Rækker

En række er i matematik en sum af flere led. Sum betyder, at der skal lægges sammen (’plusses’) og led er det, der skal lægges sammen.

En endelig række med 20 led:

$$1+2+3+4+…+19+20$$

Hvis $n=100$ så har rækken 100 led:$$1+2+3+4+…+100$$

Vi kender også summen af rækken, den er $50·101=5050$ (*argumenter selv for det*).

Den generelle formel for en endelig række med n led er:

$$a\_{1}+a\_{2}+a\_{3}+a\_{4}+…+a\_{n}$$

### Opgave 1

$$1+2+3+4+…+200$$

a. Hvor mange led har rækken?

b. Bestem summen af rækken.

### Opgave 2

$$1+2+3+4+…+2000$$

a. Hvor mange led har rækken?

b. Bestem summen af rækken.

### Opgave 3

$$1+2+3+4+…+n$$

a. Hvor mange led har rækken?

b. Find formlen der kan beregne summen af rækken.

c. Argumenter for, at formlen også gælder hvis $n$ er et ulige tal. Fx $n=$101.

Rækker kan skrives med symbolet $Σ$, der er forkortelsen for en sum. Under sumtegnet skrives hvilket tal, der skal indsættes i formlen som det første og over sumtegnet skrives det tal, der skal indsættes som det sidste.

Man anvender kun de hele tal, når man laver rækker. Formlens $i$ er altså tallene 0, 1, 2, 3 … eller 1, 2, 3… . Under sumtegnet kan man se, om *i* skal starte med 0 eller 1. Over sumtegnet bliver det vist, hvordan formlen slutter.

### Eksempel 1 En uendelig række

$$\sum\_{i=0}^{n}i=0+1+2+3+4+…+n$$

### Eksempel 2 En endelig række

$$\sum\_{i=1}^{10}\frac{1}{i}=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+…+\frac{1}{10}$$

### Opgave 3 Skriv alle led i rækken som vist i eksempel 2.

$$\sum\_{i=0}^{5}(2·i+1)$$

### Opgave 4 Skriv alle led i rækken

$$\sum\_{i=1}^{6}(2·i-1)$$

### Opgave 5

a. Skriv alle led i rækkerne og udregn summen

$$\sum\_{i=0}^{3}2^{i}$$

$$\sum\_{i=0}^{4}2^{i}$$

$$\sum\_{i=0}^{5}2^{i}$$

b. Sammenlign summerne med potenser der har grundtallet 2. Et eksempel på en potens med
grundtallet 2 er $2^{5}$.

c. Gæt en regel for rækken $$\sum\_{i=0}^{n}2^{i}$$

I opgave 5 har du nok gættet reglen for rækken. Afprøv også din regel andre tal. Passer reglen kun, fordi 2 er et pænt tal, eller passer den også andre steder?

#### Opgave 6

a. Vælg 2 positive hele tal og indsæt dem i stedet for 2 i rækken.

b. Udregn summen for de første 4 led og tjek om din formel passer.

c. Der findes faktisk en formel der passer. Kan du finde den?

#### Opgave 7 Diskuter

a. Hvor mange forskellige tal skal du afprøve formlen på, for at være sikker på at den altid er korrekt?

### Sætning og bevis

Her er et bevis for formlen når $n=5$, der gælder for positive tal, $a$.

$$\sum\_{i=0}^{5}a^{i}=1+a+a^{2}+a^{3}+a^{4}+a^{5}$$

Summen af tallene kalder vi for S.

$1+a+a^{2}+a^{3}+a^{4}+a^{5}=S$ (1)

Vi opfinder en anden række, der kan hjælpe os. Det gør vi ved at gange vores række ovenfor med $a $på begge sider.

$a·\left(1+a+a^{2}+a^{3}+a^{4}+a^{5}\right)=a·S$ gang ind i parentesen

$a+a^{2}+a^{3}+a^{4}+a^{5}+a^{6}=a·S$ (2)

Ved at sammenligne de to rækker, altså (1) og (2) med hinanden, kan vi se, at de har mange ens led. Hvis vi trækker dem fra hinanden, så vil alle de ens led gå ud med hinanden.

$$\left(a+a^{2}+a^{3}+a^{4}+a^{5}+a^{6}\right)-\left(1+a+a^{2}+a^{3}+a^{4}+a^{5}\right)=a·S-S$$

$$a^{6}-1=a·S-S$$

$$a^{6}-1=(a-1)·S$$

$$\frac{a^{6}-1}{a-1}=S$$

### Opgave 8

Skriv beviset for $a=4$ og $n=5$.

Har vi lavet et system/mønster der kan generaliseres? Kan vi sige, at reglen passer for alle positive tal $n?$