

**OPGAVE 5.01\***

Bestem afstanden mellem punkterne  $A$  og  $B$  når

- |                             |                                 |
|-----------------------------|---------------------------------|
| a. $A(3, 5)$ og $B(12, 10)$ | d. $A(5, 7)$ og $B(8, 3)$       |
| b. $A(0, 1)$ og $B(7, 12)$  | e. $A(-7, -6)$ og $B(5, 1)$     |
| c. $A(3, 4)$ og $B(-5, 0)$  | f. $A(23, 87)$ og $B(108, 219)$ |

**OPGAVE 5.02\***

I et koordinatsystem er tegnet linjestykker  $AB$  og  $CD$ , hvor endepunkterne har koordinaterne

$$A(-17,2) \quad , \quad B(16,58) \quad , \quad C(-10,21) \quad , \quad D(6,-42).$$

På en skitse kan linjestykkerne se ud til at være lige lange. Er de det?

**OPGAVE 5.05\***

Bestem de eksakte værdier af sidelængderne i  $\triangle ABC$ , når

- |  |  |
|--|--|
| a. $A(-3, 4)$ , $B(2, 7)$ , $C(10, 1)$ | c. $A(4, 0)$ , $B(0, -5)$ , $C(-5, -5)$  |
| b. $A(5, 3)$ , $B(7, -2)$ , $C(-5, 4)$ | d. $A(7, -4)$ , $B(-3, -4)$ , $C(-5, 6)$ |

(”eksakt” betyder at man f.eks. skriver  $\sqrt{2}$  i stedet for 1,4142...)

**OPGAVE 5.14\***

Angiv centrum  $C$  og radius  $r$  for hver af de cirkler, der fremstilles ved følgende ligninger:

- |                                 |                            |
|---------------------------------|----------------------------|
| a. $(x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 16$ | d. $x^2 + y^2 = 3$         |
| b. $x^2 + (y + 3)^2 = 1$        | e. $(x - 5)^2 + y^2 = 6^2$ |
| c. $(x + 4)^2 + (y + 1)^2 = 5$  |                            |

Undersøg desuden, om  $(2, 5)$  ligger på cirklen e).

**OPGAVE 5.14 - DEL 2:**

Tegn cirklerne fra opgave 5.14 i geogebra og brug geogebra til at finde centrum og radius.

**OPGAVE 5.15\***

Bestem centrum  $C$  og radius  $r$  for de cirkler, der fremstilles ved følgende ligninger:

- |                                 |                              |
|---------------------------------|------------------------------|
| a. $x^2 + y^2 - 4x - 4y = -4$   | c. $x^2 + y^2 - 2x - 2y = 0$ |
| b. $x^2 + y^2 + 10x - 4y = -13$ | d. $x^2 + y^2 - 4y = 45$     |

**OPGAVE 5.17\***

En cirkel har ligningen  $x^2 + y^2 - 8y = 33$ . Bestem de eksakte koordinater til cirkelns skæringspunkter med koordinataksene.

Der er TO metoder til 5.17:

Den nemme: Tegn cirklen i geogebra og benyt skæringsværktøj.

Den svære: (uden computer) skæring med  $x$ -aksen betyder at  $y$  skal være 0. Løs ligning. Skæring med  $y$ -aksen betyder at  $x$  skal være 0. Løs ligning. (husk at det er 2.gradsligninger, så der er altid to løsninger)

### OPGAVE 5.19\*

---

En cirkel  $c$  har ligningen  $x^2 + 6x + y^2 + 4y = 12$ , mens punkterne  $P$ ,  $Q$  og  $R$  har koordinaterne  $P(0, 2)$ ,  $Q(1, -6)$  og  $R(-5\frac{1}{2}, 2)$ .

Afgør ved en beregning, om de tre punkter ligger på  $c$ , uden for  $c$  eller inden for  $c$ .

### OPGAVE 5.20

---

En cirkel har centrum i  $(-7, 2)$  og radius 17. Afgør ved beregning om punkterne  $P(8, 10)$ ,  $Q(-15, 17)$ ,  $R(-22, -5)$  og  $S(2, 22)$  ligger på, inden for eller uden for cirklen.

### OPGAVE 5.26

---

Går cirklen med centrum i  $(7, -4)$  og radius 53 gennem punktet  $P(35, 42)$ ? Går den gennem  $Q(52, -32)$ ? Skriv ligningen for cirklen op.

### OPGAVE 5.34\*

---

Opskriv en ligning for linjen  $m$ , når den går gennem punktet  $P$  og har hældningskoefficienten  $a$ .

- |                                    |                                     |
|------------------------------------|-------------------------------------|
| a. $P(2, -1)$ og $a = -2$          | d. $P(1, 3)$ og $a = -\frac{2}{5}$  |
| b. $P(3, 0)$ og $a = \frac{1}{3}$  | e. $P(-3, 7)$ og $a = 0$            |
| c. $P(6, -\frac{1}{2})$ og $a = 5$ | f. $P(3, -1)$ og $a = -\frac{1}{2}$ |

### OPGAVE 5.35

---

Opskriv en ligning for linjen  $m$ , når den går gennem punktet  $P$  og har hældningskoefficienten  $a$ .

- |                                    |                                    |
|------------------------------------|------------------------------------|
| a. $P(0, 4)$ og $a = 2$            | c. $P(0, -\frac{1}{2})$ og $a = 7$ |
| b. $P(0, 3)$ og $a = -\frac{1}{4}$ | d. $P(2, 1)$ og $a = 2$            |

### OPGAVE 5.36

---

Angiv en ligning på formen  $y - y_0 = a(x - x_0)$  for linjen gennem  $A$  og  $B$ , når

- $A(-1, 2)$  og  $B(5, 6)$
- $A(-1, 5)$  og  $B(4, 5)$
- $A(6, -4)$  og  $B(-5, 6)$
- $A(2, 6)$  og  $B(4, -2)$
- Linjen gennem  $(1, 3)$  og  $(-5, p)$  har hældningskoefficienten  $-3$ . Bestem  $p$ . Opskriv derefter en ligning for linjen.

Kontrol: tegn linjerne i geogebra og se om du havde ret.

**OPGAVE 5.38\***

Undersøg, om linjerne  $m$  og  $n$  er ortogonale, når

- $m: y = -\frac{1}{2}x + 67$  og  $n: y = 2x + 5$
- $m: y = 8x - 7$  og  $n: y = -0,125x + 9$
- $m: y = 3x - 7$  og  $n: y = \frac{1}{9}x - 6$
- $m: 3x - 2y = 6$  og  $n: 2x + 3y - 12 = 0$
- $m: 5x - 25y = -\frac{1}{2}$  og  $n: -5x - y + 334 = 0$
- $m: x = 3$  og  $n: 3y = 6 - x$
- $m: x = -6$  og  $n: y = 8$

Kontrol: Tegn linjerne i geogebra og se om du havde ret.

**OPGAVE 5.40\***

Linjerne  $m$  og  $n$  er givet ved ligningerne

$$m: 3x - 4y = 2 \text{ og } n: kx + 7y = 12.$$

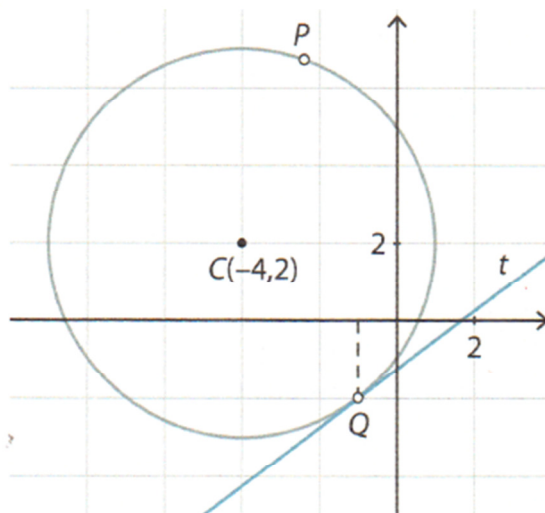
- Bestem  $k$ , så  $m$  og  $n$  er ortogonale.
- Bestem  $k$ , så  $m$  og  $n$  er parallelle.

**OPGAVE 5.42**

På figuren ses en cirkel med radius 5. Bestem en ligning for cirklen.

Vis, at cirklen går gennem  $(-1, -2)$ .

På figuren er  $t$  cirkeltangenten i  $Q(-1, -2)$ . Angiv en ligning for  $t$ .



Nemme metode: Tegn dig frem til svaret i geogebra.

Svære metode: find hældningen af CQ. Tangenten skal være vinkelret på.

**OPGAVE 5.47\***

Løs under anvendelse af substitutionsmetoden følgende ligningssystemer og skitser situationerne i et koordinatsystem.

a.  $3x - \frac{1}{2}y = 2$   
 $x + 2y = 5$

c.  $\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}y = 0$   
 $3x - y = 10$

e.  $2x - 3y = 16$   
 $-3x + 2y = -14$

b.  $\frac{1}{3}x - \frac{1}{2}y = 1$   
 $2x = 3y + 6$

d.  $2x + 5y = 0$   
 $-4x = 10y + 5$

f.  $x - y = 2$   
 $x + y = 0$

”substitutionsmetode” = Få et  $x$  eller et  $y$  til at stå alene i én af ligningerne, og sæt derefter udtrykket ind i den anden ligning på  $x$ 's (eller  $y$ 's) plads.

”skitser” = tegn de to linjer i geogebra og brug skæringsværktøj.

**OPGAVE 5.49**

Løs hvert af følgende ligningssystemer:

a.  $-18x + 12y = 16$   
 $12x - 8y = 10$

c.  $2y - x + 3 = 0$   
 $7x - 14y = 21$

e.  $x + 3y = 4$   
 $2x - 4y = -2$

b.  $x - y = 2$   
 $x + y = 10$

d.  $\sqrt{2}x = \sqrt{8}$   
 $x + y = 5$

f.  $x + 5y = 5$   
 $y = 2$

**OPGAVE 5.52\***

Bestem den eksakte afstand mellem punktet  $A$  og linjen  $m$ , når

a.  $A(7, -1)$  og  $m: y = 2x - 1$

b.  $A(2, 5)$  og  $m: 3x - 4y = -4$

c.  $A(1, 1)$  og  $m: y = -3x + 4$

d.  $A\left(5, 5\frac{1}{2}\right)$  og  $m: 17x - 12y = -15$

Kontrol: Tegn linje og punkt i geogebra og få geogebra til at bestemme afstanden.

**OPGAVE 5.53**

Linjen  $m$  indeholder punkterne  $A$  og  $B$ . Bestem afstanden fra punktet  $C$  til  $m$ , når

a.  $A(2, 1)$ ,  $B(6, 8)$  og  $C(17, 15)$

b.  $A(-6, 3)$ ,  $B(-1, 5)$  og  $C(7, 18)$ , 3 decimaler

**OPGAVE 5.58**

Beregn afstanden fra punktet  $P(7, 3)$  til linjen  $m: y = -\frac{1}{2}x - 2$ . Angiv derefter en ligning for den cirkel, der har  $P$  som centrum og  $m$  som tangent.

### OPGAVE 5.61\*

Bestem koordinaterne til eventuelle skæringspunkter mellem cirklen  $c$  og linjen  $m$ , når

- a.  $c: (x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 25$  og  $m: y = -x + 9$
- b.  $c: x^2 + (y + 3)^2 = 2$  og  $m: y = x - 3$
- c.  $c: (x + 4)^2 + (y + 1)^2 = 5$  og  $m: y = -x + 1$
- d.  $c: (x + 4)^2 + (y + 1)^2 = 5$  og  $m: y = x + 6$
- e.  $c: (x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 13$  og  $m: y - 4 = \frac{-2}{3}(x - 5)$
- f.  $c: x^2 + y^2 + 8x - 4y = 5$  og  $m: 4y = 3x - 5$

Start med at løse dem i geogebra.

Prøv derefter om du kan løse de første ved at sætte linjen ind på  $y$ 's plads i cirklen, og så løse det som en svær 2.gradsligning.

### OPGAVE 5.63\*

Cirklerne  $c_1$  har ligning

$$c_1 : x^2 + y^2 - 4x - 12y + 23 = 0$$

Vis, at cirklerne går gennem punktet  $(6, 7)$ .

Bestem koordinaterne til skæringspunkterne mellem  $c_1$  og  $y$ -aksen.

Bestem centrum og radius

### OPGAVE 5.70

Linjen  $m$  går gennem  $(2, 0)$  og har hældningen 3. Skriv en ligning for linjen og bestem den spidse vinkel, som linjen danner med  $x$ -aksen.

### OPGAVE 5.71\*

Linjen  $m$  skærer koordinataksene i  $A(0, 3)$  og  $B(6, 0)$ . Bestem de spidse vinkler, som linjen danner med akserne.

### OPGAVE 5.72\*

En linje danner en vinkel på  $50^\circ$  med  $x$ -aksen og går gennem punktet  $(0, 4)$ . Skriv en ligning for linjen (3 decimaler). Der er to løsninger.

### OPGAVE 5.75\*

Linjerne  $m_1$  og  $m_2$  skærer hinanden i  $(-2, 4)$  og har hældningerne  $\frac{1}{2}$  og  $-3$ . Hvilke spidse vinkler danner de med  $x$ -aksen? Bestem den spidse vinkel mellem linjerne i deres skæringspunkt.

### OPGAVE 5.76

Angiv den spidse vinkel mellem linjerne  $m_1$  og  $m_2$  når deres ligninger er

$$m_1 : y = -3x \quad , \quad m_2 : y = -2x - 2$$

### OPGAVE 5.77

---

Bestem den spidse vinkel mellem linjerne med ligningerne

$$m_1 : y = -2x + 13 \quad , \quad m_2 : 2x - 3y - 9 = 0$$

i deres skæringspunkt.

### OPGAVE 5.80\*

---

En cirkel har ligningen

$$x^2 + y^2 + 6x + 4y = 12 .$$

Bestem centrum og radius for cirklen.

Vis, at punktet  $P(1, 1)$  ligger på cirklen.

Bestem en ligning for tangenten til cirklen i punktet  $P$ .

Løs opgaven med hjælp af geogebra.

### OPGAVE 5.81

---

En cirkel har centrum i  $C(50, 45)$  og radius 5.

Undersøg, om punktet  $P(52, 49)$  ligger på cirklen.

Linjen  $m$  går gennem  $P$  og står vinkelret på linjen gennem  $C$  og  $P$ . Bestem en ligning for  $m$ .

Beregn koordinaterne til hvert af skæringspunkterne mellem  $m$  og cirklen.

### OPGAVE 5.82\*

---

En cirkel  $c_1$  har ligningen

$$x^2 - 6x + y^2 + 4y = 12 .$$

Bestem centrum og radius for cirklen og tegn den.

Vis, at punktet  $P(6, -6)$  ligger på cirklen.

Bestem en ligning for tangenten  $t$  til cirklen i punktet  $P$ .

Linjen  $t$  er også tangent til en anden cirkel  $c_2$ , der har centrum i  $Q(16, 14)$ . Bestem en ligning for denne cirkel.

### OPGAVE 5.85\*

---

En linje  $m_1$  har ligningen  $y = \frac{3}{4}x - \frac{9}{4}$ . Bestem afstanden fra punktet  $C(4, 7)$  til linjen.

Bestem en ligning for den cirkel med centrum  $C$ , der tangerer  $m_1$ .

Gør rede for, at punktet  $P(8, 10)$  ligger på cirklen og bestem en ligning for tangenten  $m_2$  til cirklen i dette punkt.

**OPGAVE 5.88**

---

Linjen  $m_1$  har i koordinatsystemet ligningen  $y = -2x + 14$ .

Bestem en ligning for den linje  $m_2$ , der går gennem punktet  $A(-4, 3)$ , og som står vinkelret på  $m_1$ .

**OPGAVE 5.89\***

---

To linjer  $m_1$  og  $m_2$  har ligningerne

$$m_1 : y = \frac{3}{4}x + \frac{9}{2} \quad , \quad m_2 : y = 3x + 1 .$$

Bestem den spidse vinkel mellem linjerne.