

Prikprodukt og vinkel

Givet to vektorer $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ og $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$, således at ingen af dem er nulvektoren $\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Definition: Prikprodukt

Ved prikproduktet mellem $\vec{a}$ og $\vec{b}$ forstås et tal, givet ved formelen:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2$$

Sætning: Prikprodukt og vinkel

Prikproduktet mellem to vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$ kan også bestemmes som:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(v)$$

Hvor $|\vec{a}|$ og $|\vec{b}|$ er længderne af vektorerne $\vec{a}$ og $\vec{b}$, og v er vinklen mellem vektorerne.

Bevis:

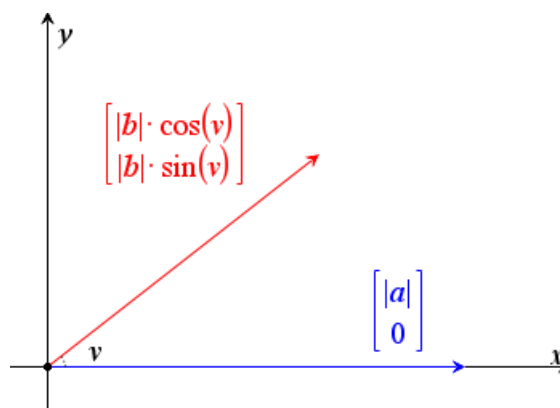
Antag at $\vec{a}$ er placeret langs førsteaksen. Da kan vektoren skrives med koordinatsættet:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} |\vec{a}| \\ 0 \end{pmatrix}$$

Vektor $\vec{b}$ vil da danne vinklen v med førsteaksen, og dens koordinatsæt kan da skrives:

$$\vec{b} = |\vec{b}| \cdot \vec{e}_v = |\vec{b}| \cdot \begin{pmatrix} \cos(v) \\ \sin(v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |\vec{b}| \cdot \cos(v) \\ |\vec{b}| \cdot \sin(v) \end{pmatrix}$$

Hvor $\vec{e}_v$ er en enhedsvektor med længde $|\vec{e}_v| = 1$ og hvis retning netop er vinklen v i forhold til førsteaksen.



Ud fra definitionen på et prikprodukt fås nu:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} |\vec{a}| \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} |\vec{b}| \cdot \cos(v) \\ |\vec{b}| \cdot \sin(v) \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(v) + 0 \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(v)$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(v) + 0$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(v)$$

Vi har således vist at sætningen gælder når vektoren $\vec{a}$ er parallel med førsteaksen.

Det kan endvidere vises, at et prikprodukt kun afhænger af vektorernes længder og indbyrdes placering (det vil sige vinklen mellem dem).

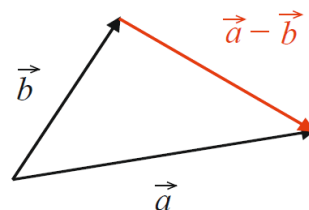
En af kvadratsætningerne for vektorer lyder:

$$|\vec{a} - \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2 \cdot \vec{a} \cdot \vec{b}$$

Dette kan omskrives til:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2} \cdot (|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2)$$

Det ses at de to første led i parentes på højreside kun afhænger af vektorernes længder. I sidste led står længden af differensvektoren. Men denne er netop afstanden mellem spidserne på $\vec{a}$ og $\vec{b}$, når de afsættes ud fra samme punkt. Og denne afstand afhænger kun af længderne af $\vec{a}$ og $\vec{b}$, samt vinklen v mellem de to vektorer.



Da udtrykket til højre kun afhænger af vektorernes længder samt vinklen mellem dem, så gælder dette også for prikproduktet som står på venstreside af lighedstegnet.

Da prikproduktet kun afhænger af vektorernes længder og vinklen mellem dem, så vil formelen der gælder når $\vec{a}$ er parallel med førsteaksen også gælde, hvis vektorparret drejes og vendes på andre måder. Sætningen er således bevist.

NB! Kvadratsætningen der anvendes ovenfor er dog *ikke* bevist, og det ville være næste skridt på vejen til at bevise den egentlige sætning helt i bund.

Sætning: Prikprodukt-fortegn og art af vinkel

Hvis $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, da er vinklen mellem vektorerne ret.

Hvis $\vec{a} \cdot \vec{b} > 0$, da er vinklen mellem vektorerne spids.

Hvis $\vec{a} \cdot \vec{b} < 0$, da er vinklen mellem vektorerne stump.

Bevis:

Det er vist at der gælder:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\nu)$$

Oplagt gælder også at længderne er positive, det vil sige $|\vec{a}| > 0$ og $|\vec{b}| > 0$.

Dermed gælder at $\vec{a} \cdot \vec{b}$ har samme fortegn som $\cos(\nu)$, og omvendt.

For $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ gælder altså $\cos(\nu) = 0$.

For $\cos(\nu) = 0$ gælder at $\nu = 90^\circ$.

Dermed er det vist, at hvis prikproduktet er 0, så er vinklen mellem vektorerne ret (de er altså ortogonale).

For $\vec{a} \cdot \vec{b} > 0$ gælder at $\cos(\nu) > 0$.

For $\cos(\nu) > 0$ gælder at $\nu < 90^\circ$.

Dermed er det vist, at hvis prikproduktet er positivt, så er vinklen mellem vektorerne spids.

For $\vec{a} \cdot \vec{b} < 0$ gælder at $\cos(\nu) < 0$.

For $\cos(\nu) < 0$ gælder at $\nu > 90^\circ$.

Dermed er det vist, at hvis prikproduktet er negativt, så er vinklen mellem vektorerne stump.

Fremstilling af cirkel

Definition: Cirkel

En cirkel er netop de punkter $P(x, y)$ som opfylder at afstanden til et givet punkt $C(a, b)$ er et fast tal r . Vi kalder punktet C for cirkelns centrum og tallet r for cirkelns radius.

Sætning

En cirkel med centrum $C(a, b)$ og radius r består af netop de punkter som opfylder ligningen:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

Bevis

Lad $\overrightarrow{CP}$ være en vektor fra centrum $C(a, b)$ til et vilkårligt punkt $P(x, y)$:

$$\overrightarrow{CP} = \begin{pmatrix} x - a \\ y - b \end{pmatrix}$$

Kriteriet for at P ligger på cirklen er da, at det netop skal gælde at $|\overrightarrow{CP}| = r$:

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{CP}| &= r \\ \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2} &= r \\ (x - a)^2 + (y - b)^2 &= r^2 \end{aligned}$$

Dermed er ligningen for cirklen udledt.

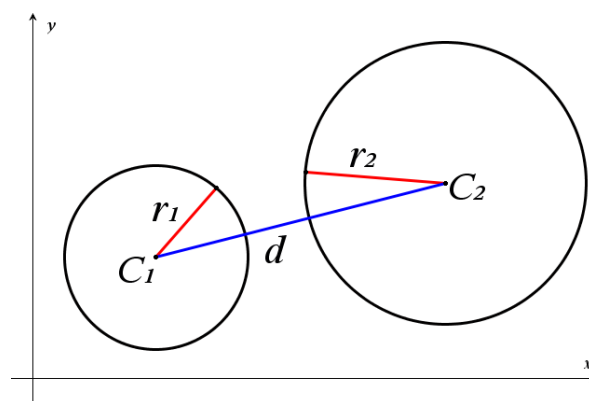
To cirkler

Lad der være givet to cirkler i et koordinatsystem. Lad den ene cirkel have centrum i C_1 og radius r_1 , mens den anden har centrum i C_2 og radius r_2 .

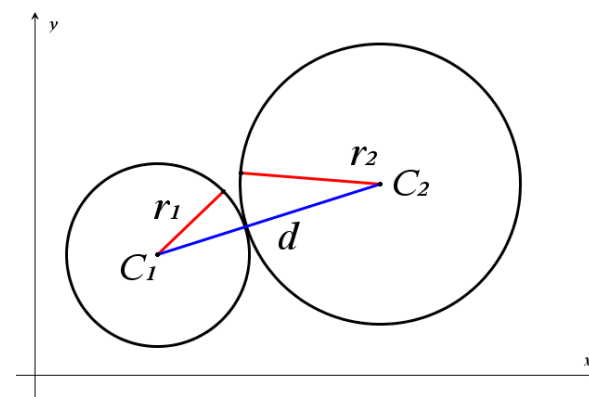
Afstanden mellem de to centre kalder vi d . Det vil sige at: $d = |C_1 C_2|$

For nemheds skyld beslutter vi at $r_2 > r_1$.

For $d > r_1 + r_2$ fås, at der ingen skæringspunkter er mellem de to cirkler.

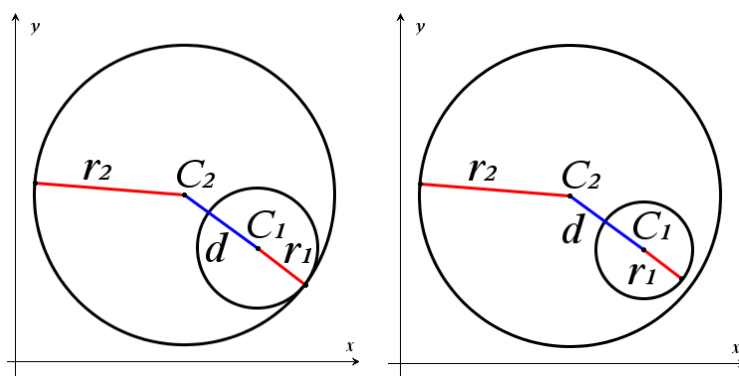


For $d = r_1 + r_2$ fås, at der er netop ét skæringspunkt mellem de to cirkler.



Det ses tilsvarende at for $r_2 = d + r_1$, svarende til $d = r_2 - r_1$, så er der også ét skæringspunkt.

Endvidere ses at for $r_2 > d + r_1$ svarende til $d < r_2 - r_1$, vil der ingen skæringspunkter være.

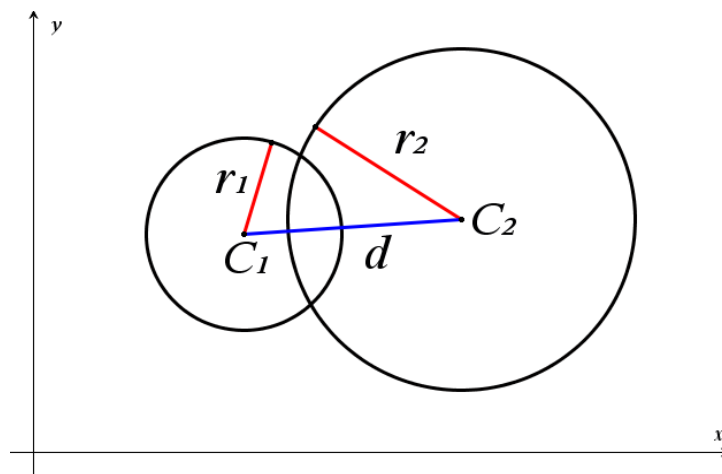


Tilbage bliver der den mulighed at d ligger mellem $r_2 - r_1$ og $r_2 + r_1$.

Det vil sige at:

$$r_2 - r_1 < d < r_2 + r_1$$

I den situation bliver der to skæringspunkter.



Som et helt særligt eksempel kan nævnes den situation at $r_2 = r_1$ og $d = 0$. I så fald bliver de to cirkler sammenfaldende og antallet af skæringspunkter vil principielt være uendeligt.

Dette sidste særlige eksempel rejser dog det filosofiske spørgsmål, om der i så fald overhovedet kan tales om to forskellige cirkler.