

Note: Integral som uendelig sum

KBJ, december 2024

3u MA

Lad f være en funktion på $[a; b]$ (dvs. at $a \leq x \leq b$).

Lad $[a; b]$ være inddelt i n intervaller, hver med bredden: $\Delta x = \frac{b-a}{n}$.

Lad $x_1, \dots, x_n$ være tilfældigt valgte x -værdier i hvert interval (f.eks. midtpunktet). Således repræsenterer x_i en tilfældig værdi i interval nr. i .

For interval nr. i gælder, at der oven på intervallet kan tegnes et rektangel med arealet: $f(x_i) \cdot \Delta x$

Summen af disse arealer giver et tilnærmet bud på arealet af området mellem grafen og førsteaksen.

Vi kan opskrive summen, kaldet *Riemann-summen*¹, med sum-tegns-notation:

$$\sum_{i=1}^n f(x_i) \cdot \Delta x$$

Sumtegnet betyder, at i gennemløber hvert hele tal fra 1 til n , og for hver værdi fås et led til summen, med den pågældende i -værdi. For $n = 4$ fås f.eks.:

$$\sum_{i=1}^4 f(x_i) \cdot \Delta x = f(x_1) \cdot \Delta x + f(x_2) \cdot \Delta x + f(x_3) \cdot \Delta x + f(x_4) \cdot \Delta x$$

Hvis vi lader antallet af intervaller vi inddeler førsteaksen i vokse, bliver bredden af hver enkelt mindre. Vi kan således se at $n \rightarrow \infty$ og $\Delta x \rightarrow 0$ er to sider af samme sag.

Ved integralet af f fra a til b vil vi således pr. definition forstå grænseværdien:

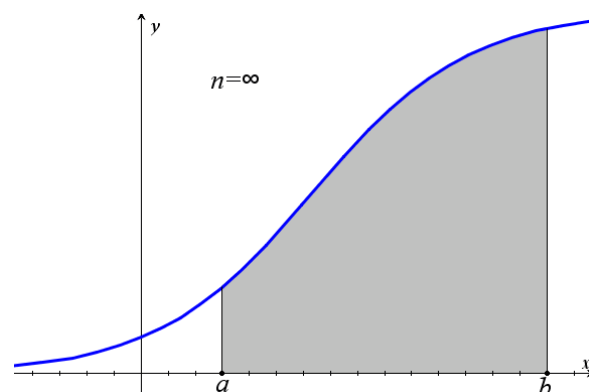
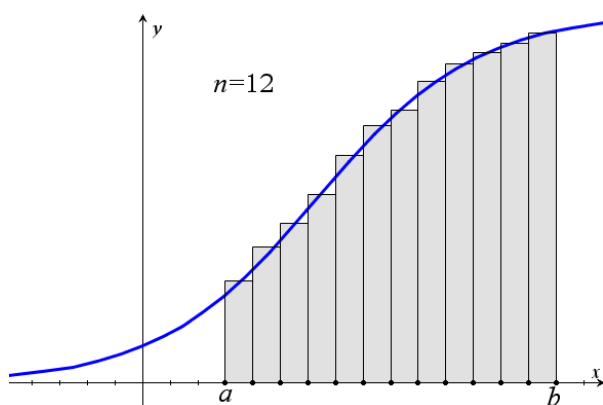
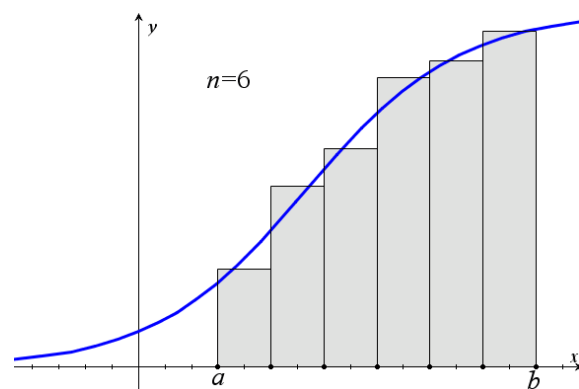
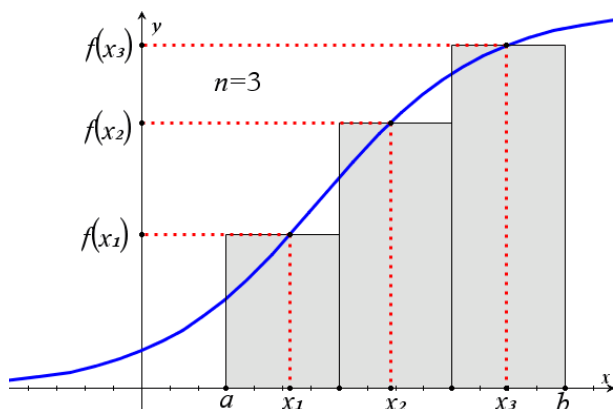
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \cdot \Delta x = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i) \cdot \Delta x = \int_a^b f(x) dx$$

Hvis denne grænseværdi eksisterer, så vil vi kalde f integrabel.

Integraler er altså en sum af uendeligt mange, uendeligt små, led.

Tankegangen er illustreret på næste side.

¹ Efter den tyske matematiker Bernhard Riemann (1826-1866).



Vi definerer nu en funktion $F(x)$ ved:

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

Det kan da bevises (hvad der undlades) at $F'(x) = f(x)$, hvorfor $F(x)$ er en stamfunktion til $f(x)$. Vi kan altså arbejde med integraler for en funktion f , ved at bestemme stamfunktioner for denne.

Vi kan også se, at et bestemt integral netop har karakter af at være summen af en lang række små tilvækster. Hvis vi f.eks. har en hastighedsfunktion $v(t)$, kan vi se at i et lille bitte tidsinterval Δx , vil det bevægede objekt flytte sig afstanden $\Delta S = v(t) \cdot \Delta t$. Hvis tidsintervallet bliver uendeligt lille (kaldet infinitesimalt), vil vi skrive dette lille tilvækst i bevægelsen: $dS = v(t)dt$. Vi vil da kunne opskrive den samlede bevægelse S , som en uendelig sum af uendeligt små tilvækster:

$$S = \int_0^S dS = \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt$$

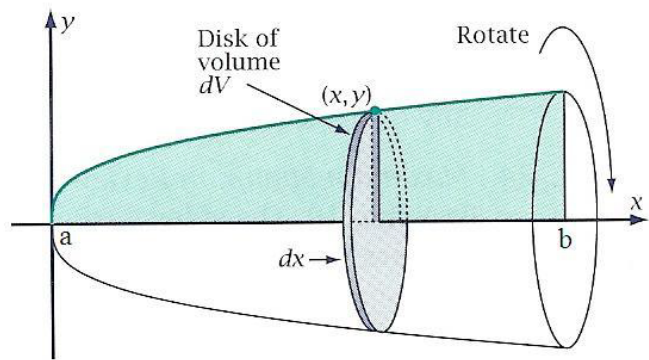
Vi kan altså netop udregne den samlede bevægelse S af et objekt, ved at summere de uendeligt mange uendeligt små bevægelser dS , som hver især er givet ved hastighed gange tid: $v(t) \cdot dt$.

Sætning:

For en funktion f afgrænses en punktmængde M mellem grafen for f , førsteaksen samt linjerne $x = a$ og $x = b$.

Hvis punktmængden M drejes 360° om førsteaksen, frembringes et omdrejningslegeme med volumen V , bestemt ved:

$$V = \pi \cdot \int_a^b f(x)^2 dx$$



Bevis

Hvis vi inddeler førsteaksen fra a til b i n lige store bider med bredde $\Delta x = \frac{b-a}{n}$, og i interval nummer i vælger en tilfældig x -værdi x_i , så vil man for interval nummer i kunne lave en cylinder med højde Δx og radius $f(x_i)$. Cylinderens volumen bliver da $\Delta V_i = \pi \cdot f(x_i)^2 \cdot \Delta x$.

Vi laver en nu en funktion som angiver volumen-funktion:

$$V(n) = \sum_{i=1}^n \Delta V_i = \sum_{i=1}^n \pi \cdot f(x_i)^2 \cdot \Delta x = \pi \cdot \sum_{i=1}^n f(x_i)^2 \cdot \Delta x$$

Med definitionen på bestemt integral ved Riemann-sum fås:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i)^2 \cdot \Delta x = \int_a^b f(x)^2 dx$$

Endvidere indser vi at $V = \lim_{n \rightarrow \infty} V(n)$

Heraf følger, i det $n \rightarrow \infty$ (antal intervaller går mod uendeligt) tilsvarende $\Delta x \rightarrow 0$ (intervalbredden går mod 0):

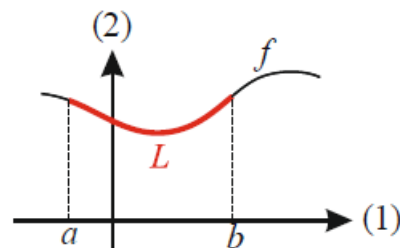
$$V = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} V(n) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \pi \cdot \sum_{i=1}^n f(x_i)^2 \cdot \Delta x = \pi \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i)^2 \cdot \Delta x = \pi \cdot \int_a^b f(x)^2 dx$$

QED.

Sætning:

Den del af en graf for en differentiabel funktion f , som afgrænses af de lodrette linjer $x = a$ og $x = b$, har længden

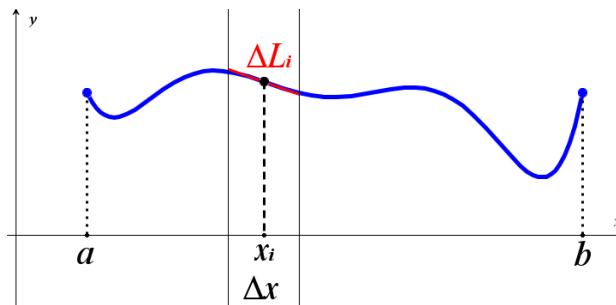
$$L = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$$



Bevis:

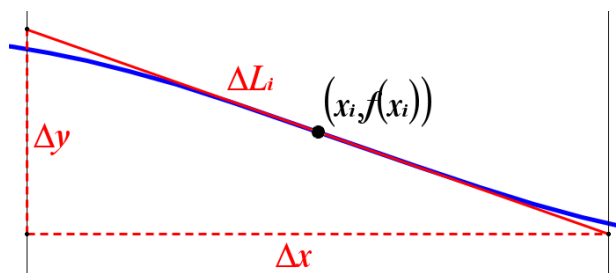
Vi inddeler førsteaksen i n lige brede intervaller, der hver får bredden $\Delta x = \frac{b-a}{n}$.

Midtpunktet i interval nummer i kalder vi x_i og kurvelængden af grafen i intervallet kaldes ΔL_i .



Vi tilnærmer nu ΔL_i ved hjælp af den afledede funktion, i det vi laver et linjestykke gennem $(x_i, f(x_i))$ med hældning $f'(x_i)$ får vi:

$$\Delta y = f'(x_i) \cdot \Delta x$$



Med Pythagoras sætning fås:

$$\begin{aligned} \Delta L_i &= \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = \sqrt{\Delta x^2 + (f'(x_i) \cdot \Delta x)^2} = \sqrt{\Delta x^2 + f'(x_i)^2 \cdot \Delta x^2} = \sqrt{(1 + f'(x_i)^2) \cdot \Delta x^2} \\ \Delta L_i &= \sqrt{1 + f'(x_i)^2} \cdot \Delta x \end{aligned}$$

Den samlede kurvelængde kan da omtrentligt bestemmes som:

$$L \approx \Delta L_1 + \Delta L_2 + \dots + \Delta L_i + \dots + \Delta L_n = \sum_{i=1}^n \Delta L_i = \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + f'(x_i)^2} \cdot \Delta x$$

Ved at lade $n \rightarrow \infty$, eller tilsvarende $\Delta x \rightarrow 0$, går afvigelsen fra den ægte L -værdi mod 0. Der fås:

$$L = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + f'(x_i)^2} \cdot \Delta x$$

Da dette er grænseværdien for en Riemann-sum, når antal led går mod uendeligt, fås pr. definition:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$$