Beviser i integralregningen

KBJ, november 2024

Teoretiske forudsætninger:

Definition: $F(x)$ er stamfunktion til $f(x)$ hvis $F'(x) = f(x)$.

Definition: Det bestemte integral af $f(x)$ fra a til b bestemmes som: $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$, hvor $F(x)$ er en vilkårlig stamfunktion til $f(x)$.

Sætning (konstantregel for afledet funktion): Hvis $f(x) = k \cdot g(x)$ så er $f'(x) = k \cdot g'(x)$.
Dette kan også udtrykkes: $\left(k \cdot f(x)\right)' = k \cdot \left(f(x)\right)'$

Sætning (sumregel for afledet funktion): Hvis $f(x) = g(x) \pm h(x)$ så er $f'(x) = g'(x) \pm h'(x)$.
Dette kan også udtrykkes: $\left(f(x) \pm g(x)\right)' = \left(f(x)\right)' \pm \left(g(x)\right)'$

Sætning: Den afledede funktion til $f(x) = x^n$ er $f'(x) = n \cdot x^{n-1}$
Dette kan også udtrykkes: $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$

Sætning: Den afledede funktion til $f(x) = a^x$ er $f'(x) = \ln(a) \cdot a^x$.
Dette kan også udtrykkes: $(a^x)' = \ln(a) \cdot a^x$

Sætning: Den afledede funktion til $f(x) = c$ er $f'(x) = 0$.
Dette kan også udtrykkes: $(c)' = 0$

Sætning 1: Konstantreglen

KBJ, november 2024

Sætning

Hvis $G(x)$ er stamfunktiong til $g(x)$, så er $F(x) = k \cdot G(x)$ stamfunktion til $f(x) = k \cdot g(x)$.

Dette kan også skrives som integral:

$$\int k \cdot f(x)dx = k \cdot \int f(x)dx$$

Bevis

$F(x)$ er stamfunktion til $f(x)$ netop hvis $F'(x) = f(x)$.

$F(x) = k \cdot G(x)$

$F'(x) = \left(k \cdot G(x)\right)'$

Med konstantreglen for afledede funktioner - $\left(k \cdot f(x)\right)' = k \cdot \left(f(x)\right)'$ - fås:

$F'(x) = k \cdot \left(G(x)\right)'$

$F'(x) = k \cdot G'(x)$

Da $G(x)$ stamfunktion til $g(x)$ gælder pr. definition at $G'(x) = g(x)$. Heraf følger:

$F'(x) = k \cdot g(x)$

$F'(x) = f(x)$

Det er altså vist at $F(x) = k \cdot G(x)$ er en stamfunktion til $f(x) = k \cdot g(x)$.

Sætning 2: Sumreglen

KBJ, november 2024

Sætning

Hvis $G(x)$ og $H(x)$ er stamfunktioner til hhv. $g(x)$ og $h(x)$, så er $F(x) = H(x) \pm G(x)$ stamfunktion til $f(x) = g(x) \pm h(x)$.

Dette kan også skrives som integral:

$$\int \big(f(x) \pm g(x)\big)dx = \int f(x)\, dx \pm \int g(x) dx$$

Bevis

$F(x)$ er stamfunktion til $f(x)$ netop hvis $F'(x) = f(x)$.

$F(x) = G(x) + H(x)$

$F'(x) = (G(x) + H(x))'$

Med sumreglen for afledet funktion - $\big(f(x) \pm g(x)\big)' = \big(f(x)\big)' \pm \big(g(x)\big)'$ - fås:

$F'(x) = \big(G(x)\big)' + \big(H(x)\big)'$

$F'(x) = G'(x) + H'(x)$

Da $G(x)$ stamfunktion til $g(x)$ gælder pr. definition at $G'(x) = g(x)$ og
da $H(x)$ stamfunktion til $h(x)$ gælder pr. definition at $H'(x) = h(x)$. Heraf følger:

$F'(x) = g(x) + h(x)$

$F'(x) = f(x)$

Det er altså vist at $F(x) = G(x) + H(x)$ er en stamfunktion til $f(x) = g(x) + h(x)$.

Sætning 3: Alle stamfunktioner til $f(x)$

KBJ, november 2024

Sætning

Hvis $F(x)$ er stamfunktion til $f(x)$, så kan alle stamfunktioner skrives på formen $F(x) + c$ og enhver funktion skrevet på denne form er stamfunktion til $f(x)$.

Dette kan udtrykkes på integralform:

$$\int f(x)dx = F(x) + c$$

Bevis:

Først vises at hvis $F(x)$ er en stamfunktion til $f(x)$, så er $F(x) + c$ det også. Udgangspunktet er definitionen af stamfunktion: $F(x)$ er en stamfunktion til $f(x)$ netop hvis $F'(x) = f(x)$.

Lad $F(x)$ være en stamfunktion til $f(x)$. Der gælder altså at $F'(x) = f(x)$.
Vi viser nu at så er $F(x) + c$ også en stamfunktion til $f(x)$.

Med sumreglen for afledet funktion fås:

$$(F(x) + c)' = \left(F(x)\right)' + (c)' = F'(x) + 0 = F'(x) = f(x)$$

Da det gælder at $(F(x) + c)' = f(x)$ er $F(x) + c$ en stamfunktion til $f(x)$.

Dernæst vises, at hvis både $F_1(x)$ og $F_2(x)$ er stamfunktioner til $f(x)$, så forskellen på de to funktioner en konstant c. Det vil sige at: $F_1(x) - F_2(x) = c$

Vi definerer nu en funktion: $G(x) = F_1(x) - F_2(x)$ og ser på dens afledede funktion:

$$G'(x) = \left(F_1\,(x) - F_2(x)\right)' = \left(F_1(x)\right)' - \left(F_2(x)\right)' = F_1'(x) - F_2'(x) = f(x) - f(x) = 0$$

Da vi ved at $G'(x) = 0$ netop hvis $G(x) = c$ er det nu bestemt at:

$$G(x) = F_1(x) - F_2(x) = c$$

Det er altså vist at hvis $F(x)$ er stamfunktion til $f(x)$, så kan alle stamfunktioner skrives på formen $F(x) + c$ samt at enhver funktion skrevet på denne form er stamfunktion til $f(x)$.

Sætning 4: Stamfunktioner til $ax + b$

KBJ, november 2024

Sætning

Stamfunktionerne til $f(x) = ax + b$ kan skrives som $F(x) = \frac{1}{2}ax^2 + bx + c$

Bevis

Funktionen $f(x) = ax + b$ integreres.

Med sum reglen fås:

$$\int (ax + b)\,dx = \int ax\,dx + \int b\,dx$$

Med konstantreglen fås:

$$\int ax\,dx + \int b\,dx = a \cdot \int x\,dx + b \cdot \int 1\,dx$$

Det udnyttes nu at der gælder (sætning 5):

$$\int x\,dx = \int x^1\,dx = \frac{1}{1+1}x^{1+1} = \frac{1}{2}x^2$$

$$\int 1\,dx = \int x^0 dx = \frac{1}{0+1}x^{0+1} = \frac{1}{1} \cdot x^1 = 1 \cdot x = x$$

Heraf følger:

$$\int (ax + b)\,dx = a \cdot \int x\,dx + b\int 1\,dx = a \cdot \frac{1}{2}x^2 + bx = \frac{1}{2}ax^2 + bx$$

Heraf følger at $F(x) = \frac{1}{2}ax^2 + bx$ er en stamfunktion til $f(x) = ax + b$

Heraf følger at alle stamfunktioner til $f(x) = ax + b$ kan skrives $F(x) = \frac{1}{2}ax^2 + bx + c$.

Sætning 5: Stamfunktioner til x^n

KBJ, november 2024

Sætning

$F(x) = \frac{1}{n+1} \cdot x^{n+1}$ er en stamfunktion til $f(x) = x^n$.

Bevis

$F(x)$ er stamfunktion til $f(x)$ netop hvis $F'(x) = f(x)$.

$$F(x) = \frac{1}{n+1} \cdot x^{n+1}$$
$$F'(x) = \left(\frac{1}{n+1} \cdot x^{n+1}\right)'$$

Med konstantreglen for afledede funktioner - $\left(k \cdot f(x)\right)' = k \cdot \left(f(x)\right)'$ - fås:

$$F'(x) = \frac{1}{n+1} \cdot (x^{n+1})'$$

Det udnyttes at $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$

$$F'(x) = \frac{1}{n+1} \cdot (n+1) \cdot x^{n+1-1}$$
$$F'(x) = \frac{n+1}{n+1} \cdot x^n$$
$$F'(x) = 1 \cdot x^n$$
$$F'(x) = x^n$$
$$F'(x) = f(x)$$

Her af følger altså at $F(x) = \frac{1}{n+1} \cdot x^{n+1}$ er en stamfunktion til $f(x) = x^n$

Det følger endvidere at alle stamfunktioner til $f(x) = x^n$ kan skrives som $F(x) = \frac{1}{n+1} \cdot x^{n+1} + c$

Sætning 6: Stamfunktioner til $\boldsymbol{a^x}$

KBJ, november 2024

Sætning

$F(x) = \frac{1}{\ln(a)} \cdot a^x$ er stamfunktion til $f(x) = a^x$.

Særligt gælder at $F(x) = \mathbf{e}^x$ er stamfunktion til $f(x) = \mathbf{e}^x$.

Bevis

$F(x)$ er stamfunktion til $f(x)$ netop hvis $F'(x) = f(x)$.

$$F(x) = \frac{1}{\ln(a)} \cdot a^x$$
$$F'(x) = \left(\frac{1}{\ln(a)} \cdot a^x\right)'$$

Med konstantreglen for afledede funktioner - $\left(k \cdot f(x)\right)' = k \cdot \left(f(x)\right)'$ - fås:

$$F'(x) = \frac{1}{\ln(a)} \cdot (a^x)'$$

Det udnyttes at $(a^x)' = \ln(a) \cdot a^x$

$$F'(x) = \frac{1}{\ln(a)} \cdot \ln(a) \cdot a^x$$
$$F'(x) = \frac{\ln(a)}{\ln(a)} \cdot a^x$$
$$F'(x) = 1 \cdot a^x$$
$$F'(x) = a^x$$
$$F'(x) = f(x)$$

Heraf følger altså at $F(x) = \frac{1}{\ln(a)} \cdot a^x$ er en stamfunktion til $f(x) = a^x$.
Specielt gælder at $F(x) = \frac{1}{\ln(\mathbf{e})} \cdot \mathbf{e}^x = \frac{1}{1} \cdot \mathbf{e}^x = \mathbf{e}^x$ er stamfunktion til $f(x) = \mathbf{e}^x$

Alle stamfunktioner til $f(x) = a^x$ kan altså skrives som $F(x) = \frac{1}{\ln(a)} \cdot a^x + c$.

Sætning 7: Integralregningens fundamentalsætning

KBJ, november 2024

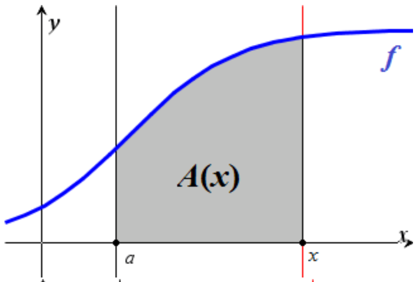
Integralregningens fundamentalsætning:

Hvis f er en ikke-negativ (og kontinuert) funktion, i intervallet $[a; b]$, så kan arealet mellem grafen og x-aksen - afgrænset af linjerne $x = a$ og $x = b$ beregnes som det bestemte integral:

$$\int_a^b f(x)dx$$

Definition: *Arealfunktion*

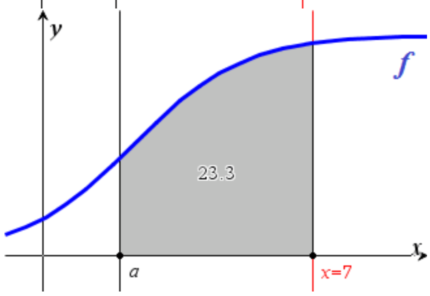
En arealfunktion $A(x)$ til en ikke-negativ kontinuert funktion $f(x)$ angiver arealet under grafen for f fra et punkt a til et punkt x på x-aksen. Grundtanken bag en sådan arealfunktion er vist på figuren til højre.



Specielt gælder: $A(a) = 0$

Eksempel: Funktionen fungerer således, at hvis arealet mellem graf og x-akse fra a til 7 kan måles til at være 23,3, så gælder det at:

$$A(7) = 23{,}3$$



Hjælpesætning: $\boldsymbol{A(x)}$ er stamfunktion til $\boldsymbol{f(x)}$

Hjælpesætning: For en ikke-negativ, kontinuert funktion f, defineret i Intervallet $[a; b]$, er arealfunktionen $A(x)$ en stamfunktion til $f(x)$.

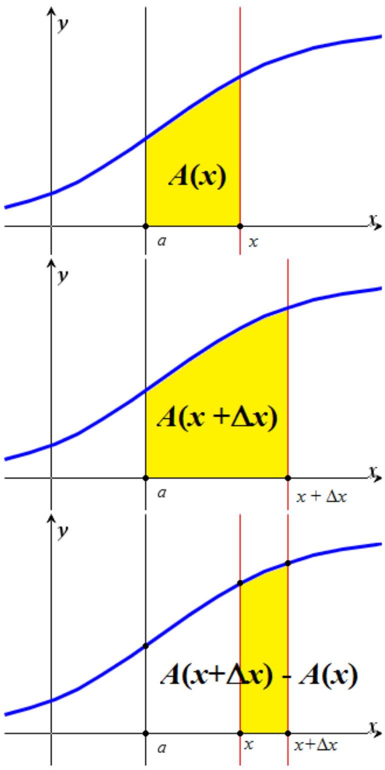
<u>Bevis:</u>

Vi ønsker nu at vise at $A'(x) = f(x)$

Der ses nu på et areal af en "strimmel" mellem graf og x-akse afgrænset fra x til Δx.

Som illustreret på figuren til højre kan arealet af en sådan strimmel udtrykkes ved arealfunktionen som:

$$A(x + \Delta x) - A(x)$$



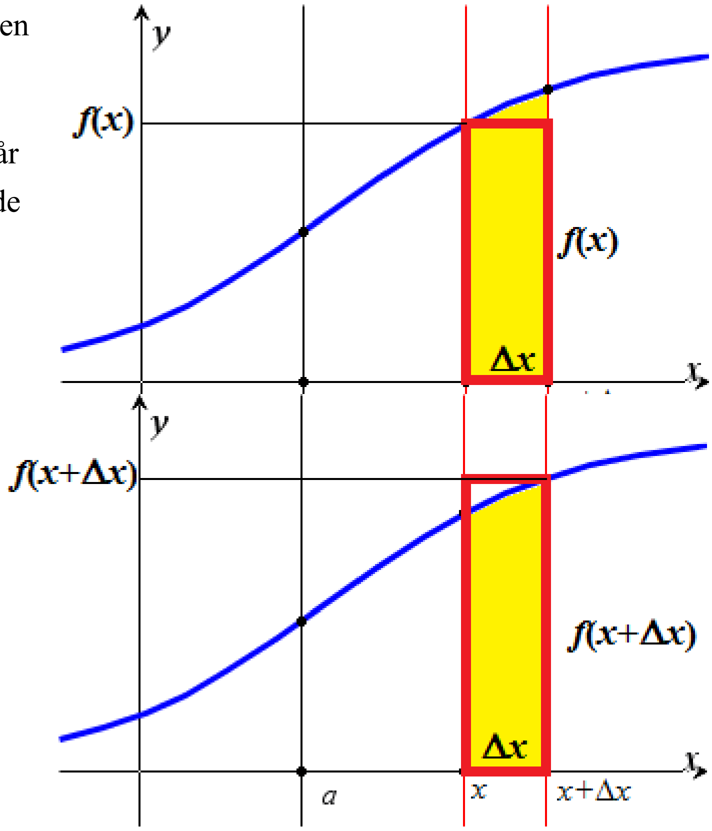
Vi antager nu for nemheds skyld at $f(x)$ er en ikke-aftagende funktion.

Vi indtegner nu et rektangel hvis ene side går fra x til $x + \Delta x$ på x-aksen og den anden side går fra x på x-aksen og op til grafen.

Arealet af dette rektangel er da:
$f(x) \cdot \Delta x$

På samme måde tegnes et rektangel hvis ene side går fra x til $x + \Delta x$ på x-aksen og den anden side går fra $x + \Delta x$ på x-aksen og op til grafen.

Arealet af dette rektangel er da:
$f(x + \Delta x) \cdot \Delta x$



Da det første rektangel oplagt har et areal mindre end eller lig med den gule strimmels areal, mens det andet rektangel har et areal som er større end eller lig med dette areal, fås at:

$$f(x) \cdot \Delta x \leq A(x + \Delta x) - A(x) \leq f(x + \Delta x) \cdot \Delta \mathrm{x}$$

I denne ulighed divideres nu med Δx på begge sider:

$$f(x) \leq \frac{A(x + \Delta x) - A(x)}{\Delta x} \leq f(x + \Delta x)$$

Vi finder nu grænseværdierne for $\Delta x \to 0$

$$\lim_{\Delta x \to 0} f(x) \leq \lim_{\Delta x \to 0} \frac{A(x + \Delta x) - A(x)}{\Delta x} \leq \lim_{\Delta \mathrm{x} \to 0} f(x + \Delta x)$$

Da f og A er differentiable, og dermed kontinuerte fås altså:

$$f(x) \leq A'(x) \leq f(x)$$

Heraf følger: $A'(x) = f(x)$. Hermed er det vist at $A(x)$ er en stamfunktion til $f(x)$.

Beviset kan gennemføres på tilsvarende vis, hvis f er en *ikke-voksende* funktion.

Sætning: Areal under graf kan beregnes med bestemt integral

Hvis f er en kontinuert, ikke-negativ funktion, i intervallet $[a; b]$, så kan arealet under grafen beregnes:

$$\int_a^b f(x)dx$$

Bevis:

Fra definitionen på et bestemt integral fås, idet $F(x)$ er en stamfunktion til $f(x)$:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Da både $F(x)$ og arealfunktionen $A(x)$ er stamfunktioner til $f(x)$ findes et tal c således at:

$$F(x) = A(x) + c$$

Heraf følger:

$$\int_a^b f(x)dx = (A(b) + c) \; - (A(a) + c) = A(b) + c - A(a) - c = A(b) - A(a)$$

Da $A(a) = 0$ følger:

$$\int_a^b f(x)dx = A(b)$$

Da $A(b)$ netop er arealet under grafen fra a til b på x-aksen, så er sætningen bevist.

Dermed er *integralregningens fundamentalsætning* bevist.

Videoer med beviset (ikke produceret af mig - bemærk at notationen er lidt anderledes):

Del 1: https://www.youtube.com/watch?v=0BuJe6QpKqU

Del 2: https://www.youtube.com/watch?v=LhyrcfM5VMw