DE(T) GYLDNE SNIT

– i kunst, natur og matematik

3. udgave

Jesper Frandsen

SYSTIME >

1. Det gyldne snit

Indledning

Når der tales om det gyldne snit, skelnes der ikke altid mellem, om det er

- en måde at dele et linjestykke på
- nogle linjer/snit i en billedflade
- en form på et rektangel
- et tal.

Det er disse forskellige opfattelser, denne bogs titel hentyder til. Med lidt god vilje kan alle fire ting siges at være rigtige, men for ikke at blande tingene, benyttes i denne bog – som i mange andre fremstillinger – forskellige navne på de forskellige ting: det gyldne snit (der dækker de to øverste), det gyldne rektangel og tallet $\Phi = \frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$.

Normalt tilskrives det gyldne snit grækerne. Således fortæller en anekdote, at Eudoxos 420–355 f. Kr., der var matematiker og elev af Platon (ca. 427–347 f. Kr.), en gang gik rundt med en stok i hånden og bad forbipasserende om at sætte et mærke i stokken på det sted, de mente, den blev delt på den mest harmoniske måde. Da der var sat en række mærker, kunne han ikke undgå at bemærke, at de samlede sig om ét punkt, nemlig det der senere blev kendt som det gyldne snit.

Den gængse opfattelse er, at grækerne bevidst har benyttet det i bl.a. arkitektur, men der findes ingen kilder, der kan bekræfte det. Eksempelvis omtaler Vitruvius (1. årh. f. Kr.), der var romersk arkitekt, *ikke* det gyldne snit i sit værk *De architectura*, der består af 10 bøger og var tilegnet kejser Augustus. Disse bøger er en vigtig kilde til studiet af den antikke bygningskunst, selv om det ser ud til, at de ret skødesløst er udarbejdet efter græske kilder. I bøgerne omtales reglerne for dorisk, jonisk, korinthisk og toscansk arkitektur, men da det altid drejer sig om hele tal, vil det snart fremgå, at det ikke kan være præcise gyldne snit. Desuden behandles så forskellige ting som musik, solure, kraner, pumper og krigsmaskiner. At grækerne kendte det gyldne snit som matematisk begreb, er der imidlertid ikke tvivl om; dette omtales senere.

Første gang det fremgår, at man åbenbart synes, der er noget specielt ved det gyldne snit, er i bogen *En beundringsværdig geometrisk frembringelse* af Campanus (ca. 1250 e. Kr). Senere følger i 1509 en af de oftest citerede bøger om emnet, nemlig *De divina proportione* (Den guddommelige brøk) af Luca Pacioli (ca. 1445–1514).

Det kan ske, at navnet 'det gyldne snit' stammer fra 1835, hvor en tysk matematiker måske blandede to ting[1], nemlig

regula *aurera* (den gyldne regel)

og

secho devina (guddommeligt snit) ,

hvor den gyldne regel var en metode, der blev brugt i handelsregning. Siden er det i Tyskland og Norden blevet kaldt det gyldne snit, mens det andre steder oftest kaldes 'den guddommelige brøk', eng. 'the divine proportion'.

Vi vil på dette sted ikke gøre mere ud af det gyldne snits historie. Det bliver gjort i forbindelse med de enkelte emner.

Det gyldne snit

Vi indleder med en definition af det gyldne snit.

Definition. Hvis det om linjestykket AB på fig. 1 gælder, at det er delt af punktet C, så

$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b} ,$$

siges C at dele linjestykket AB i ***det gyldne snit***.

Fig. 1

Lidt mere populært kan definitionen udtrykkes sådan:

$$\frac{\text{hele linjestykket}}{\text{det største stykke}} = \frac{\text{det største stykke}}{\text{det mindste stykke}} .$$

På fig. 1 er a = 4,7 cm, b = 2,9 cm, så a+b = 7,6 cm. Brøkerne bliver i dette tilfælde

$$\frac{a+b}{a} = \frac{7,6}{4,7} = 1,6 \quad \text{og} \quad \frac{a}{b} = 1,6 ,$$

så i dette tilfælde deler C linjestykket AB i det gyldne snit.

[1] Denne teori stammer fra prof. O. Schmidt (1913–96). Måske hentydede han hermed til, at Martin Ohm i *Die reine Elementar–Mathematik*, 1835, som den formentlig første brugte navnet 'det gyldne snit'.

Eksempel 1. Linjestykket på fig. 2 er *ikke* delt i det gyldne snit, fordi

$$\frac{7+3}{7} = 1,43 \quad \text{og} \quad \frac{7}{3} = 2,33, \text{ så } \quad \frac{7+3}{7} \neq \frac{7}{3} .$$

Fig. 2

Hvis det på fig. 1 gælder, at a = 8, og C deler AB i det gyldne snit, vil vi bestemme b. Vha. definitionen finder vi, at

$$\frac{8+b}{8} = \frac{8}{b} \Leftrightarrow 8b+b^2 = 64 \Leftrightarrow b^2 + 8b - 64 = 0$$

$$\Leftrightarrow b = \frac{-8 \pm \sqrt{8^2+4\cdot 64}}{2} \Leftrightarrow b = 4,94 ,$$

da b er et positivt tal.

Hvis det på fig. 1 gælder, at det korte stykke har længden 8, dvs. b = 8, vil vi bestemme a, så C deler AB i det gyldne snit:

$$\frac{a+8}{a} = \frac{a}{8} \Leftrightarrow 8a+64 = a^2 \Leftrightarrow a^2 - 8a - 64 = 0$$

$$\Leftrightarrow a = \frac{8 \pm \sqrt{8^2+4\cdot 64}}{2} \Leftrightarrow a = 12,94 .$$

Sætning 1. C deler linjestykket AB i det gyldne snit, se fig. 3, netop når

$$\frac{a}{b} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Fig. 3

Bevis. Med udgangspunkt i definitionen har vi, at

$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b} \Leftrightarrow ab + b^2 = a^2 \Leftrightarrow a^2 - ab - b^2 = 0 .$$

Nu er det hverken a eller b, vi skal bestemme, men forholdet $\frac{a}{b}$. Derfor divideres den sidste ligning med b^2, og den fremkomne andengradsligning løses med $\frac{a}{b}$ som den ubekendte :

$$\frac{a^2}{b^2} - \frac{ab}{b^2} - \frac{b^2}{b^2} = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{a}{b}\right)^2 - \frac{a}{b} - 1 = 0 \Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2} .$$

Da a og b er længder, er $\frac{a}{b}$ positiv, så det er kun +, der kan bruges. ∎

Bemærk, at da $\frac{a}{b} = \frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$, er iflg. definitionen $\frac{a+b}{a} = \frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$.
Løsningerne til ligningen $x^2 - x - 1 = 0$, som vi mødte i beviset for sætning 1, møder vi igen og igen. De betegnes ofte, men desværre ikke altid, med Φ og Φ', hvor Φ er det græske bogstav store fi:

$$\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1{,}618034... \quad \text{og} \quad \Phi' = \frac{1-\sqrt{5}}{2} = -0{,}618034...$$

Bogstavet er måske valgt, fordi det er forbogstavet i den græske skrivemåde for den græske billedhugger Phidias (ca. 500–430 f. Kr.), som bl.a. ledede den skulpturelle udsmykning af Parthenon på Akropolis. Det fortælles, at han ofte brugte det gyldne snit i sine skulpturer.

Bemærk, at decimalerne i Φ og Φ' er de samme, og at

1) $\Phi^2 - \Phi - 1 = 0$ 2) $\Phi'^2 - \Phi' - 1 = 0$

3) $\Phi \cdot \Phi' = -1$ 4) $\Phi + \Phi' = 1$.

Netop hvis der er tale om et gyldent snit, gælder det altså iflg. sætning 1, at $\frac{a}{b} = \Phi$. Vi vil nu bestemme det reciprokke forhold $\frac{b}{a}$, og får

$$\frac{b}{a} = \frac{1}{\frac{a}{b}} = \frac{1}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} = \frac{2(1-\sqrt{5})}{(1+\sqrt{5})(1-\sqrt{5})} = \frac{2(1-\sqrt{5})}{-4} = -\frac{1-\sqrt{5}}{2} = -\Phi' = 0{,}6180...$$

Det bemærkelsesværdige ved dette resultat er, at når der er tale om et gyldent snit, er decimalerne i $\frac{a}{b}$ og $\frac{b}{a}$ ens, eller mere præcist, at

$$\frac{a}{b} - 1 = \frac{b}{a} \,. \qquad (1)$$

Vi vil undersøge, om der er andre tal, der opfylder dette, og sætter derfor $\frac{a}{b} = x$, hvorved (1) får udseendet

$$x - 1 = \frac{1}{x}$$

som løses:

$$x - 1 = \frac{1}{x} \Leftrightarrow x^2 - x = 1 \Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \,.$$

Φ og Φ' er således de eneste tal med den egenskab, at hvis man trækker 1 fra tallet, fås det reciprokke tal, og Φ er det eneste *positive* tal med egenskaben. I fortsættelse af 1) – 4) noteres

5) $\Phi - 1 = \frac{1}{\Phi}$ eller $\Phi = \frac{1}{\Phi - 1}$

6) $\Phi' - 1 = \frac{1}{\Phi'}$ eller $\Phi' = \frac{1}{\Phi' - 1}$.

Eksempel 2. Ovenstående får det til at se ud, som om Φ er noget specielt. Denne opfattelse underbygges af, at man ved udregninger med Φ og Φ' ofte får de samme decimaler:

a) $1{,}618^2 = 2{,}618$ dvs. $\Phi^2 = \Phi + 1$

b) $1{,}618^3 - 1{,}618^2 = 1{,}618$ dvs. $\Phi^3 - \Phi^2 = \Phi$

c) $0{,}618 \cdot 2{,}618 = 1{,}618$ dvs. $(\Phi-1)(\Phi+1) = \Phi$

d) $0{,}618^2 = 1 - 0{,}618$ dvs. $(\Phi-1)^2 = 1 - (\Phi-1)$

e) $2{,}618 \cdot 1{,}618 = 2{,}618 + 1{,}618$ dvs. $(\Phi+1)\Phi = \Phi + 1 + \Phi$

f) $\frac{1}{1{,}618^2} = 1 - 0{,}618$ dvs. $\frac{1}{\Phi^2} = 1 - (\Phi-1)$.

Da $\frac{\Phi}{1} = \Phi$ er linjerne på fig. 4 a–b iflg. sætning 1 begge delt i det gyldne snit, idet den korte del kan anbringes i begge ender.

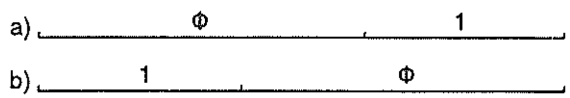


Fig. 4

Vha. situationen på fig. 4 kan det beregnes, hvor langt inde på et linjestykke de gyldne snit ligger. Det svarer nemlig til den brøkdel, 1 udgør af hele linjestykkets længde, dvs. $\Phi+1$:

$$\frac{1}{\Phi+1} = \frac{1}{2{,}618} = 0{,}382 \approx 38\% \,.$$

Det gælder altså, at

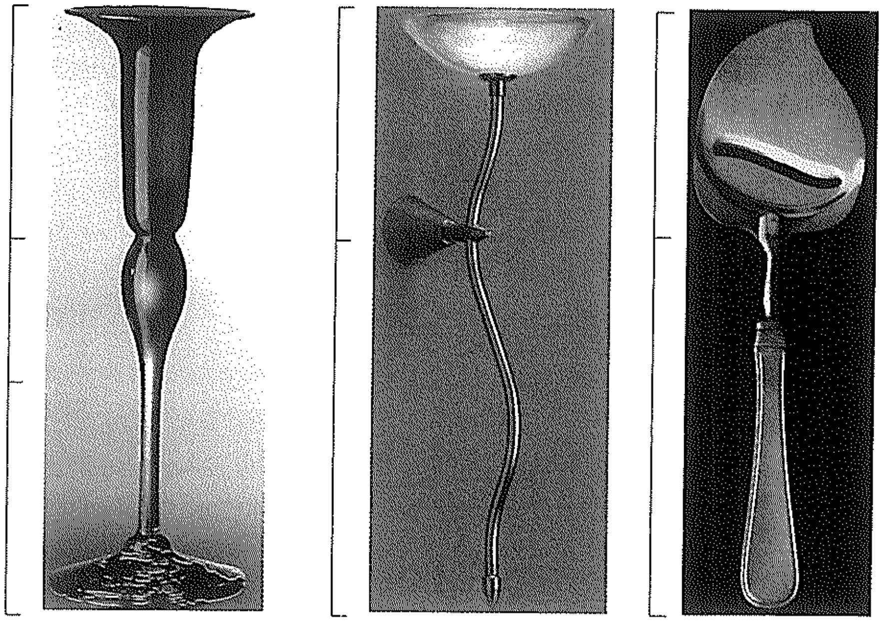
et linjestykkes gyldne snit ligger 38% inde på linjestykket.

Eksempel 3. Hvis et linjestykke har længden 7 cm, ligger de gyldne snit $0{,}38 \cdot 7$ cm = 2,67 cm inde på linjen. Tilsvarende fås, at de gyldne snit ligger 6,46 cm inde på en 17 cm lang linje.

Hvis det gyldne snit ligger 5 cm inde på et linjestykke, kan vi bestemme linjestykkets længde a:

$$0{,}38 \cdot a = 5 \Leftrightarrow a = \frac{5}{0{,}38} = 13{,}16.$$

Fig. 5
Som et kuriosum kan det nævnes, at det i et læserbrev i 'Ingeniøren' d. 2/2-90 blev nævnt, at det for en flaske Gammel Dansk gælder, at $h/d = \pi$, hvor h er højden til bitterens overflade og d er diameteren i bunden! Kontroller selv.



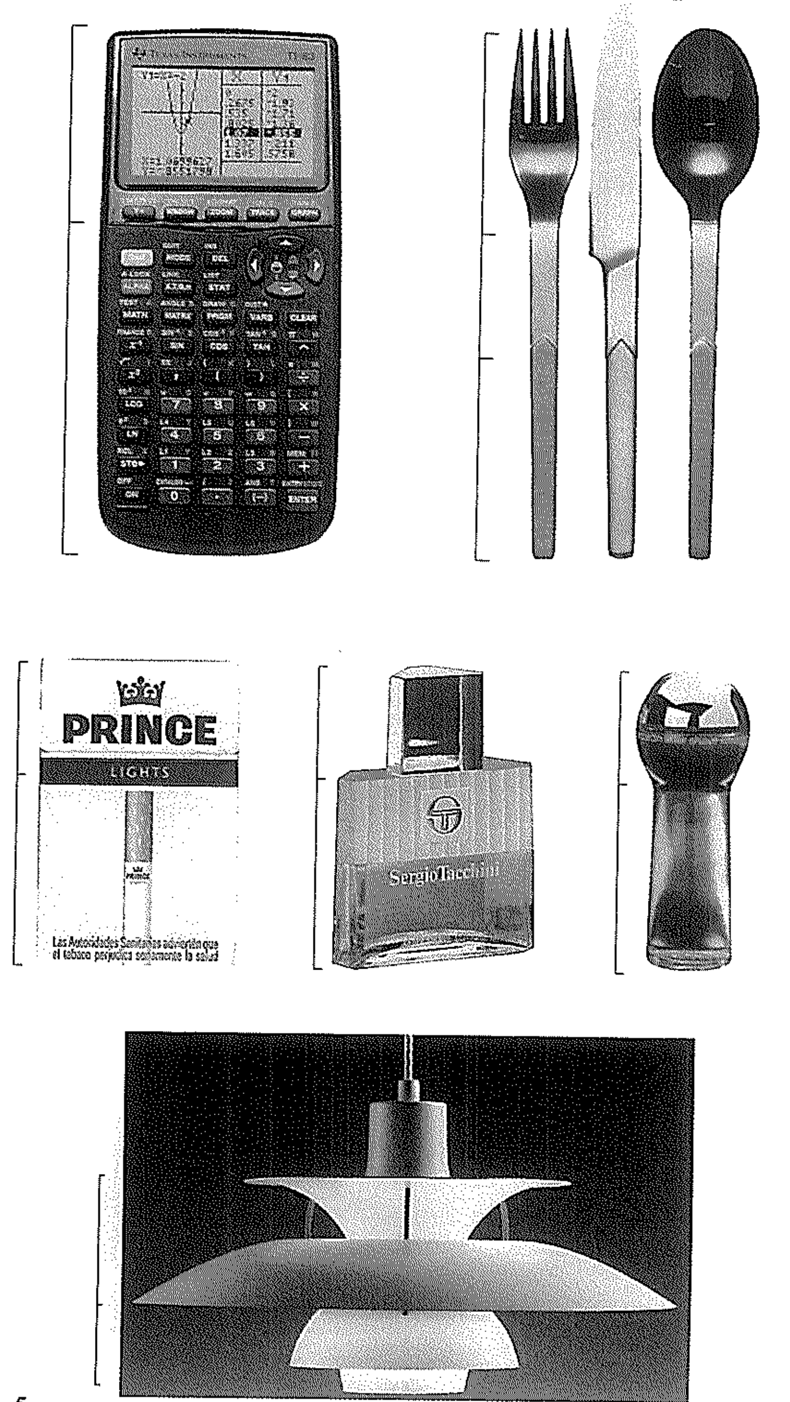
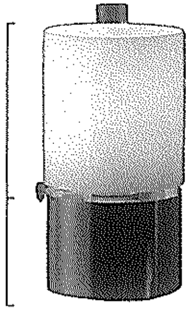
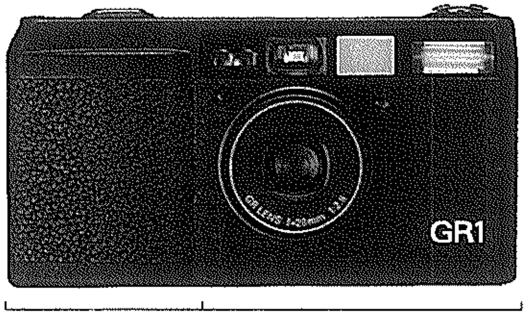
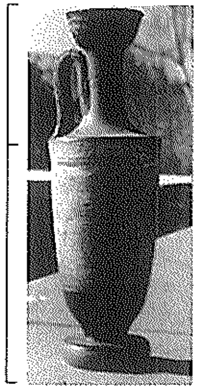


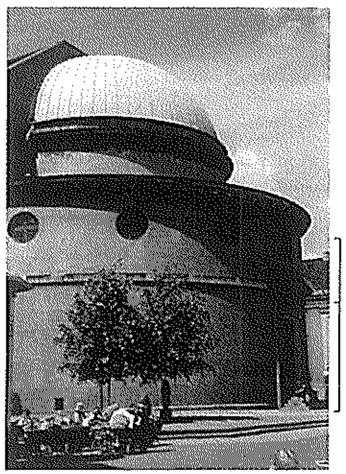
Fig. 5







Lekyth



Domkirken i København

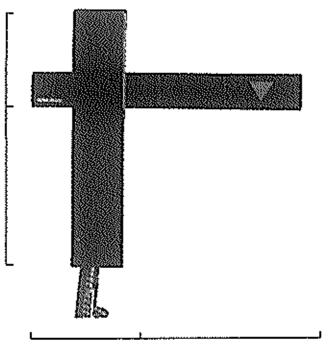


Fig. 5

For at skabe sammenhæng, til det mange forbinder med det gyldne snit, ses på billederne en række eksempler på ting, hvis design indeholder tydelige gyldne snit; disse er i hvert tilfælde markeret. Vasen er en græsk lekyth. Tingene er næsten tilfældigt valgt, men var absolut ikke svære at finde. I den forbindelse skal man huske på, at med de tusindvis af ting vi omgiver os med i hverdagen, kan man finde eksempler på et næsten hvilket som helst kompositorisk princip. Alligevel er det tankevækkende, hvor mange der indeholder gyldne snit.

Det viser sig, at man ved hjælp af et gyldent snit i et linjestykke hurtigt kan angive andre gyldne snit.

Sætning 2. Hvis linjestykket AB på fig. 6a er delt af C i det gyldne snit, gælder det, at

1) AD deles i det gyldne snit af både B og C, fig. 6b.

2) EB deles i det gyldne snit af A, fig 6c.

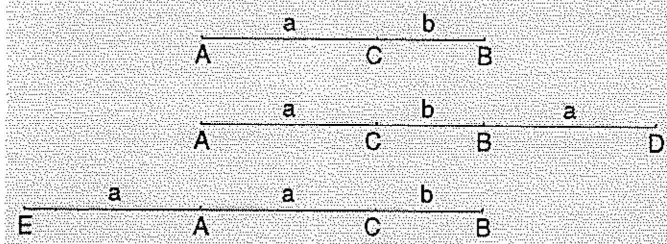


Fig. 6a

Fig. 6b

Fig. 6c

Bevis. Da det er givet, at C deler AB i det gyldne snit, er $\frac{a}{b} = \frac{a+b}{a} = \Phi$.

Vi vil vise, at C deler AD i det gyldne snit, og ser derfor på forholdet mellem de to linjestykker:

$$\frac{|CD|}{|AC|} = \frac{a+b}{a} \Leftrightarrow \frac{|CD|}{|AC|} = \Phi .$$

Beviset for de to andre påstande forløber helt tilsvarende. ■

Lysestagen på s. 12 og bestikket på s. 13 er eksempler på fig. 6b, mens vinduerne/døren på s. 14 er et eksempel på fig. 6c.

2. Gyldne snit i billeder

Mens det gyldne snit i matematisk forstand er tæt knyttet til den eksakte værdi af Φ, fortolker man det mere bredt i kunst, så linjer, der ligger ca. 38% inde i en billedflade, kaldes gyldne snit. Da både de lodrette og de vandrette sider i billedet har to gyldne snit, bliver der på en rektangulær billedflade fire gyldne snit, se fig. 1. Hvis de gyldne snit i et billede er markante, danner de synlige nye rektangler, og i nogle af disse er de oprindelige gyldne snit også gyldne snit; eksempelvis er CG et gyldent snit i rektanglet BDHF, jvf. sætning 2, kap. 1.

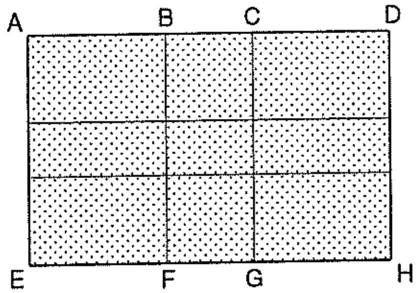


Fig. 1

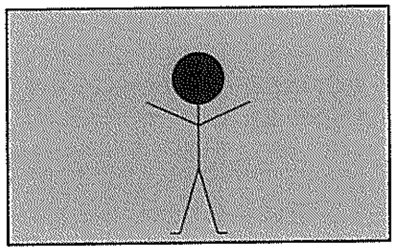


Fig. 2a

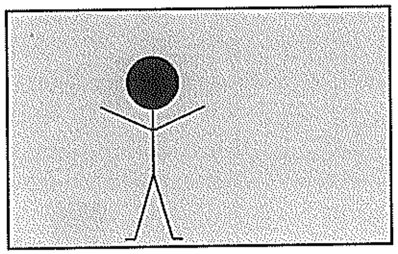


Fig. 2b

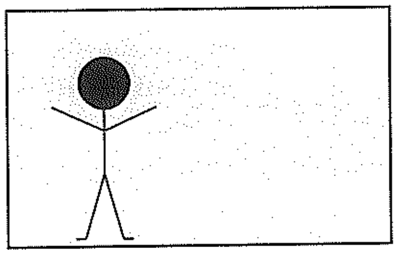


Fig. 2c

Når det gyldne snit er så omtalt og kendt, skyldes det, at det er et simpelt kompositorisk princip, der gennem tiderne igen og igen er benyttet i kunstværkers opbygning og til at pege på vigtige detaljer, der dermed kan få en større vægt i analyse og fortolkning. Når dette er almindeligt accepteret, skyldes det bl. a. tradition og psykologiske faktorer, men da noget tilsvarende senere omtales i forbindelse med *det gyldne rektangel*, vil vi ikke komme nærmere ind på det her.

De mange forekomster af gyldne snit kan skyldes, at hvis man på et billede anbringer motivet symmetrisk mht. billedfladens midterakse, giver det et statisk præg, se fig. 2a.

Anbringes det derimod lidt forskudt, får billedet et mere dynamisk udtryk. Da det gyldne snit kun afviger med ca. 12% fra midterlinjen, ses det, at ønsket om dynamik kan medvirke til den ofte forekommende brug af det gyldne snit som formskabende element, fig. 2b. Forskydes motivet ret meget mere vil billedet ofte 'vælte', fig. 2c.

En kendsgerning er det, at man, bevidst eller ubevidst, tiltrækkes af de steder i billedfladen, hvor de gyldne snit ligger, og dermed især af de fire punkter hvor de skærer hinanden. Det giver de elementer, der er anbragt disse steder, større betydningsindhold.

Når en kunstner komponerer sit værk, er det naturligvis de samme mekanismer, der – igen bevidst eller ubevidst -- får kunstneren til at benytte de gyldne snit. Det skal hertil bemærkes, at (næsten) alle kunstnere kender begrebet, og vi skal senere se eksempler på, at kunstnere vedkender sig en bevidst anvendelse af det gyldne snit. Når ordet bevidst benyttes, er det fordi, der i perioder har været stillet så ubønhørlige krav om klassiske kompositioner i billeder, at det har virket som så snærende krav til kunstnerne, at det har været naturligt at gøre oprør – og i sådanne perioder og for sådanne kunstnere vil en anvendelse af det gyldne snit ofte være ubevidst. I Danmark var det fx tilfældet i en periode efter C.W.Eckersberg (1783–1853), der sammen med andre stillede store klassiske krav til komposition. Det var – og er stadig? – også tilfældet i tiden efter ca. 1960. Her passede det gyldne snit ikke med den fremherskende marxistiske ideologi, der ikke opererer med tidløse æstetiske værdier, da alt er historisk betinget. Det gyldne snit blev, sammen med andre klassiske kompositionsprincipper, opfattet som resterne af borgerskabets forsøg på at bestemme, hvad der er god smag. Man her ikke underkende betydningen af, at det gyldne snit er det eneste kompositoriske princip, der er kendt, og som har et specielt navn. Alene det gør, at man er mere bevidst om det.

Vi vil herefter se på nogle eksempler, hvor det gyldne snit er en del af det kompositoriske princip.

'Et ulige ægteskab'

Fig. 3 viser en religiøs handling med et par bestående af en ældre herre og en ung pige i centrum. Billedet udstråler, pga. de mørke farver, en alvorlig og dyster stemning, der underbygges af ansigterne, hvor især den unge pige ser betænkelig ud. Grunden til dette er anbragt i det venstre lodrette og det nederste vandrette gyldne snits skæringspunkt – her ses nemlig en vielsesring. Det umage par skal giftes!! Pludselig forstår man bedre pigens ansigtsudtryk.

Brudgommens overlegne udtryk er sværere at tyde, men det ser ud til, at han har svært ved at skjule en vis appetit ved situationen. At der er tale om et samfund, hvor det er mandens ønsker og behov, der dominerer, ses af, at der udover bruden kun er en kvinde, og hun er næsten skjult bag brudgommens højre skulder, samt at kirken via præsten tv. giver det ulige ægteskab sin velsignelse. Mandsdominansen understreges yderligere af, at mændenes hoveder, bl.a. brudgommens, er over det øverste vandrette gyldne snit, mens kvindernes, brudens og den næsten skjulte kvindes, hoveder er under. Bemærkelsesværdigt er det, at 5 af de 6 mandlige gæster slet ikke ser på ceremonien, den er måske ikke så vigtig for dem?

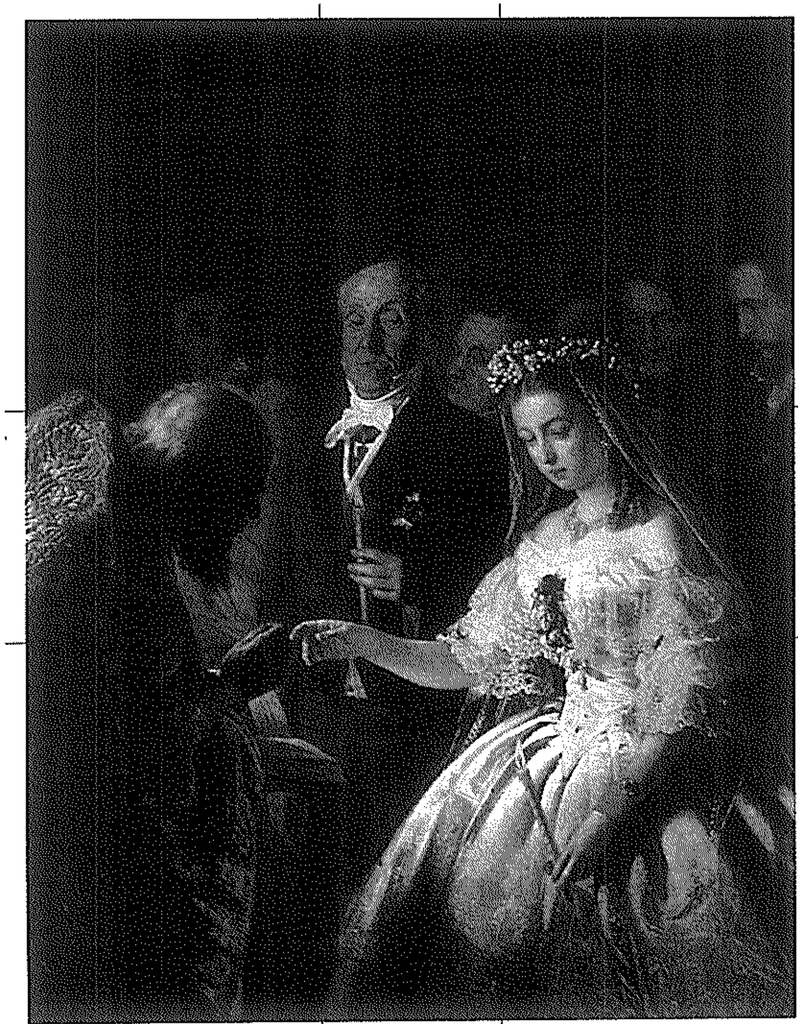


Fig. 3. V. Pukirev: Et ulige ægteskab, 1862, Tretjakovskij–galleriet, Moskva

Lyset og blikkene, især brudgommens, er med til at føre beskuerens blik mod højre, hvor det dog delvist bremses af brudens næsten tomme blik og hendes stearinlys, der peger tilbage. Herved får det højre lodrette gyldne snit en større betydning, og da det går ned midt mellem de to hovedpersoner, er det med til at understrege den afstand, der er mellem dem.

Bemærk, at et skæringspunkt mellem gyldne snit bruges til at påpege et vigtigt element (vielsringen), mens et andet bruges til at antyde afstanden mellem de to hovedpersoner.

'Venus' fødsel'

Sandro Botticellis maleri *Venus Fødsel* fra ca. 1485, fig. 4, findes i Uffizierne i Firenze. Billedet tager udgangspunkt i sagnet om, at kærlighedsgudinden Venus fødtes af havets skum og kom i land på en muslingeskal.

Det omklamrende par til venstre er bevingede zephyrer, der symboliserer vestenvinden. Deres blikke og pusten (vinden) fører beskuerens blik i retning af Venus, der vha. vinden føres fra havet ind mod kysten, hvor Venus' tjenerinde står parat til at modtage gudinden. Tjenerinden er iklædt en blomstret kjole og er pyntet med blomster om halsen og på overkroppen, og hun står med en blomstersmykket purpurkappe, der skal dække Venus. Da også zephyrernes pust (vinden) indeholder blomster, er blomster et vigtigt stemningsskabende element i maleriet.

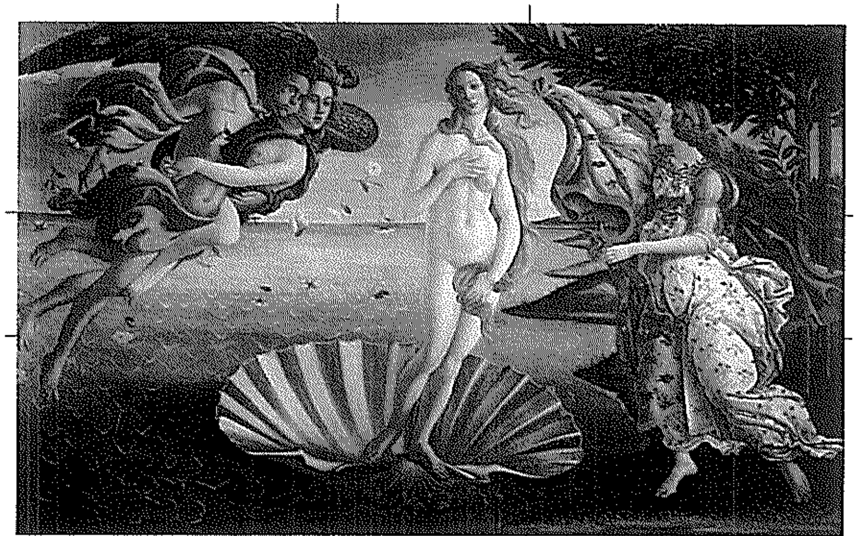


Fig. 4. S. Bottticelli, fra ca. 1485

Ved indtegning af de fire gyldne snit, ses de at indtage en central placering for kompositionen. Især er det tydeligt for det øverste vandrette og det højre lodrette. Den nederste vandrette er antydet ved to af zephyrernes fødder, muslingeskallens øverste kant, den lille bugt og tjenerindens knæ. Det lodrette venstre gyldne snit markerer afstanden mellem 'vinden' og Venus – hun er tættere ved land end ved det store åbne hav, hvor hun fødtes.

Når horisonten falder sammen med et gyldent snit, er det med til at understrege grænsen mellem vand og land/luft – de to elementer hun er ved at skifte mellem. Det lodrette højre gyldne snit, dvs. strandlinjen og rummet mellem de to kvinder, nærmest forhindrer Venus, og dermed billedet, i at falde til højre – det kan næsten se ud, som om hun læner sig op ad det. Sammen med den yndefulde, men påtagne stilling, hun indtager, er det også med til at standse den bevægelse Venus og vinden giver. Det antyder måske en modstand mod overgangen til et nyt element?

Venus er i færd med at tildække sin guddommelige nøgenhed, da hun efter overgangen til land skal færdes mellem mennesker. Dette ses af, at tjenerinden står med et klæde, der skal dække Venus. Alt er således klar til, at Venus skal overskride grænsen mellem de to tilværelser, men på trods af vindens ihærdighed viser Venus' stilling og de to kvinders placering på hver sin side af et gyldent snit, at det sidste lille stykke kræver den store grænseoverskridende handling.

Billedet er et af de mest kendte fra den italienske renæssance. Renæssance betyder genfødelse, hermed menes genfødelse af de klassiske idealer. Dette stemmer med, at sagnet kendes fra Homer og Ovid.

På fig. 5–7 ses billeder, der indeholder gyldne snit – idet man skal huske på, at det i kunstværker ikke altid er helt præcist.

Fig. 5. Vilhelm Bjerke-Petersen: Strandparti med figurer, 1938.
©Vilhelm Bjerke-Petersen/COPY-DAN, Billedkunst 1999.

Fig. 6. G. Honthorst: Ruffersken,1625

Fig. 7. H. Giersing: Paris Dom, 1909

Fotografier

Fotografier er også billeder, men man skal her huske på, at det vi ser i aviser, blade, reklamer, på film og TV osv. som oftest ikke er originalen, men en beskåret udgave. Bag beskæringen ligger der ofte lige så mange overvejelser, som bag opbygningen af en tegning, et maleri mm.

Bemærk, at speakere på TV og nærbilleder af enkeltpersoner i film, næsten altid placeres i et gyldent snit.

Fig. 8. Ian Bradshaw: The Twickenham Streaker, 1974, foto.