner til en ny funktion $f(x)$. Det vil sige:

$$f(x) = h(g(x)).$$

En funktionsværdi for f kan udregnes ved at indsætte x -værdien i g , og derpå dens funktionsværdi $g(x)$ i h . Funktionsværdien af $g(x)$ i h , bliver da til funktionsværdien af x i f .

En forskrift for f kan fås, ved at indsætte forskriften for g på x 'ets plads i forskriften for f , og derpå bør man reducere det fremkomne udtryk mest muligt.

I $f(x) = h(g(x))$ vil vi kalde $g(x)$ for den indre funktion og $h(x)$ den ydre funktion.

Hvis $Vm(h)$ også er en delmængde af $Dm(g)$, så kan de to funktioner også sammensættes omvendt, med g som ydre funktion og h som indre funktion. Det vil sige: $f(x) = g(h(x))$.

I almindelighed vil der næsten altid gælde at $g(h(x))$ ikke er det samme som $h(g(x))$.

Eksempel 11.4

Lad $g(x) = 2^x + 3$ og $h(x) = 5x - 10$, samt $f(x) = g(h(x))$.

$f(3)$ kan da udregnes som $g(h(3))$:

$$h(3) = 5 \cdot 3 - 10 = 15 - 10 = 5$$

$$g(h(3)) = g(5) = 2^5 + 3 = 32 + 3 = 35$$

En forskrift for f kan også bestemmes:

$$f(x) = g(h(x)) = 2^{5x-10} + 3$$

Eksempel 11.5

Lad $g(x) = x^2 + 3$ og $h(x) = 3x - 3$.

$$f_1(x) = g(h(x)) = (3x - 3)^2 + 3 = 9x^2 + 3^2 - 2 \cdot 3 \cdot 3x + 3 = 9x^2 - 18x + 12$$

$$f_2(x) = h(g(x)) = 3 \cdot (x^2 + 3) - 3 = 3x^2 + 9 - 3 = 3x^2 + 6$$

Her vises at $f_1(x)$ og $f_2(x)$ ikke har samme forskrift. Rækkefølge af sammensætning gør en forskel.

Inversfunktion

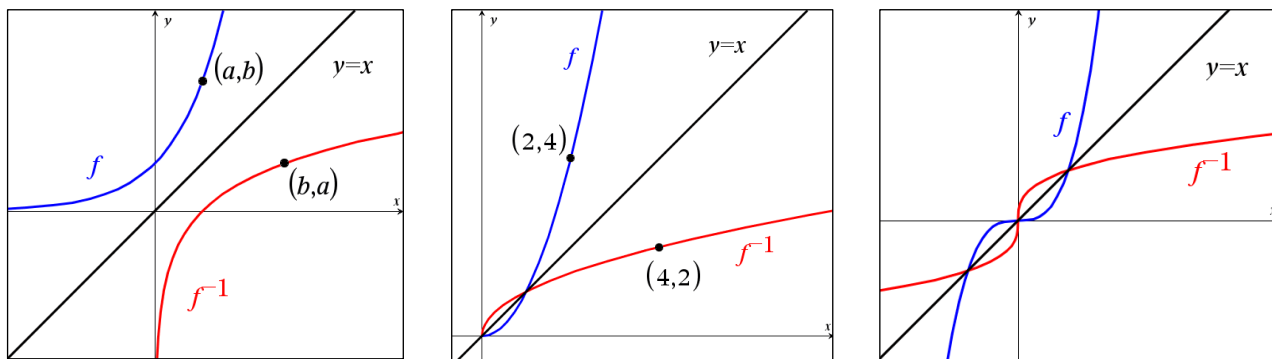
Hvis f er en injektiv funktion med definitionsmængde $\text{Dm}(f)$ og værdimængde $\text{Vm}(f)$, så findes der en inversfunktion til f , som ofte får navnet $f^{-1}(x)$.

Hvis der for f gælder at $f(a) = b$, så vil der for inversfunktionen f^{-1} gælde at $f^{-1}(b) = a$.

En inversfunktion returnerer altså funktionsværdierne i f , til den x -værdi de var funktionsværdi af.

Hvis punktet (a, b) ligger på grafen for f , så vil punktet (b, a) altså ligge på grafen for f^{-1} . Dette betyder at grafen for f^{-1} vil fremstå som en spejling af grafen for f , gennem linjen $y = x$.

Herunder ses tre eksempler på grafer for en injektiv funktion f , samt grafen for dens omvendte funktion f^{-1} . Det ses at de to grafer er spejlinger af hinanden i netop linjen $y = x$. Det ses at hvis punktet (a, b) ligger på grafen for f , ligger (b, a) på grafen for f^{-1} .



Sammensættes f og f^{-1} fås: $f(f^{-1}(x)) = x$.

Endvidere gælder at f er inversfunktion til f^{-1} , så der gælder også: $f^{-1}(f(x)) = x$

En forskrift for f^{-1} kan bestemmes ved at isolere x i udtrykket $y = f(x)$. Det opnåede udtryk bliver da $x = f^{-1}(y)$. Herefter ombyttes blot x og y , så inversfunktionen får formen $y = f^{-1}(x)$.

Eksempel 11.6

Funktionen $f(x) = x^2$ er ikke injektiv, derfor har f ikke en inversfunktion.

Hvis vi afgrænser definitionsmængden, så $x \geq 0$, så bliver f dog injektiv.

Da har f inversfunktionen $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$

Sættes de sammen fås: $f(f^{-1}(x)) = \sqrt{x}^2 = x$

Eller i omvendt rækkefølge: $f^{-1}(f(x)) = \sqrt{x^2} = x$

Eksempel 11.7

En funktion f har inversfunktionen f^{-1} . Hvis $f(3) = 7$, så er $f^{-1}(7) = 3$.

Eksempel 11.8

En funktion f er bestemt ved $f(x) = x^3 + 4$.

Forskrift for $f^{-1}(x)$ bestemmes. Først opskrives på formen $f(x) = y$ og x isoleres:

$$x^3 + 4 = y$$

$$x^3 = y - 4$$

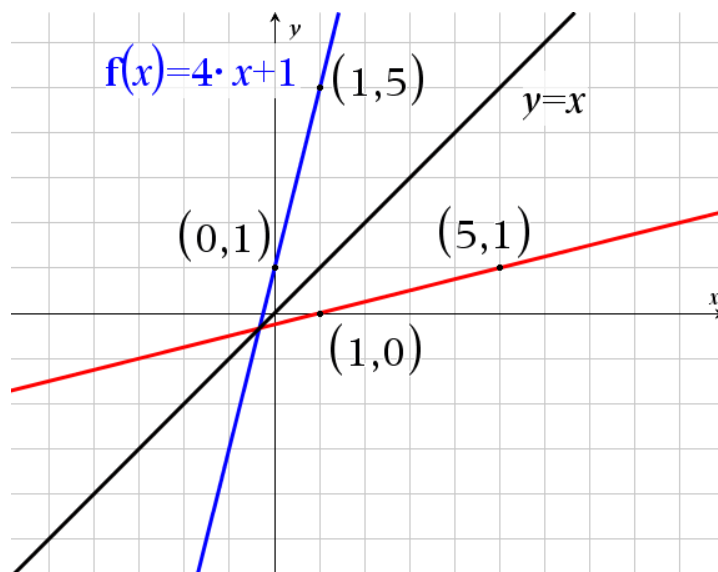
$$x = \sqrt[3]{y - 4}$$

Derpå ombyttes x og y og forskriften opskrives:

$$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x - 4}$$

Eksempel 11.9

En funktion er bestemt ved $f(x) = 4x + 1$. Det oplyses at $g(x)$ er inversfunktion til f . For at tegne grafen for f og g , tegnes først grafen for f som linjen gennem $(0,1)$, med hældning 4. Det ses endvidere at også punktet $(1,5)$ ligger på grafen for f . Heraf vides, at på grafen for g må punkterne $(1,0)$ og $(5,1)$ ligge. Disse to punkter indtegnes, og grafen for g tegnes som den rette linje gennem disse to punkter. Det kan vises generelt, at for $f(x) = a \cdot x + b$ fås $f^{-1}(x) = \frac{1}{a} \cdot x - \frac{b}{a}$.



12. Afledet funktion uden CAS-værktøj

Hidtil har det været overladt til et CAS-værktøj at bestemme afledede funktioner ud fra en forskrift. I dette kapitel vil det blive præsenteret hvordan man bestemmer afledede funktioner ud fra en forskrift, uden at et CAS-værktøj.

Den grundlæggende metode handler om at have to ting ved hånden. Dels en række standardresultater med afledede funktioner til simple funktioner. Dels en række regneregler for hvordan man kombinerer de simple resultater i mere komplicerede situationer. Dette kalder vi *differentialregning*.

En vigtig del af den matematiske teori bag differentialregning er beviserne bag for de simple afledede funktioner, dels beviserne for regnereglerne. Disse beviser er ikke en del af denne note.

Standardresultater: Simple funktioners afledede

I følgende tabel er samlet en række af simple funktioner og deres afledet funktion.

$f(x)$	$f'(x)$
c	0
x	1
x^2	$2x$
x^a	$a \cdot x^{a-1}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$

$f(x)$	$f'(x)$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
a^x	$\ln(a) \cdot a^x$
e^x	e^x
$e^{k \cdot x}$	$k \cdot e^{k \cdot x}$
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}, \quad x > 0$

Eksempel 12.1

For funktionen $f(x) = x^6$ fås den afledede funktion $f'(x) = 6 \cdot x^{6-1} = 6 \cdot x^5$

Eksempel 12.2

For funktionen $f(x) = x^{-3,2}$ fås den afledede funktion $f'(x) = -3,2 \cdot x^{-3,2-1} = -3,2 \cdot x^{-4,2}$

Eksempel 12.3

For funktionen $f(x) = 4^x$ fås den afledede funktion $f'(x) = \ln(4) \cdot 4^x$.

Eksempel 12.4

For funktionen $f(x) = e^{0,85 \cdot x}$ fås den afledede funktion $f'(x) = 0,85 \cdot e^{0,85x}$

Simple regneregler: Konstantreglen og sumreglen

De to simple regneregler vi vil trække på forholder sig til hvad man gør når en funktion har form som en anden funktion (f.eks. en simpel standardfunktion) er ganget med et vilkårligt tal k , samt hvis en funktion har funktion som en sum eller differens mellem to funktioner.

Konstantreglen:

Hvis g er en differentiabel funktion og funktionen f er bestemt på formen $f(x) = k \cdot g(x)$, så er f også differentiabel, med den tilhørende afledede funktion f' bestemt ved $f'(x) = k \cdot g'(x)$.

Sumreglen:

Hvis g og h er differentiable funktioner og funktionen f er bestemt ved $f(x) = g(x) \pm h(x)$, så er f også differentiabel, med den tilhørende afledede funktion f' bestemt ved $f'(x) = g'(x) \pm h'(x)$.

Eksempel 12.5

For en funktion $f(x) = 3 \cdot x^5$ ses at den har formen $f(x) = k \cdot g(x)$, med $k = 3$ og $g(x) = x^5$. Da vi fra standardresultaterne ved at $g'(x) = 5x^4$ fås altså: $f'(x) = k \cdot g'(x) = 3 \cdot 5x^4 = 15x^4$.

Eksempel 12.6

For en funktion $f(x) = x^3 + x^2$ ses at den har formen $f(x) = g(x) + h(x)$ med $g(x) = x^3$ og $h(x) = x^2$. Fra standardresultaterne vides at $g'(x) = 3x^2$ og $h'(x) = 2x$. Heraf følger at den afledede funktion er $f'(x) = g'(x) + h'(x) = 3x^2 + 2x$.

Eksempel 12.7

For en funktion $f(x) = 6 \cdot \sqrt{x}$ ses at den har formen $f(x) = k \cdot g(x)$, med $k = 6$ og $g(x) = \sqrt{x}$. Fra standardresultaterne vides at $g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. Deraf fås: $f'(x) = k \cdot g'(x) = 6 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{3}{\sqrt{x}}$.

Eksempel 12.8

For en funktion $f(x) = 5 \cdot x - 7 \cdot x^4$ ses at den har formen $f(x) = g(x) - h(x)$, med $g(x) = 5x$ og $h(x) = 7x^4$. Det ses at g er på formen $g(x) = k \cdot x$ og tilsvarende for $h(x)$. Således fås med konstantregel og standardresultater at $g'(x) = 5 \cdot 1 = 5$ og $h'(x) = 7 \cdot 4x^3 = 28x^3$. Dermed er det bestemt at $f'(x) = g'(x) - h'(x) = 5 - 28x^3$.

Eksempel 12.9

For $f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 7x + 10$ fås $f'(x) = 2 \cdot 3x^2 - 5 \cdot 2x + 7 \cdot 1 + 0 = 6x^2 - 10x + 7$.

Bemærk at konstantleddet ”+10” ved differentiation forsvinder som et ”+0” i den afledede funktion.

Det gælder generelt for alle funktioner, at et konstantled ”forsvinder” ved differentiation.

Produktreglen

Udover to simple regneregler, findes også to mere avancerede regneregler. Den første af disse er produktreglen. Det er vigtigt at forstå, at den intuitive idé man får fra sumreglen, at der til funktionen $g(x) \cdot h(x)$ må høre den afledede funktion $g'(x) \cdot h'(x)$, ikke er korrekt. I stedet gælder:

Produktreglen

Hvis g og h er differentiable funktioner, og f er en funktion på formen $f(x) = g(x) \cdot h(x)$, så vil dens afledede funktion være bestemt som $f'(x) = g'(x) \cdot h(x) + g(x) \cdot h'(x)$.

Med ord: Den afledede funktion til et produkt bestemmes som den ene funktion differentieret gange den anden udifferentieret, plus den ene udifferentieret gange den anden differentieret.

Eksempel 12.10

En funktion f er bestemt ved $f(x) = x^3 \cdot \ln(x)$. Det ses at f har formen $f(x) = g(x) \cdot h(x)$ med $g(x) = x^3$ og $h(x) = \ln(x)$. Fra standardresultaterne fås $g'(x) = 3x^2$ og $h'(x) = \frac{1}{x}$.

Med produktreglen opstilles nu:

$$\begin{aligned} f'(x) &= g'(x) \cdot h(x) + g(x) \cdot h'(x) \\ &= 3x^2 \cdot \ln(x) + x^3 \cdot \frac{1}{x} \\ &= 3x^2 \cdot \ln(x) + x^2 \\ &= x^2 \cdot (3 \cdot \ln(x) + 1) \end{aligned}$$

Eksempel 12.11

En funktion f er bestemt ved $f(x) = 2 \cdot \sqrt{x} \cdot e^x$. Det ses at f har formen $f(x) = g(x) \cdot h(x)$ med $g(x) = 2 \cdot \sqrt{x}$ og $h(x) = e^x$. Heraf følger $g'(x) = 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$ og $h'(x) = e^x$.

Med produktreglen fås:

$$f'(x) = g'(x) \cdot h(x) + g(x) \cdot h'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot e^x + 2\sqrt{x} \cdot e^x = e^x \cdot \sqrt{x} \cdot \left(\frac{1}{x} + 2\right).$$

Eksempel 12.12

En funktion f er bestemt ved $f(x) = \frac{3^x}{x}$. Det ses at f kan omskrives til $f(x) = 3^x \cdot \frac{1}{x}$ har formen $f(x) = g(x) \cdot h(x)$ med $g(x) = 3^x$ og $h(x) = \frac{1}{x}$. Heraf fås $g'(x) = \ln(3) \cdot 3^x$ og $h'(x) = -\frac{1}{x^2}$.

Med produktreglen fås: $f'(x) = \ln(3) \cdot 3^x \cdot \frac{1}{x} + 3^x \cdot \frac{-1}{x^2} = \frac{3^x}{x} \cdot \left(\ln(3) - \frac{1}{x}\right) = \frac{3^x}{x^2} \cdot (\ln(3) \cdot x - 1)$

Kædereglen - differentiation af sammensat funktion

Den anden avancerede regneregler handler om at differentiere sammensatte funktioner (se kapitel 11). Det centrale i kædereglen er at få skilt funktionen $f(x) = g(h(x))$ ad i den indre funktion $h(x)$ og den ydre funktion $g(x)$. Kædereglen lyder da:

Kædereglen

Hvis g og h er differentiable funktioner, og $V_m(h) \subseteq D_m(g)$, da vil funktionen $f(x) = g(h(x))$ have den afledede funktion $f'(x) = h'(x) \cdot g'(h(x))$.

Med ord: Den afledede til en sammensat funktion er den indre differentieret gange med den ydre differentieret med hensyn til den indre.

Eksempel 12.13

En funktion f er bestemt ved $f(x) = e^{4x-7}$. Det ses at f har formen $f(x) = g(h(x))$, med indre funktion $h(x) = 4x - 7$ og ydre funktion $g(x) = e^x$. Heraf fås $h'(x) = 4$ og $g'(x) = e^x$.

Med kædereglen fås: $f'(x) = h'(x) \cdot g'(h(x)) = 4 \cdot e^{4x-7}$.

Eksempel 12.14

En funktion f er bestemt ved $f(x) = \ln(x^2 + 3)$. Det ses at f har formen $f(x) = g(h(x))$, med den indre funktion $h(x) = x^2 + 3$ og den ydre funktion $g(x) = \ln(x)$. Det ses at $g'(x) = \frac{1}{x}$ og $h'(x) = 2x$. Dermed fås med kædereglen:

$$f'(x) = h'(x) \cdot g'(h(x)) = 2x \cdot \frac{1}{x^2 + 3} = \frac{2x}{x^2 + 3}.$$

Eksempel 12.15

En funktion f er bestemt ved $f(x) = (3x - 10)^9$. Det ses at f har formen $f(x) = g(h(x))$, med den indre funktion $h(x) = 3x - 10$ og den ydre funktion $g(x) = x^9$. Dermed fås at $g'(x) = 9x^8$ og $h'(x) = 3$. Med kædereglen fås da:

$$f'(x) = h'(x) \cdot g'(h(x)) = 3 \cdot 9(3x - 10)^8 = 27 \cdot (3x - 10)^8.$$

Eksempel 12.16

En funktion f er bestemt ved $\sqrt{x^4 - 2x + 4}$. For den indre funktion $g(x) = x^4 - 2x + 4$ fås $g'(x) = 4x^3 - 2$ og for den ydre funktion $g(x) = \sqrt{x}$ fås $g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. Dermed fås:

$$f'(x) = (4x^3 - 2) \cdot \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x^4 - 2x + 4}} = \frac{4x^3 - 2}{2 \cdot \sqrt{x^4 - 2x + 4}} = \frac{2 \cdot (2x^3 - 1)}{2 \cdot \sqrt{x^4 - 2x + 4}} = \frac{2x^3 - 1}{\sqrt{x^4 - 2x + 4}}$$

Anden-afledet funktion uden CAS-værktøj

Anden-afledet funktion bestemmes uden CAS-værktøj på samme måde afledet funktion, ved at bruge samme standardresultater og regneregler på f' , som i første omgang blev anvendt på f for at bestemme f' . Der er ingen særlige regler for bestemmelse af anden-afledede funktioner. Vi taler således om at f'' bestemmes ved at differentiere f to gange.

Eksempel 12.17

En funktion f er bestemt ved $f(x) = x^4 + 2x^3 - 5x^2 + 8x - 10$.

Ved differentiationsreglerne fås: $f'(x) = 4x^3 + 6x^2 - 10x + 8$

Ved brug af samme regler fås: $f''(x) = 12x^2 + 12x - 10$

Også tredje-afledet kan bestemmes: $f'''(x) = 24x + 12$

Og fjerde-afledet: $f^{(4)}(x) = 24$

Endelig ses det at for $n \geq 5$ er $f^{(n)}(x) = 0$.

Eksempel 12.18

En funktion f er bestemt ved $f(x) = 10 \cdot \ln(x)$.

Ved differentiationsreglerne fås: $f'(x) = 10 \cdot \frac{1}{x} = \frac{10}{x}$

Ved brug af samme regler fås: $f''(x) = 10 \cdot \frac{-1}{x^2} = -\frac{10}{x^2}$

Eksempel 12.19

En funktion f er bestemt ved $f(x) = (x^2 + 10) \cdot e^x$

Med produktreglen fås: $f'(x) = 2x \cdot e^x + (x^2 + 10) \cdot e^x = (x^2 + 2x + 10) \cdot e^x$

Med produktreglen igen fås: $f''(x) = (2x + 2) \cdot e^x + (x^2 + 2x + 10) \cdot e^x = (x^2 + 4x + 12) \cdot e^x$

Eksempel 12.20

En funktion f er bestemt ved $f(x) = e^{x^3-4x+2}$

Med kædereglens fås: $f'(x) = (3x^2 - 4) \cdot e^{x^3-4x+2}$

Med produkt- og kædereglens fås:

$$f''(x) = 6x \cdot e^{x^3-4x+2} + (3x^2 - 4) \cdot (3x^2 - 4) \cdot e^{x^3-4x+2} = (6x + (3x^2 - 4)^2) \cdot e^{x^3-4x+2}$$

Bemærk hvordan det udnyttes i produktreglen, at e^{x^3-4x+2} allerede er blevet bestemt.

Løsning af problemer uden CAS-værktøj

De forskellige typer af problemer som tidligere er blevet løst med CAS-værktøjer, kan nu løses uden brug af værktøjer, men alene ved manuelle beregninger.

Eksempel 12.21

En funktion f er bestemt ved $f(x) = x^2 + 3x - 7$. For at bestemme ligningen for tangenten til grafen for f , med røringpunktet $P(2, f(2))$, bruges formlen for tangentens ligning $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ med $x_0 = 2$.

$$y = f'(2) \cdot (x - 2) + f(2)$$

$$f'(x) = 2x + 3$$

$$f'(2) = 2 \cdot 2 + 3 = 4 + 3 = 7$$

$$f(2) = 2^2 + 3 \cdot 2 - 7 = 4 + 6 - 7 = 10 - 7 = 3$$

$$y = 7(x - 2) + 3 = 7x - 14 + 3 = 7x - 11$$

Eksempel 12.22

En funktion f er bestemt ved $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + 2$. For at bestemme monotoniforholdene bestemmes den afledede funktion: $f'(x) = \frac{1}{3} \cdot 3x^2 - 2 \cdot 2x + 3 \cdot 1 - 0 = x^2 - 4x + 3$

Eventuelle stationære punkter bestemmes ved at løse $f'(x) = 0$:

$x^2 - 4x + 3 = 0$ er en andengradsligning med koefficienterne $a = 1$, $b = -4$ og $c = 3$.

Diskriminanten bestemmes: $d = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 16 - 12 = 4$

Da $d > 0$ er der to løsninger: $x = \frac{-b \pm \sqrt{d}}{2a} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{4}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm 2}{2} = 2 \pm 1$

Løsningen på ligningen er dermed $x = 1$ eller $x = 3$.

Arten af de stationære punkter bestemmes med f'' : $f''(x) = 2x - 4$

$$f''(1) = 2 \cdot 1 - 4 = 2 - 4 = -2$$

$$f''(3) = 2 \cdot 3 - 4 = 6 - 4 = 2$$

Da $f'(1) = 0$ og $f''(1) < 0$ har f et lokalt maksimum i $x = 1$.

Da $f'(3) = 0$ og $f''(3) > 0$ har f et lokalt minimum i $x = 3$.

Monotoniforholdene for f : Voksende for $x \in]-\infty; 1]$ og $x \in [3; \infty[$ og aftagende for $x \in [1; 3]$.

Ved at løse $f''(x) = 0$: $2x - 4 = 0$ med løsningen $x = 2$ ses det, at f har vendepunkt i $x = 2$ (i det det bemærkes ud fra funktionsværdier for f'' bestemt ovenfor, at denne skifter fortegn i $x = 2$).

Krumningsforhold for f : Konkav for $x \in]-\infty; 2]$ og konveks for $x \in [2; \infty[$.

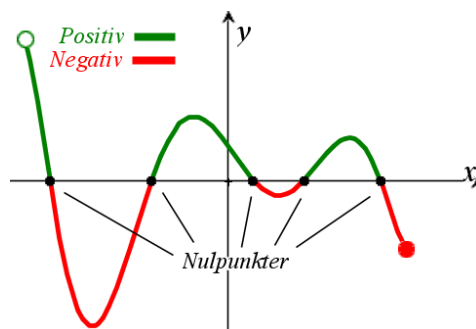
13. Oversigt over centrale begreber i funktionsanalyse

Nulpunkt og fortegnsvariation

Nulpunkter: Løs $f(x) = 0$

For $f(x) > 0$ er f positiv.

For $f(x) < 0$ er f negativ.

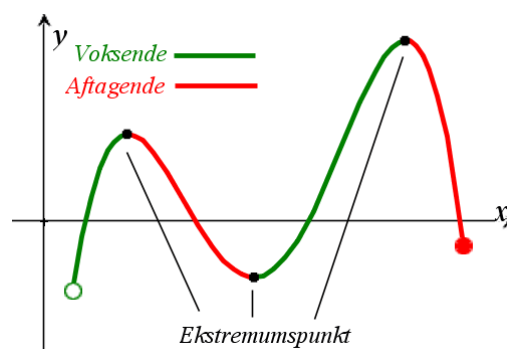


Ekstremumspunkt og monotoniforhold

Mulige ekstremumspunkter: Løs $f'(x) = 0$

For $f'(x) > 0$ er f voksende.

For $f'(x) < 0$ er f aftagende.

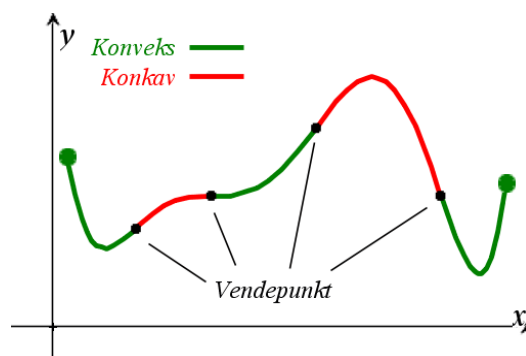


Vendepunkt og krumningsforhold

Mulige vendepunkter: Løs $f''(x) = 0$

For $f''(x) > 0$ er f konveks.

For $f''(x) < 0$ er f konkav.



Stationære punkter og deres art:

Stationære punkter: Løs $f'(x) = 0$

For $f''(x) > 0$: f har lokalt minimum.

For $f''(x) < 0$: f har lokalt maksimum.

For $f''(x) = 0$: f har saddepunkt, hvis f'' skifter fortegn. Ellers er arten ubestemt.

