2.4 Lineær 1. ordens differentialligning

Definition 2.4.1. Den *lineære 1. ordens differentialligning* er en differentialligning på formen

$$y' + a(x)y = b(x) \tag{2.4.1}$$

En løsning til denne er en differentiabel funktion $y = f(x)$, som opfylder

$$f'(x) + a(x)f(x) = b(x)$$

Løsninger til ligning 2.4.1 finder vi ved brug af følgende sætning

Sætning 2.4.1. *(Panserformlen) Den fuldstændige løsning til den lineære 1. ordens differentialligning*

$$y' + a(x)y = b(x)$$

er givet ved

$$y = f(x) = e^{-A(x)} \int b(x)e^{A(x)}\,dx + ce^{-A(x)}$$

hvor $A(x)$ er en stamfunktion til $a(x)$, og $c \in \mathbb{R}$.

Bevis

Da $A(x)$ er en stamfunktion til $a(x)$, er $A'(x) = a(x)$. Nu er funktionen $e^{A(x)}$ altid positiv, så vi får

$$
\begin{aligned}
& y' + a(x)y = b(x) \\
\Leftrightarrow\quad & y'e^{A(x)} + a(x)ye^{A(x)} = b(x)e^{A(x)} \\
\Leftrightarrow\quad & y'e^{A(x)} + ya(x)e^{A(x)} = b(x)e^{A(x)} \\
\Leftrightarrow\quad & y'e^{A(x)} + y(e^{A(x)})' = b(x)e^{A(x)} && \textit{(differentiation af sammensat funktion)} \\
\Leftrightarrow\quad & (ye^{A(x)})' = b(x)e^{A(x)} && \textit{(differentiation af produkt)} \\
\Leftrightarrow\quad & ye^{A(x)} = \int b(x)e^{A(x)}\,\mathrm{d}x + c \\
\Leftrightarrow\quad & y = e^{-A(x)} \int b(x)e^{A(x)}\,\mathrm{d}x + ce^{-A(x)} && \textit{(ganger igennem med } e^{-A(x)}\textit{)}
\end{aligned}
$$

□

Hermed er sætningen bevist.

Eksempel 2.4.1
Vi vil løse differentialligningen

$$y' + 2xy = 4x$$

I denne differentialligning er $a(x) = 2x$ og $b(x) = 4x$. Vi vælger $A(x) = x^2$ som stamfunktion til $a(x)$.
Dermed er den fuldstændige løsning funktionerne

$$\begin{aligned} y = f(x) &= e^{-x^2} \int 4xe^{x^2}\,\mathrm{d}x + ce^{-x^2} \\ &= 2e^{-x^2} \int 2xe^{x^2}\,\mathrm{d}x + ce^{-x^2} \\ &= 2e^{-x^2} e^{x^2} + ce^{-x^2} \\ &= 2 + ce^{-x^2} \end{aligned}$$

som er defineret på hele $\mathbb{R}$.

Eksempel 2.4.2
Vi vil løse differentialligningen

$$y' + \frac{2}{x} \cdot y = 4x + 3$$

I denne differentialligning er $a(x) = \frac{2}{x}$ og $b(x) = 4x + 3$, og vi må kræve, at $x \neq 0$.
Vi vælger $A(x) = 2\ln(|x|)$ som stamfunktion til $a(x)$.
Dermed er den fuldstændige løsning funktionerne

$$\begin{aligned} y = f(x) &= e^{-2\ln(|x|)} \int (4x+3)e^{2\ln(|x|)}\,\mathrm{d}x + ce^{-2\ln(|x|)} \\ &= e^{\ln(|x|^{-2})} \int (4x+3)e^{\ln(|x|^2)}\,\mathrm{d}x + ce^{\ln(|x|^{-2})} \\ &= \frac{1}{|x|^2} \int (4x+3)|x|^2\,\mathrm{d}x + c\frac{1}{|x|^2} \\ &= \frac{1}{x^2} \int (4x+3)x^2\,\mathrm{d}x + c\frac{1}{x^2} \quad \text{, da } |x|^2 = x^2 \\ &= \frac{1}{x^2}(x^4 + x^3) + c\frac{1}{x^2} \\ &= x^2 + x + c\frac{1}{x^2} \end{aligned}$$

Løsningernes definitionsmængde er $]-\infty;0[$ eller $]0;\infty[$.

Øvelse 78, Øvelse 79, Øvelse 80, Øvelse 81, Øvelse 82

2.5 Ligningerne $y' = ky$ og $y' = b - ay$

Ved brug af Panserformlen kan vi bevise

Sætning 2.5.1. *Den fuldstændige løsning til differentialligningen*

$$y' = ky$$

er funktionerne

$$y = f(x) = ce^{kx},\ c \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}$$

Bevis
Ved at omforme differentialligningen

$$y' = ky \quad \text{til} \quad y' - ky = 0$$

kan vi løse differentialligningen ved hjælp af Sætning 2.4.1 med $a(x) = -k$ og $b(x) = 0$.
Vi vælger $A(x) = -kx$ og får

$$\begin{aligned} y = f(x) &= e^{-A(x)} \int b(x)e^{A(x)}\,\mathrm{d}x + ce^{-A(x)} \\ &= e^{kx} \int 0 \cdot e^{-kx}\,\mathrm{d}x + ce^{kx} = ce^{kx} \end{aligned}$$

Altså har vi fundet den fuldstændige løsning

$$y = f(x) = ce^{kx},\ c \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}$$

□

Løsningerne til ovenstående differentialligning er de eksponentielle funktioner, og vi ser ofte denne differentialligning optræde i modeller, hvor vi har uhæmmet vækst.

▷ Øvelse 83, Øvelse 84

Sætning 2.5.2. *Den fuldstændige løsning til differentialligningen*

$$y' = b - ay\ ,\ a \neq 0$$

er funktionerne

$$y = f(x) = \frac{b}{a} + ce^{-ax}, \quad c \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}$$

Bevis

Ved at omforme differentialligningen

$$y' = b - ay \quad \text{til} \quad y' + ay = b$$

kan vi løse ligningen ved hjælp af Sætning 2.4.1.

Vi sætter $A(x) = ax$ og får

$$\begin{aligned} y = f(x) &= e^{-ax} \int be^{ax}\, \mathrm{d}x + ce^{-ax} \\ &= be^{-ax} \int e^{ax}\, \mathrm{d}x + ce^{-ax} \\ &= be^{-ax} \cdot \frac{1}{a} e^{ax} + ce^{-ax} \\ &= \frac{b}{a} e^{-ax} \cdot e^{ax} + ce^{-ax} = \frac{b}{a} + ce^{-ax} \end{aligned}$$

Hermed har vi bestemt den fuldstændige løsning til

$$y = f(x) = \frac{b}{a} + ce^{-ax}, \qquad c \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}$$

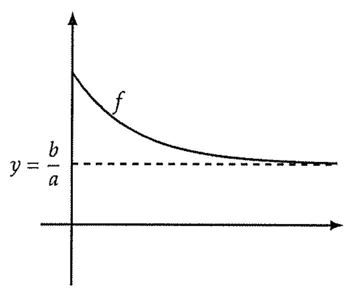
□

I mange anvendelser er $a > 0$ og $b > 0$.
I dette tilfælde vil $e^{-ax} \to 0$ for $x \to \infty$, hvorfor

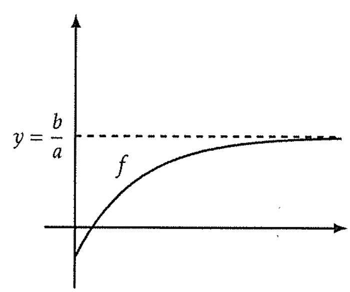
$$f(x) = \frac{b}{a} + ce^{-ax} \to \frac{b}{a} \quad \text{når } x \to \infty$$

De tilhørende integralkurver har derfor linjen med ligningen $y = \frac{b}{a}$ som vandret asymptote.

Hvis $c > 0$, vil $f(x)$ aftage ned mod $\frac{b}{a}$ (figur 2.5.1), mens $f(x)$ vokser op mod $\frac{b}{a}$, når $c < 0$ (figur 2.5.2).



Figur 2.5.1



Figur 2.5.2