Beviser i differentialregningen

KBJ, december 2024 *2s Ma*

Eksempler på spørgsmål til en mundtlig eksamen:

1. Redegør for emnet *afledt funktion*. Kom herunder ind på beviset for at den afledte funktion til funktionen $f(x) = x^2$. Inddrag evt. temaopgave om differentialregning.

2. Redegør for emnet *afledt funktion*. Kom herunder ind på beviset for den afledte funktion til funktionen $f(x) = ax + b$ Inddrag evt. temaopgave om differentialregning.

3. Redegør for emnet *afledt funktion*. Kom herunder ind på beviset for at den afledte funktion til funktionen $f(x) = \frac{1}{x}$. Inddrag evt. temaopgave om differentialregning.

4. Redegør for emnet *afledt funktion*. Kom herunder ind på beviset for den afledte funktion til funktionen $f(x) = \sqrt{x}$. Inddrag evt. temaopgave om differentialregning.

5. Redegør for emnet *afledt funktion*. Kom herunder ind på beviset for konstant- og sumreglen og udnyt disse til at bestemme den afledte funktion til andengradspolynomiet $f(x) = ax^2 + bx + c$. Inddrag evt. temaopgave om differentialregning.

6. Redegør for emnet *afledt funktion*. Kom herunder ind på beviset for tangentens ligning. Inddrag evt. temaopgave om differentialregning.

7. Redegør for emnet *monotoniforhold*. Kom herunder ind på beviset for monotoniforholdene for andengradspolynomiet $f(x) = ax^2 + bx + c$. Inddrag evt. temaopgave om differentialregning.

Sætning 1: Differentialkvotient for x og c.

KBJ, december 2024 *2s Ma*

Sætning

Hvis $f(x) = x$ så er $f'(x) = 1$ og hvis $f(x) = c$ så er $f'(x) = 0$

Bevis 1: $f(x) = x$

<u>Trin 1</u>

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{x + \Delta x - x}{\Delta x}$$

<u>Trin 2</u>

$$\frac{x + \Delta x - x}{\Delta x} = \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1$$

<u>Trin 3</u>

For $\Delta x \to 0$

gælder at

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 1 \quad \to \quad 1 = f'(x)$$

Bevis 2: $f(x) = c$

<u>Trin 1</u>

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{c - c}{\Delta x}$$

<u>Trin 2</u>

$$\frac{c - c}{\Delta x} = \frac{0}{\Delta x} = 0$$

<u>Trin 3</u>

For $\Delta x \to 0$ gælder at $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 0 \quad \to \quad 0 = f'(x)$

Sætning 2: Differentialkvotient for x^2

KBJ, december 2024 *2s Ma*

Sætning

Hvis $f(x) = x^2$ så er $f'(x) = 2x$

Bevis:

Trin 1

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{(x + \Delta x)^2 - x^2}{\Delta x}$$

Trin 2

$$\frac{(x + \Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = \frac{x^2 + \Delta x^2 + 2x\Delta x - x^2}{\Delta x} = \frac{\Delta x^2 + 2x\Delta x}{\Delta x} = \frac{\Delta x^2}{\Delta x} + \frac{2x\Delta x}{\Delta x} = \Delta x + 2x$$

Trin 3

For $\Delta x \to 0$

gælder at

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \Delta x + 2x \quad \to \quad 0 + 2x = 2x = f'(x)$$

Sætning 3: Differentialkvotient for $ax + b$

KBJ, december 2024 *2s Ma*

Sætning

Hvis $f(x) = ax + b$ så er $f'(x) = a$

Bevis:

<u>Trin 1</u>

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{a(x + \Delta x) + b - (ax + b)}{\Delta x}$$

<u>Trin 2</u>

$$\frac{a(x + \Delta x) + b - (ax + b)}{\Delta x} = \frac{ax + a\Delta x + b - ax - b}{\Delta x} = \frac{a\Delta x}{\Delta x} = a$$

<u>Trin 3</u>

For $\Delta x \to 0$

gælder at

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = a \quad \to \quad a = f'(x)$$

Sætning 4: Differentialkvotient for $\frac{1}{x}$

KBJ, december 2024 *2s Ma*

Sætning

Hvis $f(x) = \frac{1}{x}$ så er $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$

Bevis:

Trin 1

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{\frac{1}{x+\Delta \mathrm{x}} - \frac{1}{x}}{\Delta x}$$

Trin 2

$$\frac{\frac{1}{x+\Delta \mathrm{x}} - \frac{1}{x}}{\Delta x} = \frac{\frac{x}{x(x+\Delta \mathrm{x})} - \frac{x+\Delta \mathrm{x}}{x(x+\Delta \mathrm{x})}}{\Delta x} = \frac{\frac{x-x-\Delta \mathrm{x}}{x(x+\Delta \mathrm{x})}}{\Delta x} = \frac{\frac{-\Delta \mathrm{x}}{x(x+\Delta \mathrm{x})}}{\Delta x} = \frac{-\Delta \mathrm{x}}{x(x+\Delta \mathrm{x})} \cdot \frac{1}{\Delta x}$$

$$= -\frac{\Delta \mathrm{x}}{x(x+\Delta \mathrm{x})\Delta \mathrm{x}} = -\frac{1}{x(x+\Delta x)} = -\frac{1}{x^2 + x\Delta x}$$

Trin 3

For $\Delta x \to 0$

gælder at

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{1}{x^2 + x\Delta x} \to -\frac{1}{x^2 + x \cdot 0} = -\frac{1}{x^2} = f'(x)$$

Sætning 5: Differentialkvotient for $\sqrt{x}$

KBJ, december 2024 *2s Ma*

Sætning

Hvis $f(x) = \sqrt{x}$ så er $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

Bevis:

<u>Trin 1</u>

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{\sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x}$$

<u>Trin 2</u>

$$\frac{\sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x} = \frac{\left(\sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}\right)}{\Delta x\left(\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}\right)} = \frac{\left(\sqrt{x+\Delta x}\right)^2 - \left(\sqrt{x}\right)^2}{\Delta x\left(\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}\right)}$$

$$= \frac{x + \Delta x - x}{\Delta x\left(\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}\right)} = \frac{\Delta x}{\Delta x\left(\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}\right)} = \frac{1}{\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}}$$

<u>Trin 3</u>

For $\Delta x \rightarrow 0$

gælder at

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{x+0} + \sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} = f'(x)$$

Sætning 6: Konstantreglen

Sætning

Hvis $f(x) = k \cdot g(x)$ så er $f'(x) = k \cdot g'(x)$

Bevis:

<u>Trin 1</u>

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{k \cdot g(x+\Delta x) - k \cdot g(x)}{\Delta x}$$

<u>Trin 2</u>

$$\frac{k \cdot g(x+\Delta x) - k \cdot g(x)}{\Delta x} = \frac{k(g(x+\Delta x) - g(x))}{\Delta x} = k \cdot \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x}$$

<u>Trin 3</u>

For $\Delta x \to 0$

gælder at

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = k \cdot \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} \to \ k \cdot g'(x) = f'(x)$$

Sætning 7: Sumreglen

KBJ, december 2024 *2s Ma*

Sætning

Hvis $f(x) = g(x) + h(x)$ så er $f'(x) = g'(x) + h'(x)$

Bevis:

Trin 1

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{g(x+\Delta x) + h(x+\Delta x) - (g(x) + h(x))}{\Delta x}$$

Trin 2

$$\frac{g(x+\Delta x) + h(x+\Delta x) - \big(g(x) + h(x)\big)}{\Delta x} = \frac{g(x+\Delta x) + h(x+\Delta x) - g(x) - h(x)}{\Delta x}$$

$$= \frac{g(x+\Delta x) - g(x) + h(x+\Delta x) - h(x)}{\Delta x} = \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} + \frac{h(x+\Delta x) - h(x)}{\Delta x}$$

Trin 3

For $\Delta x \rightarrow 0$

gælder at

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} + \frac{h(x+\Delta x) - h(x)}{\Delta x} \rightarrow \; g'(x) + h'(x) = f'(x)$$

Sætning 8: Differentialkvotient for $\boldsymbol{ax^2 + bx + c}$

Sætning

Hvis $f(x) = ax^2 + bx + c$ så er $f'(x) = 2ax + b$

Bevis:

Hvis funktionen er givet som $f(x) = ax^2 + bx + c$

Så er differentialkvotienten givet som $f'(x) = (ax^2 + bx + c)'$

Med sumreglen (sætning 7) kan dette omskrives:

$f'(x) = (ax^2 + bx + c)' = (ax^2)' + (bx)' + (c)'$

Med konstantreglen (sætning 8) kan dette yderligere omskrives:

$f'(x) = (ax^2)' + (bx)' + (c)' = a \cdot (x^2)' + b \cdot (x)' + (c)$

Med differentialkvotienterne for x^2, x og c (sætning 1, 2 og 3) fås nu:

$f'(x) = a \cdot (x^2)' + b \cdot (x)' + (c) = a \cdot 2x + b \cdot 1 + 0 = 2ax + b$

Sætning 9: Tangentens ligning

KBJ, december 2024 *2s Ma*

Sætning

Tangenten til grafen for funktionen $f(x)$ med røringspunkt $\big(x_0, f(x_0)\big)$ har ligningen

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

Bevis

En tangent er en ret linje med en ligning på formen: $y = ax + b$

Pr. definition ved vi at tangenten til grafen for $f(x)$ i punktet hvor $x = x_0$ har hældningen $f'(x_0)$.

Der gælder altså: $a = f'(x_0)$.

Det vides endvidere at tangenten skal gå igennem punktet $(x, y) = \big(x_0, f(x_0)\big)$. Dette punkt indsættes sammen med hældningen i tangentens ligning og b isoleres:

$f(x_0) = f'(x_0) \cdot x_0 + b$
$b = f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0$

Udtrykkene for a og b kan nu indsættes i den generelle ligning for en linje:

$y = ax + b$

$y = f'(x_0) \cdot x + f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0$

$y = f'(x_0) \cdot x - f'(x_0) \cdot x_0 + f(x_0)$

$y = f'(x_0)(x - x\text{-}_0) + f(x_0)$

Sætning 10: Monotoniforhold for $\boldsymbol{ax^2 + bx + c}$

KBJ, december 2024 *2s Ma*

Sætning

Monotoniforholdene for funktionen $f(x) = ax^2 + bx + c$ er:

For $a > 0$: f er aftagende i $]-\infty; -\frac{b}{2a}]$ og voksende i $[-\frac{b}{2a}; \infty[$.

For $a < 0$: f er voksende i $]-\infty; -\frac{b}{2a}]$ og aftagende i $[-\frac{b}{2a}; \infty[$

Bevis

Først bestemmes den afledte funktion $f'(x)$:

$f'(x) = a \cdot 2x + b \cdot 1 + 0 = 2ax + b$

De mulige toppunkter bestemmes ved at løse ligningen $f'(x) = 0$:

$$2ax + b = 0$$
$$2ax = -b$$
$$x = -\frac{b}{2a}$$

Der er altså ét muligt toppunkt i punktet hvor $x = -\frac{b}{2a}$.

Fortegnene for $f'(x)$ undersøges rundt om dette toppunkt.

Den afledte funktion er givet ved $f'(x) = 2ax + b$. Dette er en lineær funktion med hældning $2a$.

Hvis $a > 0$ er $f'(x)$ voksende. Den er altså *negativ* til venstre for sit nulpunkt og *positiv* til højre for sit nulpunkt. Funktionen f er altså *aftagende* i $]-\infty; -\frac{b}{2a}]$ og *voksende* i $[-\frac{b}{2a}; \infty[$.

Hvis $a < 0$ er $f'(x)$ aftagende. Den er altså *positiv* til venstre for sit nulpunkt og *negativ* til højre for sit nulpunkt. Funktionen f er altså *voksende* i $]-\infty; -\frac{b}{2a}]$ og *aftagende* i $[-\frac{b}{2a}; \infty[$.