NOTE: Bevis for panserformlen

KBJ, december 2024 *3u MA*

Definition: Lineær 1. ordens differentialligning

$$y' + a(x) \cdot y = b(x)$$

Sætning: Panserformlen

En lineær 1. ordens differentialligning $y' + a(x) \cdot y = b(x)$ har den fuldstændige løsning:

$$y = \mathrm{e}^{-A(x)} \cdot \int b(x) \cdot \mathrm{e}^{A(x)}\, dx + c \cdot \mathrm{e}^{-A(x)},$$

hvor $A(x)$ er en stamfunktion til $a(x)$.

Bevis:

Vi betragter den generelle lineære 1. ordens differentialligning:

$y' + a(x) \cdot y = b(x)$

Lad $A(x)$ være en stamfunktion til $a(x)$. Gang med $\mathrm{e}^{A(x)}$ på begge sider i differentialligningen:

$\mathrm{e}^{A(x)} \cdot (y' + a(x) \cdot y) = \mathrm{e}^{A(x)} \cdot b(x)$

På venstre side ganges ind i parentesens:

$\mathrm{e}^{A(x)} \cdot y' + \mathrm{e}^{A(x)} \cdot a(x) \cdot y = \mathrm{e}^{A(x)} \cdot b(x)$

> Det ses at $\mathrm{e}^{A(x)}$ er en sammensat funktion med e^{x} som ydre funktion og $A(x)$ som indre.
> Med kædereglen fås således: $\left(\mathrm{e}^{A(x)}\right)' = A'(x) \cdot \mathrm{e}^{A(x)} = a(x) \cdot \mathrm{e}^{A(x)}$
> Dette udtryk indsættes i differentialligningen:

$\mathrm{e}^{A(x)} \cdot y' + \left(\mathrm{e}^{A(x)}\right)' \cdot y = \mathrm{e}^{A(x)} \cdot b(x)$

Det ses desuden, at der om produktet $y \cdot \mathrm{e}^{A(x)}$ med produktreglen vil følge:
$\left(y \cdot \mathrm{e}^{A(x)}\right)' = y' \cdot \mathrm{e}^{A(x)} + y \cdot \left(\mathrm{e}^{A(x)}\right)'$
Dette udtryk svarer til venstresiden i differentialligningen, der derfor kan skrives:

$$\left(y \cdot \mathrm{e}^{A(x)}\right)' = \mathrm{e}^{A(x)} \cdot b(x)$$

Ved at integrere på begge sider af ligningen fås:

$$\int \left(y \cdot \mathrm{e}^{A(x)}\right)' dx = \int \mathrm{e}^{A(x)} \cdot b(x)\, dx$$

$$y \cdot \mathrm{e}^{A(x)} + k = \int \mathrm{e}^{A(x)} \cdot b(x)\, dx$$

Konstanten flyttes til den anden side, og det besluttes at sætte $-k = c$

$$y \cdot \mathrm{e}^{A(x)} = \int \mathrm{e}^{A(x)} \cdot b(x)\, dx + c$$

Der ganges nu på begge sider af ligningen med $\mathrm{e}^{-A(x)}$:

$$\mathrm{e}^{-A(x)} \cdot y \cdot \mathrm{e}^{A(x)} = \mathrm{e}^{-A(x)} \left(\int \mathrm{e}^{A(x)} \cdot b(x)\, dx + c\right)$$

Ved at udnytte en potensregneregel fås $\mathrm{e}^{-A(x)} \cdot \mathrm{e}^{A(x)} = \mathrm{e}^{-A(x)+A(x)} = \mathrm{e}^{0} = 1$.

$$y = \mathrm{e}^{-A(x)} \cdot \int \mathrm{e}^{A(x)} \cdot b(x)\, dx + c \cdot \mathrm{e}^{-A(x)}$$

Dermed er panserformlen udledt:

$$y = \mathrm{e}^{-A(x)} \cdot \int b(x) \cdot \mathrm{e}^{A(x)}\, dx + c \cdot \mathrm{e}^{-A(x)}$$

Definition: Eksponentiel differentialligning

$y' = k \cdot y$

Differentialligningen kan omskrives til: $y' - k \cdot y = 0$

Det ses at den er en lineær 1.ordens differentialligning på formen $y' + a(x) \cdot y = b(x)$ med $a(x) = -k$ og $b(x) = 0$

Sætning:

Den fuldstændige løsning til den eksponentielle differentialligning er:

$y = c \cdot \mathrm{e}^{k \cdot x}$

Bevis:

Til $a(x) = -k$ vælges stamfunktionen $A(x) = -k \cdot x$.

Med panserformlen fås nu, i det vi kalder konstanten for c_1:

$$y = \mathrm{e}^{-A(x)} \cdot \int b(x) \cdot \mathrm{e}^{A(x)}\, dx + c_1 \cdot \mathrm{e}^{-A(x)}$$

$$y = \mathrm{e}^{-(-k \cdot x)} \cdot \int 0 \cdot \mathrm{e}^{-k \cdot x}\, dx + c_1 \cdot \mathrm{e}^{-(-k \cdot x)}$$

$$y = \mathrm{e}^{k \cdot x} \cdot \int 0\, dx + c_1 \cdot \mathrm{e}^{k \cdot x}$$

$$y = \mathrm{e}^{k \cdot x} \cdot c_2 + c_1 \cdot \mathrm{e}^{k \cdot x}$$

$$y = (c_2 + c_1) \cdot \mathrm{e}^{kx}$$

I det vi sætter $c = c_1 + c_2$ fås:

$$y = c \cdot \mathrm{e}^{k \cdot x}$$

Definition: Eksponentiel differentialligning

$y' = b - a \cdot y$

Differentialligningen kan omskrives til: $y' + a \cdot y = b$

Det ses at den er en lineær 1.ordens differentialligning på formen $y' + a(x) \cdot y = b(x)$ med $a(x) = a$ og $b(x) = b$

Sætning:
Den fuldstændige løsning til den forskudte eksponentielle differentialligning er:
$y = \frac{b}{a} + c \cdot \mathrm{e}^{-a \cdot x}$

Bevis:

Til $a(x) = a$ vælges stamfunktionen $A(x) = a \cdot x$.
Med panserformlen fås nu, i det vi kalder konstanten for c_1:

$$y = \mathrm{e}^{-a \cdot x} \cdot \int b \cdot \mathrm{e}^{a \cdot x}\, dx + c_1 \cdot \mathrm{e}^{-a \cdot x}$$

$$y = \mathrm{e}^{-a \cdot x} \cdot b \cdot \int \mathrm{e}^{a \cdot x}\, dx + c_1 \cdot \mathrm{e}^{-a \cdot x}$$

$$y = \mathrm{e}^{-a \cdot x} \cdot \left(b \cdot \frac{1}{a} \cdot \mathrm{e}^{a \cdot x} + c_2\right) + c_1 \cdot \mathrm{e}^{-a \cdot x}$$

$$y = \mathrm{e}^{-a \cdot x} \cdot \left(\frac{b}{a} \cdot \mathrm{e}^{a \cdot x} + c_2\right) + c_1 \cdot \mathrm{e}^{-a \cdot x}$$

$$y = \mathrm{e}^{-a \cdot x} \cdot \frac{b}{a} \cdot \mathrm{e}^{a \cdot x} + e^{-a \cdot x} \cdot c_2 + c_1 \cdot \mathrm{e}^{-a \cdot x}$$

Da $\mathrm{e}^{-a \cdot x} \cdot \mathrm{e}^{a \cdot x} = 1$ fås:

$$y = \frac{b}{a} + (c_2 + c_1) \cdot \mathrm{e}^{-a \cdot x}$$

Vi sætter nu $c = c_2 + c_1$

$$y = \frac{b}{a} + c \cdot \mathrm{e}^{-a \cdot x}$$