

1.14 Eksempel. Logistisk vækst.

Antagelsen om ubegrænset adgang til føde er kun realistisk i begrænsede tidsrum. En mere realistisk model får man, hvis man antager at *væksthastigheden* er proportional med populationens størrelse (som ved eksponentiel vækst), men også proportional med afstanden til en øvre grænse M for populationens størrelse.

Hvorvidt denne model afspejler en populations udvikling, kan man kun afgøre ved at afprøve modellen på en virkelig population. Da vi eksplicit taler om vækst, anvender vi t (tiden) som uafhængig variabel.

Vi kan nu opskrive differentialligningen:

$$(1.15) \quad \frac{dy}{dt} = ay(M - y)$$

Hvor $M - y$ er afstanden til den øvre grænse for populationen.

Ligningen løses som før ved separation, idet man bemærker at $y = 0$ og $y = M$ begge er trivielle løsninger til ligningen.

$$\int \frac{dy}{y(M-y)} = \int a dt$$

Det første integral er ikke så ligetil at løse, men det udregnes ved en teknik, der kaldes for udvikling på partialbrøker. Vi forsøger således at skrive integranden, som en sum af to brøker, hver kun med en faktor.

$$\frac{1}{y(M-y)} = \frac{p}{y} + \frac{q}{M-y} = \frac{p(M-y)+qy}{y(M-y)} = \frac{pM+(q-p)y}{y(M-y)}$$

Hvis denne identitet skal gælde for alle y følger det at $q = p$ og $pM = 1$, så $p = q = \frac{1}{M}$. Idet vi ganger igennem med M , opnår vi differentialligningen:

$$\int \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{M-y} \right) dy = \int a M dt \Leftrightarrow \ln y - \ln(M-y) = aMt + k$$

Vi har her antaget at $y > 0$ og $y < M$, som var forudsætningen for modellen. Ved reduktion ved hjælp af logaritmeregler får man:

$$\ln y - \ln(M-y) = aMt + k \Leftrightarrow \ln \frac{y}{M-y} = aMt + k \Leftrightarrow \frac{y}{M-y} = e^{aMt+k}$$

Løser vi denne ligning med hensyn til y , og sætter $e^k = c$, hvor c er en positiv konstant får man løsningen:

$$(1.15) \quad y = cM \frac{e^{aMt}}{1+ce^{aMt}} \quad \text{eller} \quad y = cM \frac{1}{e^{-aMt}+c}$$

Ofte ser man i løsningen c erstattet med $1/c$, hvorefter løsningen får den simple form:

$$(1.15) \quad y = \frac{M}{1+ce^{-aMt}}$$

a og M er fastlagt ud fra modellen, mens c er fastlagt ved populationens størrelse på et givet tidspunkt.

1.15 Eksempel

I en sø er fosforkoncentrationen en funktion $y = f(t)$ af tiden. I en model forudsættes det at der pr. døgn udledes en konstant mængde fosfor, mens den mængde der afledes fra søen er proportional med koncentrationen.

Man kan opstille en differentialligning, der udtrykker, at den relative tilvækst i fosforkoncentration i tidsrummet Δt er en konstant gangen Δt minus en konstant gange y gange Δt .

$$\frac{\Delta y}{y} = a\Delta t - by\Delta t \Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta t} = y(a - by) \Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta t} = by\left(\frac{a}{b} - y\right)$$

Ved at lade Δt gå imod nul får man en differentialligning, som man genfinder som den logistiske ligning.

$$\frac{dy}{dt} = by\left(\frac{a}{b} - y\right)$$

For den pågældende sø er $b = 0,00001$ og $a/b = 200$. Endvidere opfylder f ligningen $f(475) = 107$. Bestem en forskrift for f , og beregn $f(1000)$, samt væksthastigheden for fosforkoncentrationen til $t = 1000$. Ved at indsætte $f(475) = 107$ i løsningsformlen (1.15) finder man:

$$107 = \frac{200}{1 + ce^{-0,002 \cdot 475}} \Leftrightarrow 107ce^{-0,95} = 200 - 107 \Leftrightarrow c = \frac{93}{107e^{-0,95}} = 2,20$$

Løsningen bliver da

$$y = \frac{200}{1 + 2,20e^{-0,002t}} \quad \text{med} \quad f(1000) = \frac{200}{1 + 2,20e^{-2}} = 154$$

Væksthastigheden er dy/dt , og den bestemmes ved direkte indsættelse i differentialligningen.

$$\frac{dy}{dt} = 0,00001 \cdot y(200 - y) = 0,00001 \cdot 154(200 - 154) = 0,0708$$