

NOTE: Bevis for løsning til logistisk diff.ligning.

KBJ, december 2024

3u MA

Definition: Logistisk differentialligning

$$y' = (b - a \cdot y) \cdot y, \quad a > 0, b > 0$$

Sætning:

En ikke-negativ voksende løsning er bestemt ved:

$$y = \frac{\frac{b}{a}}{1 + c \cdot e^{-b \cdot x}}, \quad c > 0.$$

Bevis:

Da vi søger en ikke-negativ og voksende løsning, skal det gælde at $y \geq 0$ og $y' \geq 0$.

Heraf følger at $b - a \cdot y \geq 0$ og dermed at $y \leq \frac{b}{a}$.

For $y = 0$ eller $y = \frac{b}{a}$ fås $y' = 0$. Der er altså tale om stationære løsninger.

For $0 < y < \frac{b}{a}$ fås:

$$y' = (b - a \cdot y) \cdot y$$

Da differentialligningen er separabel fås:

$$\frac{1}{(b - a \cdot y) \cdot y} \cdot y' = 1$$

Og dermed fås følgende løsninger:

$$\int \frac{1}{(b - a \cdot y) \cdot y} dy = \int dx = x + c_1$$

Vi ønsker nu at få splittet brøken på venstre side op som en sum af to brøker på formen:

$$\frac{1}{(b - a \cdot y) \cdot y} = \frac{p}{b - a \cdot y} + \frac{q}{y}$$

Højresiden kan omskrives til:

$$\begin{aligned}\frac{p \cdot y}{(b - a \cdot y) \cdot y} + \frac{(b - a \cdot y) \cdot q}{(b - a \cdot y) \cdot y} &= \\ \frac{p \cdot y}{(b - a \cdot y) \cdot y} + \frac{q \cdot b - a \cdot q \cdot y}{(b - a \cdot y) \cdot y} &= \\ \frac{p \cdot y + q \cdot b - a \cdot q \cdot y}{(b - a \cdot y) \cdot y} &= \\ \frac{(p - a \cdot q) \cdot y + q \cdot b}{(b - a \cdot y) \cdot y}\end{aligned}$$

Hvis det skal gå op, skal det gælde at: $(p - a \cdot q) \cdot y + q \cdot b = 1$ for alle værdier af y .

Den sidste betingelse betyder, at vi må kræve $p - a \cdot q = 0$ og dermed at $p = a \cdot q$.

Dermed fås $0 \cdot y + q \cdot b = q \cdot b = 1$ hvorefter følger at $q = \frac{1}{b}$, og dermed at $p = a \cdot \frac{1}{b} = \frac{a}{b}$

Således ved vi nu at:

$$\frac{1}{(b - a \cdot y) \cdot y} = \frac{\frac{a}{b}}{b - a \cdot y} + \frac{\frac{1}{b}}{y}$$

Vi ved således nu at:

$$\int \frac{1}{(b - a \cdot y) \cdot y} dy = \int \left(\frac{\frac{a}{b}}{b - a \cdot y} + \frac{\frac{1}{b}}{y} \right) dy$$

$$\int \frac{1}{(b - a \cdot y) \cdot y} dy = \int \frac{\frac{a}{b}}{b - a \cdot y} dy + \int \frac{\frac{1}{b}}{y} dy$$

$$\int \frac{1}{(b - a \cdot y) \cdot y} dy = \frac{a}{b} \cdot \int \frac{1}{b - a \cdot y} dy + \frac{1}{b} \int \frac{1}{y} dy$$

$$\text{Da } (\ln(|b - a \cdot y|))' = -a \cdot \frac{1}{b - a \cdot y} \text{ fås at } \left(-\frac{1}{a} \cdot \ln(|b - a \cdot y|) \right)' = \frac{1}{b - a \cdot y}$$

$$\int \frac{1}{(b - a \cdot y) \cdot y} dy = \frac{a}{b} \cdot \left(-\frac{1}{a} \right) \cdot \ln(|b - a \cdot y|) + \frac{1}{b} \ln(|y|) + c_2$$

Da $0 < y < \frac{b}{a}$ kan numerisk-tegnene i ln-udtrykkene fjernes, da $b - ay > 0$ og $y > 0$:

$$\int \frac{1}{(b - a \cdot y) \cdot y} dy = -\frac{1}{b} \cdot \ln(b - a \cdot y) + \frac{1}{b} \ln(y) + c_2$$

$$\int \frac{1}{(b - a \cdot y) \cdot y} dy = -\frac{1}{b} \cdot \ln(b - a \cdot y) + \frac{1}{b} \ln(y) + c_2$$

Vi har altså nu:

$$-\frac{1}{b} \cdot \ln(b - a \cdot y) + \frac{1}{b} \ln(y) + c_2 = x + c_1$$

Konstanterne samles på højre side som $c_3 = c_1 - c_2$

$$-\frac{1}{b} \cdot \ln(b - a \cdot y) + \frac{1}{b} \ln(y) = x + c_3$$

Der ganges med $-b$ på begge sider af lighedstegnet, og der indføres $c_4 = -b \cdot c_3$

$$\ln(b - a \cdot y) - \ln(y) = -b \cdot x + c_4$$

Med logaritmeregnereglen $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$ fås nu:

$$\ln\left(\frac{b - a \cdot y}{y}\right) = -b \cdot x + c_4$$

Herefter opløftes e i resultatet på begge sider:

$$e^{\ln\left(\frac{b-a \cdot y}{y}\right)} = e^{-b \cdot x + c_4}$$

$$\frac{b - a \cdot y}{y} = e^{-bx} \cdot e^{c_4}$$

$$\frac{b}{y} - a = e^{c_4} \cdot e^{-b \cdot x}$$

$$\frac{b}{y} = a + e^{c_4} \cdot e^{-b \cdot x}$$

$$\frac{y}{b} = \frac{1}{a + e^{c_4} \cdot e^{-b \cdot x}}$$

$$y = \frac{b}{a + e^{c_4} \cdot e^{-b \cdot x}}$$

Højresiden er en brøk, som forkortes med a :

$$y = \frac{\frac{b}{a}}{\frac{a}{a} + \frac{e^{c_4}}{a} \cdot e^{-b \cdot x}}$$

I det vi sætter $c = \frac{e^{c_4}}{a}$, og dermed kan konstatere at $c > 0$, fås endeligt:

$$y = \frac{\frac{b}{a}}{1 + c \cdot e^{-b \cdot x}}$$

Hvis differentialligningen i udgangspunktet omskrives ved at sætte a uden for parentes, fås:

$$y' = y \cdot (b - a \cdot y) = y \cdot a \cdot \left(\frac{b}{a} - y\right)$$

Vi definerer nu $M = \frac{b}{a}$, hvor af følger at $b = a \cdot M$

Ved indsættelse i løsningsformlen ovenfor fås dermed for $y' = a \cdot y \cdot (M - y)$ løsningen

$$y = \frac{M}{1 + c \cdot e^{-a \cdot M \cdot x}}$$