

NOTE: Tredjegradspolynomiet

KBJ, maj 2024

2u MA

Definition:

Et tredjegradspolynomium er en funktion hvis forskrift kan skrives på formen:

$$f(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d, \quad a \neq 0.$$

Analyse af tredjegradspolynomiet:

$$f'(x) = 3a \cdot x^2 + 2b \cdot x + c$$

$$f''(x) = 6a \cdot x + 2b$$

Vendepunkt:

Grafen for f har ét vendepunkt. Vendepunkt bestemmes ved at løse $f''(x) = 0$:

$$6a \cdot x + 2b = 0$$

$$6a \cdot x = -2b$$

$$x = -\frac{2b}{6a} = -\frac{b}{3a}$$

Der er kun én og altid én løsning på denne ligning, når $a \neq 0$.

Da f'' er en lineær funktion, vil den skifte fortegn ved sit nulpunkt i $x = -\frac{b}{3a}$.

Dermed vides det at f har vendepunkt i $x = -\frac{b}{3a}$

Hældningen for f'' er $6a$. For $a > 0$ er $6a > 0$ og dermed er f'' en voksende lineær funktion.

Dermed er f'' negativ for $x < -\frac{b}{3a}$ og positiv for $x > -\frac{b}{3a}$.

Således vil f være konkav for $x < -\frac{b}{3a}$ og konveks for $x > -\frac{b}{3a}$.

For $a < 0$ er $6a < 0$. Dermed er f'' aftagende, og således positiv for $x < -\frac{b}{3a}$ og negativ for $x > -\frac{b}{3a}$. Og således er f konkav for $x < -\frac{b}{3a}$ og konveks for $x > -\frac{b}{3a}$.

Antal stationære punkter:

For at bestemme eventuelle stationære punkter, løses $f'(x) = 0$, som er en andengradslikning:

$$3a \cdot x^2 + 2b \cdot x + c = 0$$

Diskriminanten for ligningen udtrykkes:

$$d = (2b)^2 - 4 \cdot 3a \cdot c = 4b^2 - 4 \cdot 3ac = 4 \cdot (b^2 - 3ac)$$

For $d = 0$ er der netop ét stationært punkt. Dette gælder hvis:

$$d = 4 \cdot (b^2 - 3ac) = 0$$

$$b^2 - 3ac = 0$$

$$b^2 = 3ac$$

For $d > 0$ er der netop to stationære punkter. Dette gælder hvis $b^2 > 3ac$.

For $d < 0$ er der ingen stationære punkter. Dette gælder hvis $b^2 < 3ac$.

Tredjegradspolynomiet har altså:

Ingen stationære punkter for $b^2 < 3ac$

Et stationært punkt for $b^2 = 3ac$

To stationære punkter for $b^2 > 3ac$

Art af stationære punkter:

Hvis f har to stationære punkter, kan disse bestemmes med løsningsformlen:

$$x = \frac{-2b \pm \sqrt{4(b^2 - 3ac)}}{2 \cdot 3a} = \frac{-2b \pm \sqrt{4} \cdot \sqrt{b^2 - 3ac}}{2 \cdot 3a} = \frac{-2b \pm 2 \cdot \sqrt{b^2 - 3ac}}{2 \cdot 3a} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 3ac}}{3a}$$

Således ved vi at de to stationære punkter ligger i:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 3ac}}{3a} = -\frac{b}{3a} - \frac{\sqrt{b^2 - 3ac}}{3a}$$

og

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 3ac}}{3a} = -\frac{b}{3a} + \frac{\sqrt{b^2 - 3ac}}{3a}$$

Det ses at de to stationære punkter ligger ”symmetrisk” omkring vendepunktet i $x = -\frac{b}{3a}$.

Arten af de to stationære punkter kan nu bestemmes:

$$f''(x_1) = 6a \cdot \left(-\frac{b}{3a} - \frac{\sqrt{b^2 - 3ac}}{3a} \right) + 2b = -2b - 2 \cdot \sqrt{b^2 - 3ac} + 2b = -2 \cdot \sqrt{b^2 - 3ac} < 0$$

Da $f'(x_1) = 0$ og $f''(x_1) < 0$, vides det at f har lokalt maksimum i $x = x_1$.

$$f''(x_2) = 6a \cdot \left(-\frac{b}{3a} + \frac{\sqrt{b^2 - 3ac}}{3a} \right) + 2b = -2b + 2 \cdot \sqrt{b^2 - 3ac} + 2b = 2 \cdot \sqrt{b^2 - 3ac} > 0$$

Da $f'(x_2) = 0$ og $f''(x_2) > 0$, vides det at f har lokalt minimum i $x = x_2$.

Hvis f har ét stationært punkt, ligger det i

$$x = \frac{-2b \pm \sqrt{0}}{2 \cdot 3a} = -\frac{b}{3a}$$

Da dette samtidig er et vendepunkt, vil arten af dette stationære punkt altså være et saddelpunkt.

Antal nulpunkter

Hvis $b^2 \leq 3ac$, vil f ikke have noget lokalt ekstremum. Den vil således være enten voksende eller aftagende alle steder. Der vil således være netop ét nulpunkt.

For $b^2 > 3ac$ vil f have to lokale ekstrema, og således have 0, 1 eller 2 nulpunkter.

For $f(x_1) < 0$ vil f have ét nulpunkt.

For $f(x_1) = 0$ vil f have to nulpunkter.

For $f(x_2) < 0 < f(x_1)$ vil f have tre nulpunkter.

For $f(x_2) = 0$ vil f have to nulpunkter.

For $f(x_2) > 0$ vil f have ét nulpunkt.

Dette kan man argumentere med ud fra tegninger af tredjegradspolynomiets graf.

