

5.1 AFSTANDSFORMLEN

Hvis to punkter i koordinatsystemet er fastlagt ved deres koordinater, kan vi finde afstanden mellem dem.

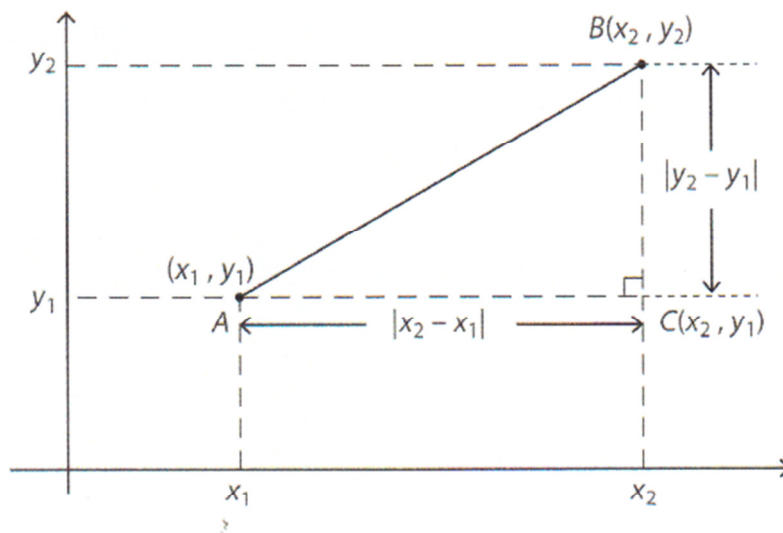
SÆTNING 1. AFSTANDSFORMLEN

Afstanden mellem punkterne $A(x_1, y_1)$ og $B(x_2, y_2)$ er

$$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

BEVIS

Vi går ud fra, at punkterne A og B ikke ligger på samme lodrette eller samme vandrette linje. I så fald er det let at finde afstanden mellem dem, nemlig som forskellen mellem deres y -koordinater eller mellem deres x -koordinater.



Figur 1

På figur 1 skal vi bestemme længden af linjestykket AB . Vi danner en retvinklet trekant ABC som vist. Punktet C har samme x -koordinat som B og samme y -koordinat som A .

I $\triangle ABC$ er kateterne parallelle med koordinataksene, så deres længder er forskellen mellem x -koordinaterne (vandret side) eller mellem y -koordinaterne (lodret side). For at sikre, at længderne bliver positive anvendes numerisktegn:

$$|AC| = |x_2 - x_1| \quad \text{og} \quad |BC| = |y_2 - y_1|.$$

Længden af hypotenusen findes ved Pythagoras' sætning:

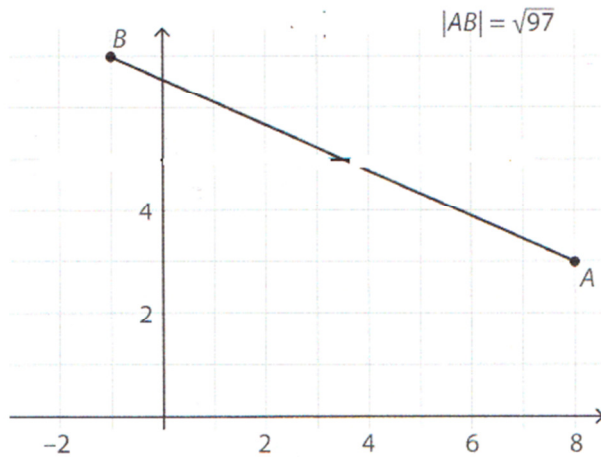
$$|AB|^2 = |AC|^2 + |BC|^2 \quad \Leftrightarrow \quad |AB|^2 = |x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2.$$

Altså får vi længden af linjestykket AB til

$$|AB| = \sqrt{|x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

EKSEMPEL 1

Vi vil finde afstanden mellem punkterne $A(8,3)$ og $B(-1,7)$ som vist på figur 2.



Figur 2

Vi sætter $(x_1, y_1) = (8, 3)$ og $(x_2, y_2) = (-1, 7)$ ind i afstandsformlen:

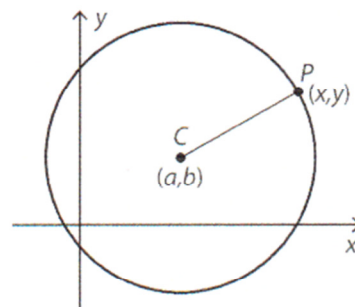
$$|AB| = \sqrt{(-1 - 8)^2 + (7 - 3)^2} = \sqrt{(-9)^2 + 4^2} = \sqrt{97}.$$

Læg mærke til at man gerne må skrive tallet som en kvadratrods.

5.2 CIRKLENS LIGNING

I *MAT C hf* har vi set på linjens ligning af typen $y = ax + b$. At en linje har ligningen $y = 2x + 3$ betyder, at koordinaterne til punkter på linjen *passer* i ligningen, og at koordinater til punkter *uden for* linjen *ikke* passer i ligningen. Man siger, at ligningen *fremstiller* linjen.

En cirkel har i koordinatsystemet et centrum $C(a, b)$ og en radius r . Vi ønsker at finde en ligning i x og y , der *fremstiller* cirklen, dvs. en ligning, hvori netop koordinaterne til punkter på cirklen passer.



Figur 3

Cirkelperiferien (cirkelomkredsen) består netop af de punkter P , hvis afstand til centrum er r . Hvis koordinaterne til P betegnes (x, y) , er $|CP| = r$, og dette gælder udelukkende for de punkter, der ligger på cirklen. Vi kan bruge afstandsformlen til at omskrive sådan:

$$\begin{aligned} |CP| = r &\Leftrightarrow \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2} = r \\ &\Leftrightarrow (x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2 \end{aligned}$$

Dette er *cirkelns ligning*. Vi har dermed vist

SÆTNING 2. CIRKLENS LIGNING

Cirklen med centrum $C(a, b)$ og radius r har ligningen

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2.$$

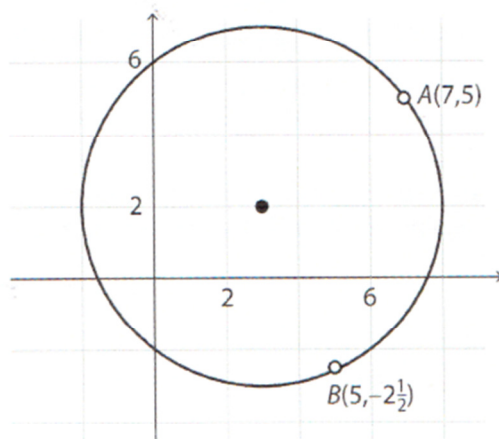
EKSEMPEL 2

Cirklen med centrum $(3,2)$ og radius 5 (figur 4) har ligningen

$$(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 25 .$$

Punktet $A(7,5)$ ligger på cirklen, fordi dets koordinater passer i ligningen:

$$(7 - 3)^2 + (5 - 2)^2 = 4^2 + 3^2 = 16 + 9 = 25 .$$



Figur 4

Punktet $B(5, -2\frac{1}{2})$ ligger ikke på cirklen, fordi dets koordinater ikke passer i ligningen:

$$(5 - 3)^2 + \left(-2\frac{1}{2} - 2\right)^2 = 2^2 + \left(-4\frac{1}{2}\right)^2 = 4 + 20\frac{1}{4} \neq 25 .$$

Da $24\frac{1}{4} < 25$, er afstanden fra centrum til B mindre end radius i cirklen, så punktet B ligger inden for cirkelperiferien.

EKSEMPEL 3

I tabellen ses nogle eksempler på cirkelligninger med centre og radier.

Ligning	Centrum	Radius
$(x + 4)^2 + (y - 7)^2 = 16$	$(-4, 7)$	4
$(x - 1)^2 + (y + 12)^2 = 10$	$(1, -12)$	$\sqrt{10}$
$x^2 + (y - 3)^2 = 9$	$(0, 3)$	3
$(x + 2)^2 + y^2 = 1$	$(-2, 0)$	1
$x^2 + y^2 = 4$	$(0, 0)$	2

Opgave 3: Cirkelns ligning uden parenteser: Gang parenteserne ud vha. kvadratsætninger.

- a) $(x + 2)^2 + (y + 4)^2 = 2^2$
- b) $(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 5^2$
- c) $(x - 2)^2 + (y + 5)^2 = 6^2$
- d) $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1^2$

Opgave 4: Cirkelns ligning med parenteser: Skriv om, så du kan aflæse centrum og radius.

- a) $x^2 + 4x + 4 + y^2 + 10y + 25 = 16$
- b) $x^2 - 2x + 1 + y^2 - 6y + 9 = 25$
- c) $x^2 + 20x + 100 + y^2 - 14y + 49 = 81$

Opgave 5: Cirkelns ligning - hele den lange tur: Den sværeste version: Denne gang skal du SELV gøre følgende:

1. Lægge nogle tal til på begge sider af lighedstegnet, så du kan
2. Bruge kvadratsætninger til at sætte nogle parenteser på venstre side, så du kan
3. Bestemme centrum og radius for disse cirkler.

- a) $x^2 + 4x + y^2 + 10y = -13$
- b) $x^2 - 2x + y^2 - 6y = 15$
- c) $x^2 - 8x + y^2 + 14y = -40$

NB: hvis radius bliver 0, så er det ikke en cirkel men bare et punkt, og hvis r^2 er et negativt tal, så er formlen umulig. Så var det slet ikke noget som helst andet en grim matematik.

5.3 DEN RETTE LINJES LIGNINGER

En ret linje i koordinatsystemet har flere forskellige typer af ligninger. Vi kender allerede formlen $y = ax + b$, hvor a er hældningen, og b er skæringspunktet med y -aksen. Vi skal se på andre typer af ligninger, der i visse sammenhænge er nyttige.

SÆTNING 3

Hvis en ret linje med hældningen a går gennem punktet med koordinaterne (x_0, y_0) , kan dens ligning skrives på formen

$$y - y_0 = a(x - x_0).$$

BEVIS

Linjens ligning kan skrives

$$y = ax + b,$$

og da punktet (x_0, y_0) ligger på linjen, passer koordinaterne i ligningen, så

$$y_0 = ax_0 + b.$$

Vi trækker den sidste ligning fra den næstsidste og får

$$y - y_0 = ax + b - (ax_0 + b) \quad \text{Hæv minusparentesen}$$

$$\Leftrightarrow y - y_0 = ax + b - ax_0 - b \quad \text{Leddene } b \text{ og } -b \text{ fjernes}$$

$$\Leftrightarrow y - y_0 = ax - ax_0 \quad \text{Sæt } a \text{ uden for parentes}$$

$$\Leftrightarrow y - y_0 = a(x - x_0).$$

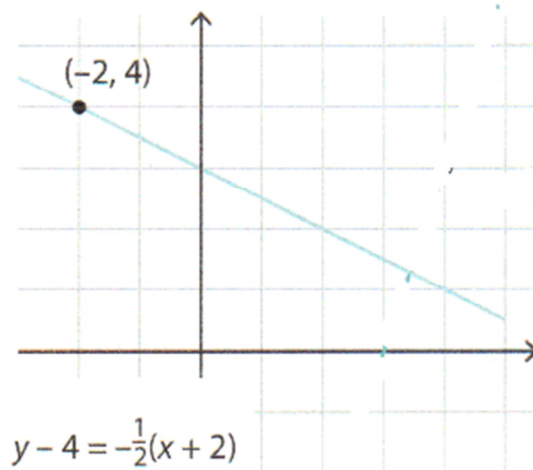
Dermed er sætningen vist.

EKSEMPEL 5

Den rette linje gennem $(-2, 4)$ med hældningen $-\frac{1}{2}$ har ligningen

$$y - 4 = -\frac{1}{2}(x + 2) \Leftrightarrow y - 4 = -\frac{1}{2}x - 1 \Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}x + 3,$$

så linjen skærer y -aksen i $(0, 3)$, se figur 5.



Ligningen

$$y = -\frac{1}{2}x + 3$$

fra eksempel 5 kan omformes ved at gange med 2 på begge sider af lighedstegnet:

$$2y = -x + 6 \Leftrightarrow x + 2y - 6 = 0.$$

Dette er en førstegradslikning i de variable x og y og en sådan fremstiller en ret linje.

I almindelighed gælder

SÆTNING 4

Enhver ligning af typen

$$ax + by + c = 0,$$

hvor a , b og c er reelle tal, fremstiller en ret linje. Enhver linje kan fremstilles af en ligning af denne type.

Vi går her ud fra, at a og b ikke begge er 0.

Hvis a er 0, får vi en vandret linje. Hvis b er 0, får vi en lodret linje.

EKSEMPEL 6

Ligningen

$$3x - 4y - 8 = 0$$

kan omskrives til

$$3x - 4y - 8 = 0 \Leftrightarrow 4y = 3x - 8 \Leftrightarrow y = \frac{3}{4}x - 2,$$

så ligningen fremstiller en linje med hældning $\frac{3}{4}$, som skærer y -aksen i -2 .

5.4 ORTOGONALE LINJER

To linjer, der står vinkelret på hinanden, kaldes *ortogonale*. Vinkelrette linjers hældninger har en speciel sammenhæng. Her forudsætter vi, at ingen af linjerne er parallel med en koordinatakse.

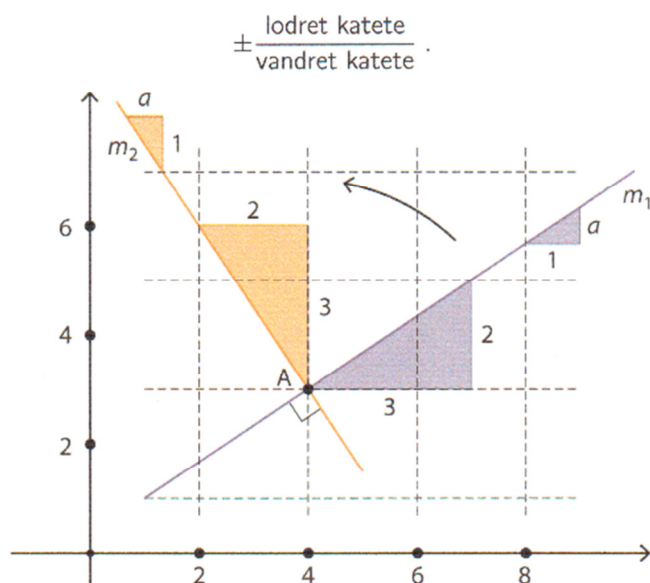
SÆTNING 5

Hvis to linjer med hældninger a og c er ortogonale, er $a \cdot c = -1$. Omvendt: Hvis to linjers hældninger a og c opfylder, at $a \cdot c = -1$, er de ortogonale.

BEVIS

Vi viser kun første del af sætningen. På figur 6 er linjerne m_1 og m_2 vinkelret på hinanden i punktet A . For sådanne to linjer gælder, at den ene har positiv hældning (den forløber opad mod højre), den anden negativ (den forløber nedad mod højre).

Hvis m_1 har hældningen $a = \frac{2}{3}$, kan vi tegne en retvinklet trekant som vist, hvor den vandrette katete har længden 3 og den lodrette længden 2. Husk nemlig på, at hældningen for den rette linje bestemmes som (se MAT C hf)



Fortegn + bruges hvis linjen har positiv hældning, fortegn - hvis hældningen er negativ.

Vi drejer denne trekant 90° i positiv omløbsretning omkring linjernes skæringspunkt A . Vi får så en ny retvinklet trekant med en vandret katete af længde 2 og en lodret katete af længde 3. Altså har m_2 hældningen $c = -\frac{3}{2}$.

Dermed er

$$a \cdot c = \frac{2}{3} \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) = -1$$



EKSEMPEL 7

Her er nogle eksempler på hældninger a og c for ortogonale linjer:

$$a = \frac{1}{2}, c = -2 \quad , \quad a = -\frac{3}{4}, c = \frac{4}{3}$$

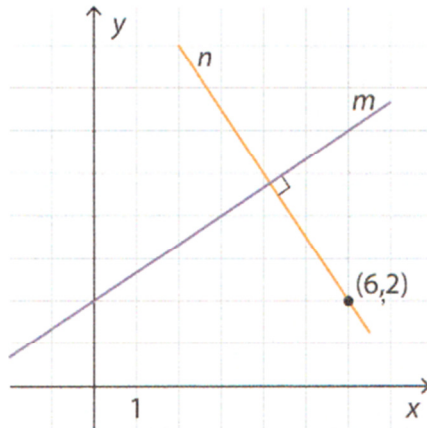
$$a = \frac{5}{7}, c = -\frac{7}{5} \quad , \quad a = 0,4, c = -2,5$$

EKSEMPEL 8

Linjen m har ligningen

$$y = \frac{2}{3}x + 2.$$

Vi vil finde en ligning for den linje n , som går gennem punktet $(6, 2)$, og som står vinkelret på m (figur 7).



Da linjerne er vinkelrette, har n hældningen $-\frac{3}{2}$, og derfor er dens ligning efter sætning 3

$$y - 2 = -\frac{3}{2}(x - 6) \Leftrightarrow y = -\frac{3}{2}x + 11.$$

5.5 SKÆRING MELLEMLINJER

Vi har allerede i *MAT C hf* set, hvordan man bestemmer koordinatsættet til skæringspunktet mellem to linjer, der ikke er parallelle. Vi gør yderligere et par bemærkninger her.

- Hvis de to linjer m_1 og m_2 er angivet på formen $y = ax + b$, findes skæringspunktets koordinater ved at sætte de to højresider lig hinanden. Hvis ligningerne er

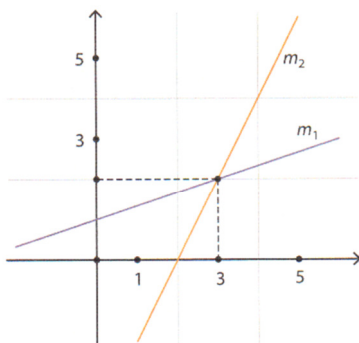
$$m_1 : y = \frac{1}{3}x + 1 \quad , \quad m_2 : y = 2x - 4,$$

skal vi løse ligningen

$$\frac{1}{3}x + 1 = 2x - 4,$$

hvilket giver $x = 3$. Denne værdi indsættes i en af ligningerne, og vi får $y = 2$.

Skæringspunktets koordinater er dermed $(3, 2)$, se figur 8.



Figur 8

- Hvis de to linjer har en ligning af hver sin af de to typer, 'indsættes den ene ligning i den anden'. Vi kan f. eks. se på

$$m_1 : y = \frac{1}{3}x + 4 \quad , \quad m_2 : 3x + 4y - 29 = 0 .$$

Vi indsætter højre side i ligningen for m_1 i ligningen for m_2 :

$$3x + 4 \left(\frac{1}{3}x + 4 \right) - 29 = 0 .$$

Denne ligning har løsningen $x = 3$, og derefter får vi $y = 5$, så skæringspunktet er $(3, 5)$,

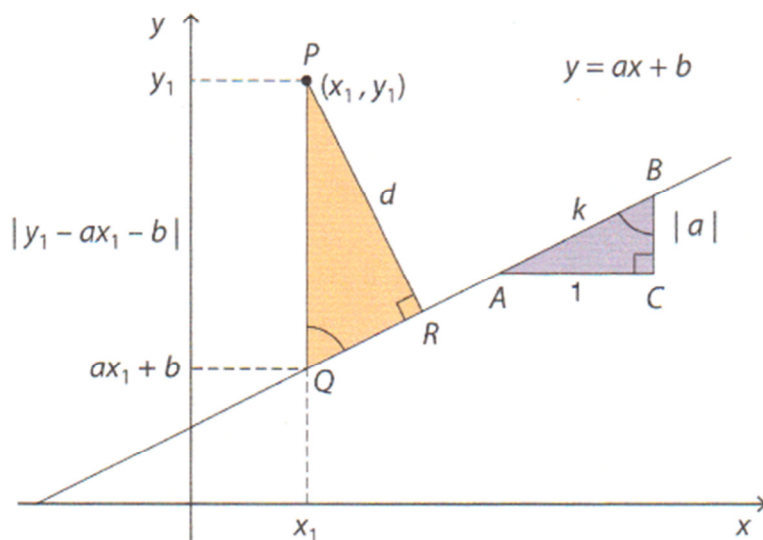
5.6 AFSTAND FRA PUNKT TIL LINJE

Vi skal finde en formel til at bestemme den vinkelrette afstand fra et punkt til en linje, der ikke går gennem punktet. Vi går ud fra, at linjen ikke er parallel med nogen af koordinataksene.

SÆTNING 6. DIST-FORMLLEN

Afstanden $\text{dist}(P, m)$ fra punktet $P(x_1, y_1)$ til linjen m med ligningen $y = ax + b$ er bestemt ved

$$\text{dist}(P, m) = \frac{|ax_1 + b - y_1|}{\sqrt{a^2 + 1}} .$$



Figur 11

Stykket d er den afstand som vi vil finde. Vi har også tegnet en lodret streg fra punktet P til linjen. Og så har vi tegnet en lilla trekant der handler om linjens hældning: Man går 1 hen og a op. Vi går frem i en række trin.

I. Linjens hældning er længden af BC (hvis hældningen er positiv) eller længden af BC med modsat fortegn (hvis hældningen er negativ).

II. Hypotenusen k findes ved hjælp af Pythagoras' sætning i den retvinklede $\triangle ABC$:

$$k^2 = 1^2 + |a|^2 \Leftrightarrow k^2 = 1 + a^2 \Leftrightarrow k = \sqrt{1 + a^2} .$$

III. Vinklerne B og Q i $\triangle ABC$ og $\triangle PQR$ er lige store, fordi linjestykkerne BC og PQ er parallelle. Disse lige store vinkler er markeret med en bue.

IV. y -koordinaten til Q findes ved at sætte x -koordinaten x_1 ind i linjens ligning. Koordinaterne til Q er altså

$$Q(x_1, ax_1 + b).$$

V. Længden af linjestykket PQ kan findes som den numeriske forskel mellem y -koordinaterne til P og Q :

$$|PQ| = |(ax_1 + b) - y_1| = |ax_1 + b - y_1|.$$

VI. Nu er $\triangle ABC$ og $\triangle PQR$ ensvinklede, fordi de begge er retvinklede, og desuden er som nævnt i III vinklerne B og Q lige store. Så er siderne *proportionale*, dvs. sideforholdet er konstant:

$$\frac{|PR|}{|AC|} = \frac{|PQ|}{|AB|}.$$

Heri indsættes de fundne størrelser:

$$\frac{d}{1} = \frac{|ax_1 + b - y_1|}{k} \Leftrightarrow d = \frac{|ax_1 + b - y_1|}{\sqrt{1 + a^2}}.$$

Dermed er sætningen bevist. ☺

EKSEMPEL 9

Linjen m har ligningen

$$y = -2x + 3,$$

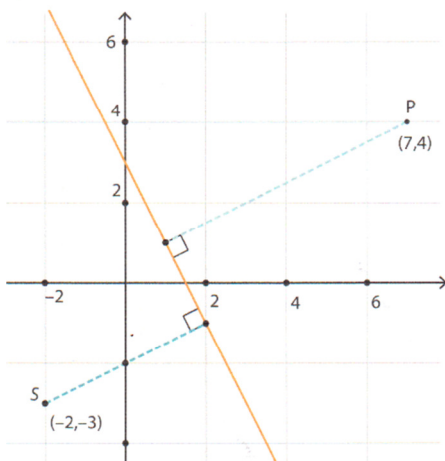
og vi vil finde de vinkelrette afstande fra punkterne $P(7,4)$ og $S(-2,-3)$ til linjen.

Først er $(x_1, y_1) = (7, 4)$, så

$$\begin{aligned} \text{dist}(P, m) &= \frac{|ax_1 + b - y_1|}{\sqrt{a^2 + 1}} = \frac{|-2 \cdot 7 + 3 - 4|}{\sqrt{(-2)^2 + 1}} \\ &= \frac{|-14 + 3 - 4|}{\sqrt{5}} = \frac{15}{\sqrt{5}} \approx 6,708, \end{aligned}$$

Derefter er $(x_1, y_1) = (-2, -3)$, så

$$\begin{aligned} \text{dist}(S, m) &= \frac{|ax_1 + b - y_1|}{\sqrt{a^2 + 1}} = \frac{|-2 \cdot (-2) + 3 - (-3)|}{\sqrt{(-2)^2 + 1}} \\ &= \frac{|4 + 3 + 3|}{\sqrt{5}} = \frac{10}{\sqrt{5}} \approx 4,472, \end{aligned}$$



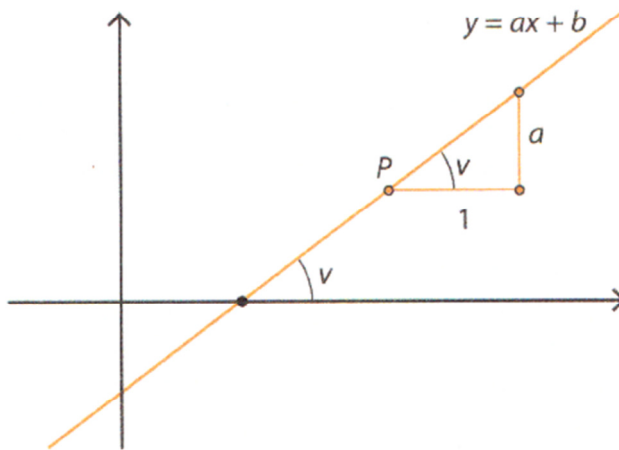
5.7 VINKEL MELLEMLINJER

To linjer, der ikke er parallelle, danner en spids og en stump vinkel med hinanden i deres skæringspunkt.

VINKEL MELLEMLINJE OG x-AKSEN

En linje har ligningen $y = ax + b$, og har derfor hældningen a . Med udgangspunkt i et vilkårligt valgt punkt P på linjen tegner vi en retvinklet trekant, hvis vandrette katete har længden 1. Så har den lodrette katete længden $|a|$. Vi går først ud fra, at a er positiv.

Vinklen v mellem den vandrette katete og hypotenusen er den samme som den vinkel, linjen danner med x -aksen, se figur 14.



Figur 14

Vi benytter, at der i en retvinklet trekant gælder

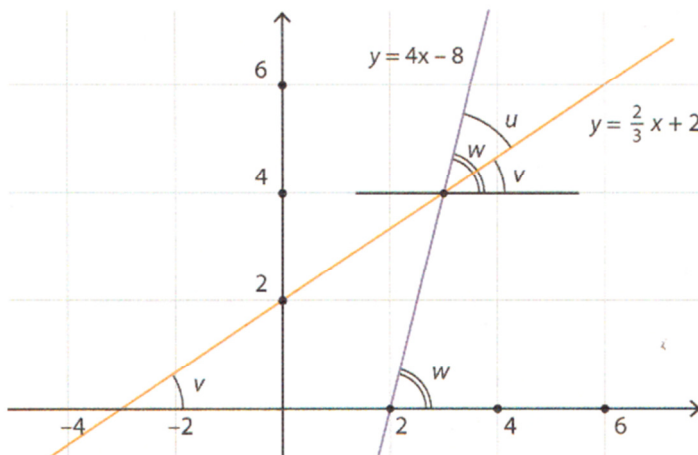
$$\tan v = \frac{\text{modstående katete}}{\text{hosliggende katete}} \Leftrightarrow \tan v = \frac{a}{1} = a.$$

Tangens til vinklen v mellem linjen og x -aksen er altså linjens hældning.

EKSEMPEL 12

Vi ser på et tilfælde, hvor de to linjers hældninger har samme fortegn, f. eks. positivt, se figur 17:

$$y = 4x - 8 \quad \text{og} \quad y = \frac{2}{3}x + 2.$$



Vi finder de vinkler v og w , som linjerne danner med x -aksen:

$$\tan v = \frac{2}{3} \Leftrightarrow v = 33,69^\circ$$

$$\tan w = 4 \Leftrightarrow w = 75,96^\circ .$$

Vinklerne v og w findes som i eksempel 11 ved linjen parallel med x -aksen gennem linjernes skæringspunkt. En vinkel mellem de to linjer er altså

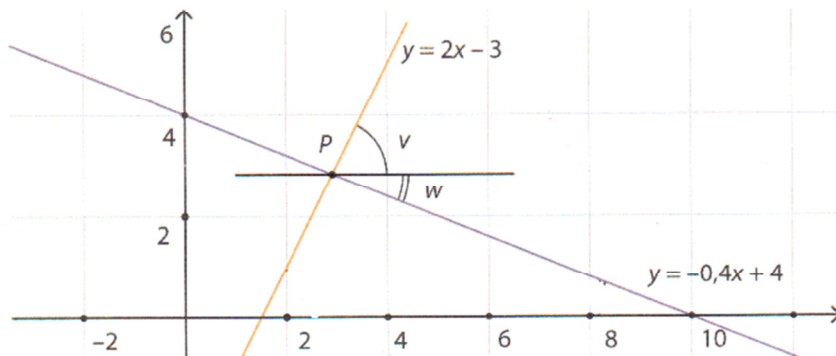
$$u = w - v = 75,96^\circ - 33,69^\circ = 42,27^\circ .$$

EKSEMPEL 11

Vi ser på linjerne med ligningerne

$$y = 2x - 3 \quad \text{og} \quad y = -0,4x + 4 .$$

Vi fandt i eksempel 10, at linjerne danner vinklerne $v = 63,43^\circ$ og $w = 21,80^\circ$ med x -aksen.



Så bliver vinklen mellem linjerne blot $63,43^\circ + 21,80^\circ = 85,23^\circ$.

5.8 LINJE OG CIRKEL

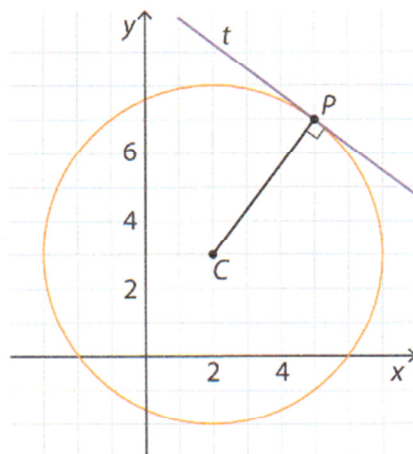
En linje og en cirkel kan skære hinanden i to punkter, i et punkt (så er linjen tangent til cirklen) eller i ingen punkter. Vi viser ved nogle eksempler, hvordan man bestemmer koordinater til fælles punkter for cirkler og linjer samt finder ligninger for cirkeltangenter.

EKSEMPEL 13

En cirkel har centrum i $C(2,3)$ og radius 5. Punktet $P(5,7)$ ligger på cirklen, fordi dets afstand til centrum er 5:

$$|CP| = \sqrt{(5-2)^2 + (7-3)^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5 .$$

Vi vil finde ligningen for cirkeltangenten i P (figur 18).



Figur 18

Vi bruger formlen for hældningen for en linje gennem to punkter og finder, at linjen CP har hældningen

$$\frac{7-3}{5-2} = \frac{4}{3}.$$

Tangenten i P er vinkelret på CP , så tangentens hældning er $-\frac{3}{4}$, som er det modsat reciprokke tal til $\frac{4}{3}$. Vi bruger formlen fra sætning 3 for linjens ligning, så tangenten får ligningen

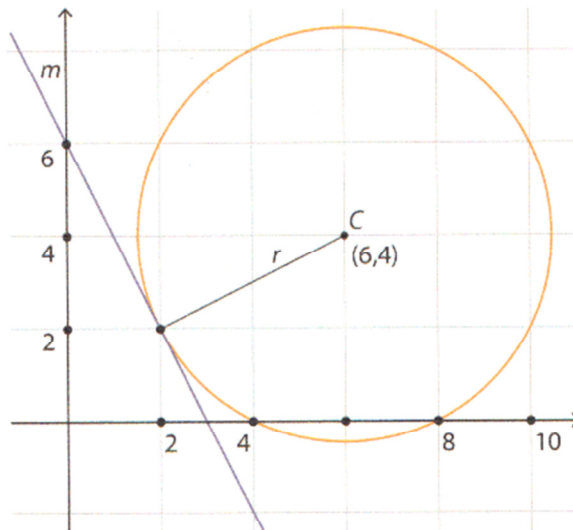
$$\begin{aligned} y-7 &= -\frac{3}{4}(x-5) \Leftrightarrow y-7 = -\frac{3}{4}x + \frac{15}{4} \\ \Leftrightarrow y &= -\frac{3}{4}x + \frac{43}{4}. \end{aligned}$$

EKSEMPEL 14

Linjen m har ligningen

$$y = -2x + 6.$$

Vi ønsker at bestemme ligningen for den cirkel, der har centrum i $C(6,4)$, og som tangerer linjen (figur 19).



Figur 19

Radius i cirklen er afstanden fra C til m , så ved hjælp af dist-formlen finder vi, at

$$r = \text{dist}(C, m) = \frac{|-2 \cdot 6 + 6 - 4|}{\sqrt{(-2)^2 + 1}} = \frac{|-12 + 6 - 4|}{\sqrt{5}} = \frac{10}{\sqrt{5}}.$$

Så er cirkelns ligning

$$\begin{aligned} (x-a)^2 + (y-b)^2 &= r^2 \Leftrightarrow (x-6)^2 + (y-4)^2 = \left(\frac{10}{\sqrt{5}}\right)^2 \\ \Leftrightarrow (x-6)^2 + (y-4)^2 &= \frac{100}{5} = 20. \end{aligned}$$

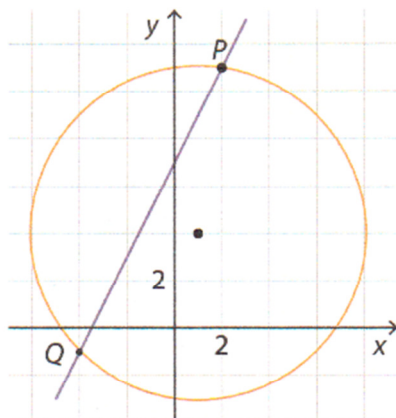
Vi viser dernæst, hvordan man kan finde koordinaterne til eventuelle skæringspunkter mellem en linje og en cirkel, hvis ligninger er kendt.

EKSEMPEL 15

En cirkel og en linje har ligningerne

$$(x - 1)^2 + (y - 4)^2 = 50 \quad \text{og} \quad y = 2x + 7.$$

Cirklen har centrum i $(1,4)$ og radius $\sqrt{50}$, og linjen har hældningen 2 og skærer y -aksen i $(0,7)$ som vist på figur 20. Vi bestemmer koordinaterne til skæringspunkterne mellem cirklen og linjen.



Figur 20

Metoden er, at vi 'indsætter linjens ligning i cirkelns', dvs. i cirkelns ligning erstatter vi y med $2x + 7$. Derefter kan vi regne sådan:

$$\begin{aligned}(x - 1)^2 + (2x + 7 - 4)^2 &= 50 &\Leftrightarrow & (x - 1)^2 + (2x + 3)^2 = 50 \\ \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + 4x^2 + 12x + 9 &= 50 &\Leftrightarrow & 5x^2 + 10x + 10 = 50 \\ \Leftrightarrow 5x^2 + 10x - 40 &= 0 &\Leftrightarrow & x^2 + 2x - 8 = 0.\end{aligned}$$

Dette er en andengradsligning med diskriminanten

$$d = b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-8) = 4 + 32 = 36.$$

Altså har ligningen to løsninger:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{d}}{2a} = \frac{-2 \pm \sqrt{36}}{2} = \frac{-2 \pm 6}{2} = \begin{cases} -4 \\ 2 \end{cases}.$$

Vi har nu fundet x -koordinaterne til de to skæringspunkter mellem cirklen og linjen. Deres y -koordinater findes ved at indsætte de to x -værdier i linjens ligning:

$$y = 2x + 7 = \begin{cases} 2 \cdot (-4) + 7 = -1 \\ 2 \cdot 2 + 7 = 11 \end{cases}.$$

Altså har skæringspunkterne P og Q mellem linjen og cirklen koordinaterne $(2,11)$ og $(-4,-1)$. På figuren ser dette ud til at passe.

EKSEMPEL 16

Vi bestemmer skæringspunkterne mellem x -aksen og cirklen fra eksempel 15:

$$(x - 1)^2 + (y - 4)^2 = 50 .$$

Da x -aksen har ligningen $y = 0$, indsætter vi $y = 0$ i cirkelns ligning:

$$(x - 1)^2 + (0 - 4)^2 = 50 \Leftrightarrow (x - 1)^2 + 16 = 50$$

$$\Leftrightarrow (x - 1)^2 = 34 \Leftrightarrow x - 1 = \pm\sqrt{34}$$

$$\Leftrightarrow x = 1 \pm \sqrt{34} = \begin{cases} 6,831 \\ -4,831 \end{cases} .$$

Cirklen skærer altså x -aksen i tallene (punkterne) 6,831 og $-4,831$.

Tilsvarende kan vi finde cirkelns skæringspunkter med y -aksen ved i ligningen at sætte $x = 0$. Man finder, at $y = 11$ eller $y = -3$.