Eksponentialfunktionen

Definition:

$f(x) = b \cdot a^x$, $a > 0$ og $b > 0$.

Sætning: Eksponentiel vækst

$f(x + \Delta x) = f(x) \cdot a^{\Delta x}$

Bevis:

$f(x + \Delta x) = b \cdot a^{x+\Delta x} = b \cdot a^x \cdot a^{\Delta x} = f(x) \cdot a^{\Delta x}$

Sætning: Fordoblingskonstant

Der fås $f(x + T_2) = 2 \cdot f(x)$ netop for $T_2 = \frac{\log(2)}{\log(a)}$

Bevis:

For $2 \cdot f(x)$ sættes $a^{\Delta x} = 2$ og $\Delta x = T_2$:

$a^{T_2} = 2$

$\log(a^{T_2}) = T_2 \cdot \log(a) = \log(2)$

$T_2 = \dfrac{\log(2)}{\log(a)}$

Sætning: Topunktsformlen

For eksponentialfunktionen f med graf gennem $P(x_1, y_1)$ og $Q(x_2, y_2)$ fås:

$a = \sqrt[x_2 - x_1]{\dfrac{y_2}{y_1}}$ og $b = \dfrac{y_1}{a^{x_1}}$

Bevis:

$y_1 = f(x_1) = b \cdot a^{x_1}$ og $y_2 = f(x_2) = b \cdot a^{x_2}$

$$\frac{y_2}{y_1} = \frac{b \cdot a^{x_2}}{b \cdot a^{x_1}} = \frac{a^{x_2}}{a^{x_1}} = a^{x_2 - x_1}$$

$$a = \sqrt[x_2 - x_1]{\frac{y_2}{y_1}}$$

$y_1 = b \cdot a^{x_1}$

$b = \frac{y_1}{a^{x_1}}$

Sætning: Betydning af b

Grafen for f skærer andenaksen i punktet $(0, b)$.

Bevis:

$f(0) = b \cdot a^0 = b \cdot 1 = b$

Sætning: Betydning af a

For $a > 1$ er f voksende, for $0 < a < 1$ er f aftagende. For $a = 1$ bliver f en konstant funktion.

Bevis:

I det følgende ses der på hvad der sker med $f(x)$, når x vokser - det vil sige når $\Delta x > 0$.

For $a > 1$ fås $a^{\Delta x} > 1$. Dermed fås: $f(x + \Delta x) = f(x) \cdot a^{\Delta x} > f(x)$.
Da $f(x)$ vokser, når x vokser, er f voksende.

For $0 < a < 1$ fås $a^{\Delta x} < 1$. Dermed fås: $f(x + \Delta x) = f(x) \cdot a^{\Delta x} < f(x)$.
Da $f(x)$ aftager, når x vokser, er f aftagende.

For $a = 1$ fås $a^{\Delta x} = 1^{\Delta x} = 1$. Dermed fås: $f(x + \Delta x) = f(x) \cdot a^{\Delta x} = f(x) \cdot 1 = f(x)$.
Da $f(x)$ har samme værdi, når x vokser, er f konstant.