

NOTE: Standardnormalfordelingen

KBJ, maj 2024

2u MA

Definition:

Standardnormalfordelingens tæthedsfunktioner er bestemt ved:

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

Sætning 1: Monotoniforhold for tæthedsfunktionen

Det gælder om $\phi(x)$ at den er voksende for $x \in]-\infty; 0]$ og aftagende for $x \in [0; \infty[$.

Bevis:

Med kædereglen ses: $\left(e^{-\frac{1}{2}x^2}\right)' = -\frac{1}{2} \cdot 2x \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2} = -x \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2}$

Dermed fås:

$$\phi'(x) = \frac{-1}{\sqrt{2\pi}} \cdot x \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

De stationære punkter for ϕ bestemmes:

$$\begin{aligned}\phi'(x) &= 0 \\ \frac{-1}{\sqrt{2\pi}} \cdot x \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2} &= 0\end{aligned}$$

Med kædereglen fås da følgende løsning, da $e^{-\frac{1}{2}x^2} > 0$ for alle x .

$$x = 0$$

Da $-\frac{1}{\sqrt{2\pi}} < 0$ og $e^{-\frac{1}{2}x^2} > 0$ for alle værdier af x , afgøres fortegnet for ϕ' alene af fortegnet for x .

For $x < 0$ fås således $\phi'(x) > 0$ og $x > 0$ fås $\phi'(x) < 0$

Således følger det at ϕ er voksende for $x < 0$ og aftagende for $x > 0$.

QED

Sætning 2: Krumningsforhold for tæthedsfunktion

Om $\phi(x)$ gælder, at den er konveks for $x \in]-\infty; -1]$ og $x \in [1; \infty[$ samt konkav for $x \in [-1; 1]$.

Bevis:

Med produktreglen ses:

$$\begin{aligned}\left(e^{-\frac{1}{2}x^2}\right)'' &= \left(-x \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2}\right)' = (-x)' \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2} + (-x) \cdot \left(e^{-\frac{1}{2}x^2}\right)' = -1 \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2} - x \cdot (-x) \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2} = \\ &= x^2 \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2} - 1 \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2} = (x^2 - 1) \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2}\end{aligned}$$

Dermed fås:

$$\phi''(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot (x^2 - 1) \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

For at finde mulige vendepunkter løses ligningen $\phi''(x) = 0$:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot (x^2 - 1) \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2} = 0$$

Med nulreglen fås, idet $e^{-\frac{1}{2}x^2} > 0$ for alle x :

$$x^2 - 1 = 0$$

$$x^2 = 1$$

$$x = -1 \text{ eller } x = 1$$

Da $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} > 0$ og $e^{-\frac{1}{2}x^2} > 0$ for alle x , har ϕ'' samme fortegn som $(x^2 - 1)$.

For $x^2 > 1$ er $x^2 - 1 > 0$. Dette gælder når $x < -1$ eller $x > 1$.

For $x^2 < 1$ er $x^2 - 1 < 0$. Dette gælder når $-1 < x < 1$.

Da $\phi''(x) > 0$ for $x < -1$ er ϕ konveks for $x \in]-\infty; -1]$.

Da $\phi''(x) < 0$ for $-1 < x < 1$ er ϕ konkav for $x \in [-1; 1]$.

Da $\phi''(x) > 0$ for $x > 1$, er ϕ konveks for $x \in [1; \infty[$.

QED

Definition: Fordelingsfunktion

Standardnormalfordelingens fordelingsfunktion er defineret ved:

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \phi(x) dx$$

Sætning 3: Monotoni- og krumningsforhold for Φ

Φ er voksende på hele $\mathbb{R}$.

Φ er konveks for $x < 0$ og konkav for $x > 0$.

Bevis:

Da $\Phi'(x) = \phi(x)$ og da $\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2} > 0$ for alle x , så er Φ voksende for alle x .

Da $\Phi''(x) = \phi'(x)$, og da der jf. sætning 1, gælder at $\phi'(x) > 0$ for $x < 0$ og $\phi'(x) < 0$ for $x > 0$, så er Φ konveks for $x < 0$ og konkav for $x > 0$.

QED

Indledende bemærkninger:

Den normalfordelte stokastiske variabel X , med middelværdi μ og spredning σ gælder, at den har tæthedsfunktionen:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \cdot e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x-\mu}{\sigma} \right)^2}$$

Endvidere har den fordelingsfunktionen

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx$$

Standardnormalfordelingens har $\mu = 0$ og $\sigma = 1$ hvilket netop giver:

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot 1} \cdot e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x-0}{1} \right)^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2} x^2}$$

Sætning 4:

Det gælder at $F(x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$

Bevis

Med kædereglens fås:

$$\begin{aligned} \left(\Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) \right)' &= \left(\frac{x-\mu}{\sigma} \right)' \cdot \Phi'\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma} \cdot \phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) \\ &= \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x-\mu}{\sigma} \right)^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x-\mu}{\sigma} \right)^2} = f(x) \end{aligned}$$

Det er altså vist at $\Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$ er en stamfunktion til f .

Da forskellen på to stamfunktioner til samme funktion højst er en konstant, må det således gælde at $F(x) - \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) = c$. Derfor bestemmes c i det det vides at $F(\mu) = 0,5$ og $\Phi(0) = 0,5$:

$$F(\mu) - \Phi\left(\frac{\mu-\mu}{\sigma}\right) = F(\mu) - \Phi(0) = 0,5 - 0,5 = 0 = c$$

Da $c = 0$ gælder det altså at $\Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$ og $F(x)$ er den samme stamfunktion til f .

Det gælder altså at $\Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) = F(x)$.