

Prikprodukt og vinkel

Givet to vektorer $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ og $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$, således at ingen af dem er nulvektoren $\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Definition: Prikprodukt

Ved prikproduktet mellem $\vec{a}$ og $\vec{b}$ forstås et tal, givet ved formlen:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2$$

Sætning: Prikprodukt og vinkel

Prikproduktet mellem to vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$ kan også bestemmes som:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(v)$$

Hvor $|\vec{a}|$ og $|\vec{b}|$ er længderne af vektorerne $\vec{a}$ og $\vec{b}$, og v er vinklen mellem vektorerne.

Bevis:

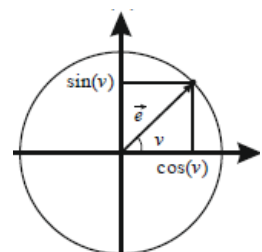
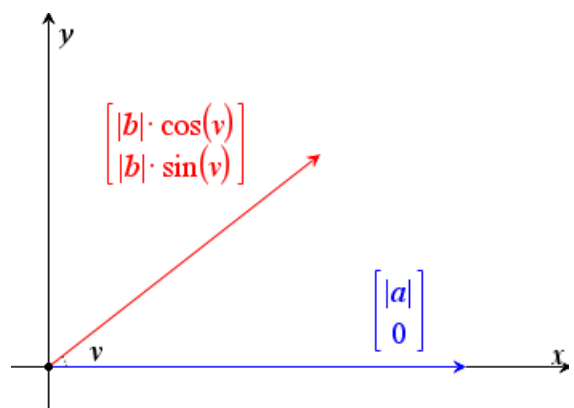
Antag at $\vec{a}$ er placeret langs førsteaksen. Da kan vektoren skrives med koordinatsættet:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} |\vec{a}| \\ 0 \end{pmatrix}$$

Vektor $\vec{b}$ vil da danne vinklen v med førsteaksen, og dens koordinatsæt kan da skrives:

$$\vec{b} = |\vec{b}| \cdot \vec{e}_v = |\vec{b}| \cdot \begin{pmatrix} \cos(v) \\ \sin(v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |\vec{b}| \cdot \cos(v) \\ |\vec{b}| \cdot \sin(v) \end{pmatrix}$$

Hvor $\vec{e}_v$ er en enhedsvektor med længde $|\vec{e}_v| = 1$ og hvis retning netop er vinklen v i forhold til førsteaksen. Koordinatsættet for $\vec{e}_v$ følger af definitionen af sinus og cosinus ud fra enhedscirklen, som vist på figuren til højre.



Ud fra definitionen på et prikprodukt fås nu:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} |\vec{a}| \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} |\vec{b}| \cdot \cos(v) \\ |\vec{b}| \cdot \sin(v) \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(v) + 0 \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(v)$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(v) + 0$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(v)$$

Vi har således vist at sætningen gælder når vektoren $\vec{a}$ er parallel med førsteaksen.

Det kan endvidere vises, at et prikprodukt kun afhænger af vektorernes længder og indbyrdes placering (det vil sige vinklen mellem dem).

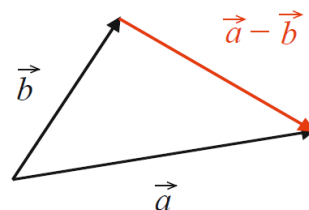
En af kvadratsætningerne for vektorer lyder:

$$|\vec{a} - \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2 \cdot \vec{a} \cdot \vec{b}$$

Dette kan omskrives til:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2} \cdot (|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2)$$

Det ses at de to første led i parentes på højreside kun afhænger af vektorernes længder. I sidste led står længden af differensvektoren. Men denne er netop afstanden mellem spidserne på $\vec{a}$ og $\vec{b}$, når de afsættes ud fra samme punkt. Og denne afstand afhænger kun af længderne af $\vec{a}$ og $\vec{b}$, samt vinklen v mellem de to vektorer.



Da udtrykket til højre kun afhænger af vektorernes længder samt vinklen mellem dem, så gælder dette også for prikproduktet som står på venstreside af lighedstegnet.

Da prikproduktet kun afhænger af vektorernes længder og vinklen mellem dem, så vil formelen der gælder når $\vec{a}$ er parallel med førsteaksen også gælde, hvis vektorparret drejes og vendes på andre måder. Sætningen er således bevist.

NB! Kvadratsætningen der anvendes ovenfor er dog *ikke* bevist, og det ville være næste skridt på vejen til at bevise den egentlige sætning helt i bund.

Sætning: Prikprodukt-fortegn og art af vinkel

Hvis $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, da er vinklen mellem vektorerne ret.

Hvis $\vec{a} \cdot \vec{b} > 0$, da er vinklen mellem vektorerne spids.

Hvis $\vec{a} \cdot \vec{b} < 0$, da er vinklen mellem vektorerne stump.

Bevis:

Det er vist at der gælder:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(v)$$

Oplagt gælder også at længderne er positive, det vil sige $|\vec{a}| > 0$ og $|\vec{b}| > 0$.

Dermed gælder at $\vec{a} \cdot \vec{b}$ har samme fortegn som $\cos(v)$, og omvendt.

For $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ gælder altså $\cos(v) = 0$.

For $\cos(v) = 0$ gælder at $v = 90^\circ$.

Dermed er det vist, at hvis prikproduktet er 0, så er vinklen mellem vektorerne ret (de er altså ortogonale).

For $\vec{a} \cdot \vec{b} > 0$ gælder at $\cos(v) > 0$.

For $\cos(v) > 0$ gælder at $v < 90^\circ$.

Dermed er det vist, at hvis prikproduktet er positivt, så er vinklen mellem vektorerne spids.

For $\vec{a} \cdot \vec{b} < 0$ gælder at $\cos(v) < 0$.

For $\cos(v) < 0$ gælder at $v > 90^\circ$.

Dermed er det vist, at hvis prikproduktet er negativt, så er vinklen mellem vektorerne stump.

Definition: Tværvektor

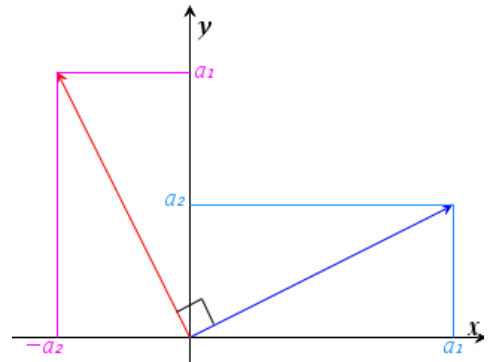
Til en vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ hører tværvektoren $\hat{\vec{a}}$, således at disse to vektorer har samme længde og så vinklen fra $\vec{a}$ til $\hat{\vec{a}}$ i positiv omløbsretning er 90° .

Sætning: Koordinatsæt for tværvektoren

Til vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ hører tværvektoren $\hat{\vec{a}} = \begin{pmatrix} -a_2 \\ a_1 \end{pmatrix}$.

Bevis

Hvis man ”drejer” koordinatmarkeringerne for $\vec{a}$ 90° mod uret, sammen med vektoren, fås tværvektoren og de ny koordinater kan aflæses til netop det der skal vises.



Definition: Determinant

Determinanten mellem to vektorer $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ og $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ er tallet: $\det(\vec{a}, \vec{b}) = \hat{\vec{a}} \cdot \vec{b}$.

Sætning: Formel for determinant

Determinanten for de to vektorer kan udregnes med følgende formel:

$$\det(\vec{a}, \vec{b}) = a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1$$

Bevis:

$$\det(\vec{a}, \vec{b}) = \hat{\vec{a}} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} -a_2 \\ a_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = -a_2 \cdot b_1 + a_1 \cdot b_2 = a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1$$

Fremstilling af ret linje

Sætning

En ret linje l kan fremstilles ved en normalvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ og et punkt $P_0(x_0, y_0)$, som ligger på linjen, således at de punkter der ligger på l netop er dem som opfylder ligningen

$$a \cdot (x - x_0) + b \cdot (y - y_0) = 0$$

Denne ligning kan også skrives:

$$a \cdot x + b \cdot y + c = 0, \text{ hvor } c = -(a \cdot x_0 + b \cdot y_0).$$

Bevis:

Lad vektoren fra $P_0(x_0, y_0)$ til et vilkårligt andet punkt i planen $P(x, y)$ være givet ved:

$$\overrightarrow{P_0P} = \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}$$

Da vil et punkt P ligge på linjen l hvis og kun hvis $\overrightarrow{P_0P}$ er ortogonal (vinkelret) med $\vec{n}$. Det vil sige at der kræves:

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{P_0P} = 0$$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} = 0$$

$$a \cdot (x - x_0) + b \cdot (y - y_0) = 0$$

Denne ligning kan der skrives videre på:

$$a \cdot x - a \cdot x_0 + b \cdot y - b \cdot y_0 = 0$$

$$a \cdot x + b \cdot y - a \cdot x_0 - b \cdot y_0 = 0$$

$$a \cdot x + b \cdot y - (a \cdot x_0 + b \cdot y_0) = 0$$

$$a \cdot x + b \cdot y + c = 0,$$

$$\text{hvor } c = -(a \cdot x_0 + b \cdot y_0)$$

Sætning

En ret linje l gennem punktet $P_0(x_0, y_0)$ med retningsvektor $\vec{r} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}$ kan parameterfremstilles ved:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}$$

Bevis

Lad vektoren fra $P_0(x_0, y_0)$ til et vilkårligt andet punkt i planen $P(x, y)$ være givet ved:

$$\overrightarrow{P_0P} = \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}$$

Punktet P ligger på l netop hvis $\overrightarrow{P_0P}$ er parallel med retningsvektoren $\vec{r}$. Det vil sige hvis der findes et tal t , således at:

$$\overrightarrow{P_0P} = t \cdot \vec{r}$$

Endvidere fås stedvektorerne for $P_0(x_0, y_0)$ og $P(x, y)$ til:

$$\overrightarrow{OP_0} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \text{ og } \overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Samtidigt følger det af vektoraddition at:

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_0} + \overrightarrow{P_0P}$$

Ved indsættelse af betingelsen for P på l fås nu:

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_0} + t \cdot \vec{r}$$

Og ved indsættelse af vektorer på koordinatform fås:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}$$

Ræsonnementer

Oversættelse fra parameterfremstilling til ligning:

Lad linjen l være givet ved $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}$

Det aflæses at l har $\vec{r} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}$ som retningsvektor.

Dermed har linjen $\vec{n} = \hat{\vec{r}} = \widehat{\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} -r_2 \\ r_1 \end{pmatrix}$ som normalvektor.

I det linjen går gennem punktet $P_0(x_0, y_0)$ fås ved indsættelse i linjens ligning:

$$\begin{aligned} -r_2(x - x_0) + r_1(y - y_0) &= 0 \\ -r_2 \cdot x + r_2 \cdot x_0 + r_1 \cdot y - r_1 \cdot y_0 &= 0 \\ r_2 \cdot x - r_2 \cdot x_0 - r_1 \cdot y + r_1 \cdot y_0 &= 0 \\ r_2 \cdot x - r_1 \cdot y + r_1 \cdot y_0 - r_2 \cdot x_0 &= 0 \\ r_2 \cdot x - r_1 \cdot y + c &= 0, \end{aligned}$$

hvor $c = r_1 \cdot y_0 - r_2 \cdot x_0$

Dette svarer til at arbejde med betingelsen: $\det(\vec{r}, \overrightarrow{P_0P}) = 0$

Ved isolering af y fås endvidere på formen $y = a \cdot x + b$:

$$\begin{aligned} r_1 \cdot y &= r_2 \cdot x + c \\ y &= \frac{r_2}{r_1} \cdot x + \frac{c}{r_1} \\ y &= a \cdot x + b \end{aligned}$$

Her ses at den parameterfremstillede rette linje har hældningstallet $a = \frac{r_2}{r_1}$.

Dette svarer til at $a = \frac{\Delta y}{\Delta x}$, i det r_2 netop er vektorretningens tilvækst i y , når tilvæksten i x er r_1 .

Oversættelse fra ligning til parameterfremstilling:

En linje l er givet ved ligningen $a \cdot (x - x_0) + b \cdot (y - y_0) = 0$.

Det aflæses at l har $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ som normalvektor, og dermed en retningsvektor givet ved:

$$\vec{r} = \hat{n} = \widehat{\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}.$$

Da l går gennem punktet $P_0(x_0, y_0)$ fås altså parameterfremstillingen:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$$

Ligningen $a \cdot x + b \cdot y + c = 0$ kan omskrives til formen $y = m \cdot x + d$:

$$-b \cdot y = a \cdot x + c$$

$$y = \frac{a}{-b} \cdot x + \frac{c}{-b}$$

$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$$

Dermed ses at l har hældningstallet $-\frac{a}{b}$ og at linjen går gennem punktet $\left(0, \frac{c}{b}\right)$.

Linjen $y = a \cdot x + b$ kan omskrives til formen $a \cdot x + b \cdot y + c = 0$ ved:

$$a \cdot x - y + b = 0$$

Dermed ses at linjen $y = a \cdot x + b$ altid har $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ -1 \end{pmatrix}$ som normalvektor og dermed som retningsvektor:

$$\vec{r} = \hat{n} = \widehat{\begin{pmatrix} a \\ -1 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix}.$$

Da linjen også går gennem $(0, b)$ kan $y = a \cdot x + b$ parameterfremstilles som:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix}$$

Fremstilling af cirkel

Definition: Cirkel

En cirkel er netop de punkter $P(x, y)$ som opfylder at afstanden til et givet punkt $C(a, b)$ er et fast tal r . Vi kalder punktet C for cirkelns centrum og tallet r for cirkelns radius.

Sætning

En cirkel med centrum $C(a, b)$ og radius r består af netop de punkter som opfylder ligningen:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

Bevis

Lad $\overrightarrow{CP}$ være en vektor fra centrum $C(a, b)$ til et vilkårligt punkt $P(x, y)$:

$$\overrightarrow{CP} = \begin{pmatrix} x - a \\ y - b \end{pmatrix}$$

Kriteriet for at P ligger på cirklen er da, at det netop skal gælde at $|\overrightarrow{CP}| = r$:

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{CP}| &= r \\ \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2} &= r \\ (x - a)^2 + (y - b)^2 &= r^2 \end{aligned}$$

Dermed er ligningen for cirklen udledt.

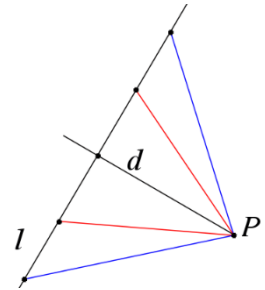
Sætning:

Afstanden fra et punkt $P(x_1, y_1)$ til en ret linje $l: a \cdot x + b \cdot y + c = 0$ er givet ved:

$$\text{dist}(P, l) = \frac{|a \cdot x_1 + b \cdot y_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Denne afstand er den *mindste* afstand fra P til l . Alle større afstande findes mellem P og netop to punkter på l .

Bevis: Udelades her.



Ræsonnement:

For en cirkel med centrum C og radius r samt en linje l lader vi $d = \text{dist}(C, l)$.

Hvis $d < r$ er der to skæringspunkter mellem cirklen og linjen. Da d er den mindste afstand fra C til l , findes der to punkter på l i afstanden r fra C . Disse to ligger også på cirklen. Således vil linje og cirkel have to skæringspunkter. Linjen er det vi kalder en *sekant* til cirklen.

Hvis $d = r$ er der ét skæringspunkt mellem cirkel og linje. Da d er den mindste afstand fra C til l findes der kun ét punkt på l i denne afstand fra C , og dermed kun ét punkt der både ligger på cirklen og linjen. Vinklen mellem den korteste afstand og linjen er dermed ret, og linjen er et vi kalder en *tangent* til cirklen.

Hvis $d > r$ er der ingen skæringspunkter mellem cirkel og linje. Da d er mindste afstand fra C til l , er der ingen punkter på l som ligger i afstanden r og dermed ingen fælles punkter mellem cirkel og linje.

For en linje $l: y = m \cdot x + c$ og cirklen $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ bestemmes skæringspunkterne ved at indsætte udtryk for y i cirkelns ligning:

$$(x - a)^2 + (m \cdot x + c - b)^2 = r^2$$

Dette kan reduceres ned til en andengradsligning, hvis diskriminant vil afgøre antallet af løsninger til ligningen, og dermed antallet af skæringspunkter mellem linje og cirkel.

Ræsonnement: Ligning for tangent til cirkel

En cirkel er givet med centrum $C(x_1, y_1)$ og radius r .

På cirklen ligger punktet $P(x_0, y_0)$.

En linje t er tangent til cirklen, med P som røringsspunkt.

Linjen t kan beskrives ved en ligning:

$$a \cdot (x - x_0) + b \cdot (y - y_0) = 0$$

Hvor $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ er en normalvektor og (x_0, y_0) er et punkt på linjen. Vi ved at røringsspunktet P ligger på linjen, så dette passer ind i ligningen.

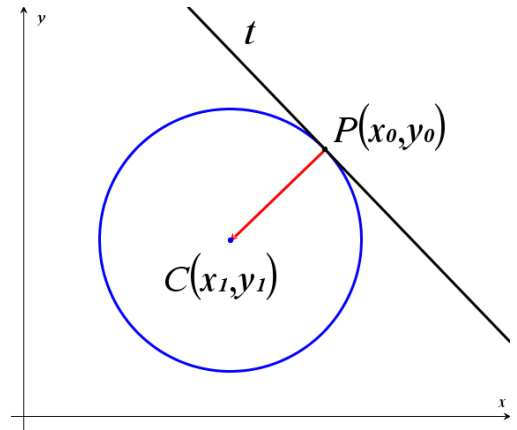
Da en radius i en cirkel møder en tangent i en ret vinkel, vil vektoren $\overrightarrow{PC}$ være en normalvektor:

$$\vec{n} = \overrightarrow{PC} = \begin{pmatrix} x_1 - x_0 \\ y_1 - y_0 \end{pmatrix}$$

Ved indsættelse i ligningen for t fås da:

$$(x_1 - x_0)(x - x_0) + (y_1 - y_0)(y - y_0) = 0$$

Dermed er der opstillet en ligning for en tangent til cirkel med P som røringsspunkt.



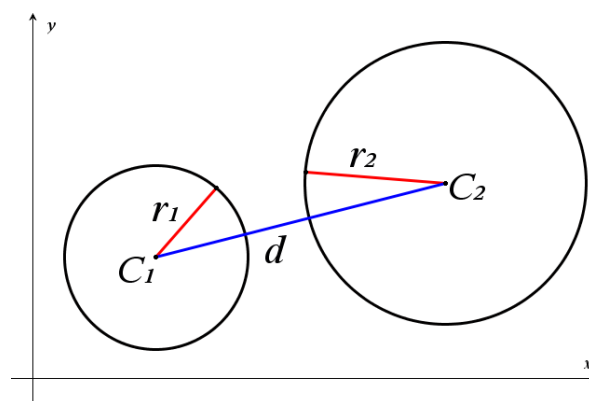
To cirkler

Lad der være givet to cirkler i et koordinatsystem. Lad den ene cirkel have centrum i C_1 og radius r_1 , mens den anden har centrum i C_2 og radius r_2 .

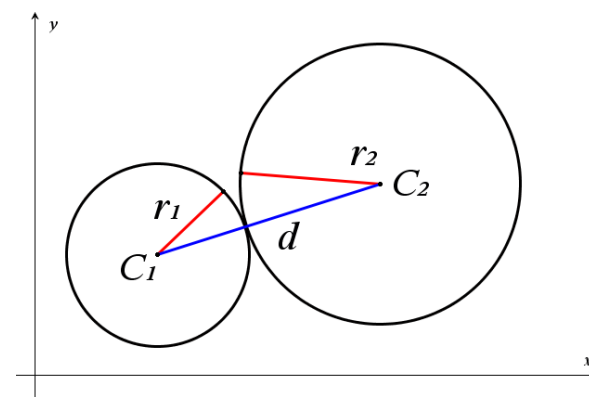
Afstanden mellem de to centre kalder vi d . Det vil sige at: $d = |C_1 C_2|$

For nemheds skyld beslutter vi at $r_2 > r_1$.

For $d > r_1 + r_2$ fås, at der ingen skæringspunkter er mellem de to cirkler.

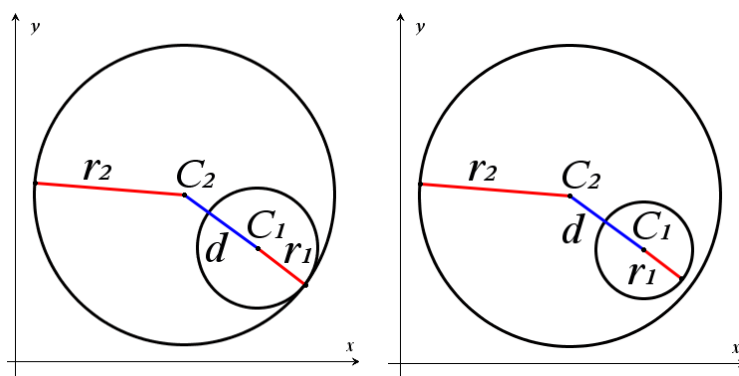


For $d = r_1 + r_2$ fås, at der er netop ét skæringspunkt mellem de to cirkler.



Det ses tilsvarende at for $r_2 = d + r_1$, svarende til $d = r_2 - r_1$, så er der også ét skæringspunkt.

Endvidere ses at for $r_2 > d + r_1$ svarende til $d < r_2 - r_1$, vil der ingen skæringspunkter være.

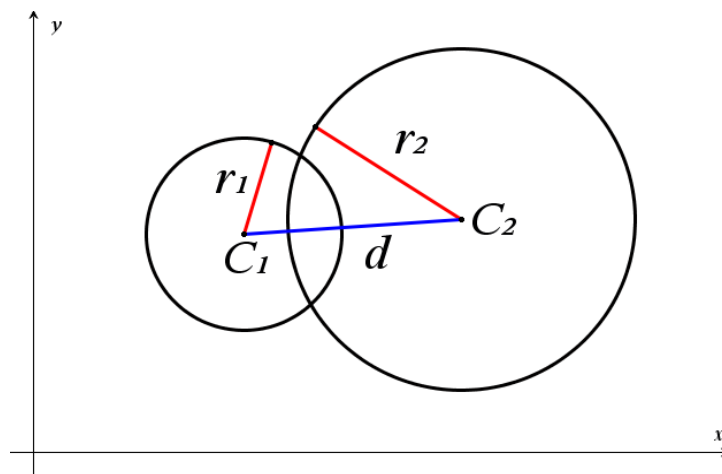


Tilbage bliver der den mulighed at d ligger mellem $r_2 + r_1$ og $r_2 - r_1$.

Det vil sige at:

$$r_2 + r_1 > d > r_2 - r_1$$

I den situation bliver der to skæringspunkter.



Som et helt særligt eksempel kan nævnes den situation at $r_2 = r_1$ og $d = 0$. I så fald bliver de to cirkler sammenfaldende og antallet af skæringspunkter vil principielt være uendeligt.

Dette sidste særlige eksempel rejser dog det filosofiske spørgsmål, om der i så fald overhovedet kan tales om to forskellige cirkler.