

Sætning:

Tangentplanen til grafen for f i punktet $P(x_0, y_0, z_0)$ er givet ved ligningen

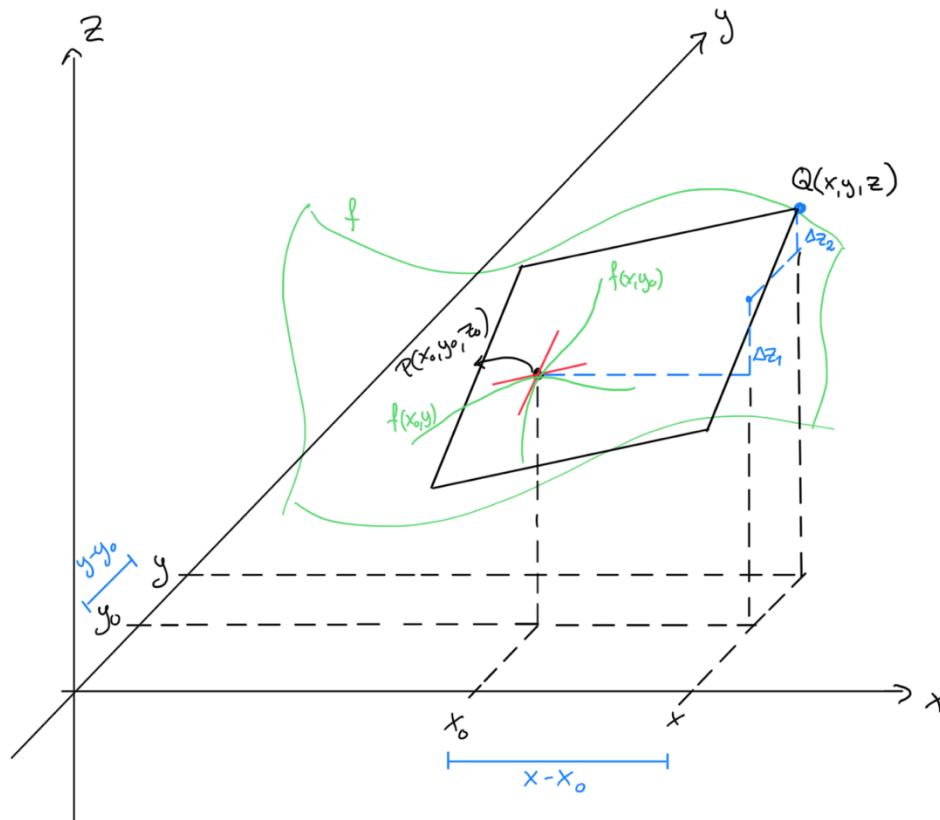
$$z = z_0 + f'_x(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + f'_y(x_0, y_0) \cdot (y - y_0)$$

Bevis:

På figuren er grafen for f og snitkurverne for $f(x, y_0)$ og $f(x_0, y)$ tegnet med grøn, mens tangenterne til snitkurverne for $f(x_0, y)$ og $f(x, y_0)$ er tegnet med rød.

Tangenten til $f(x, y_0)$, når $x = x_0$, har hældningen $f'_x(x_0, y_0)$, mens tangent til $f(x_0, y)$, når $y = y_0$, har hældningen $f'_y(x_0, y_0)$.

I punktet $P(x_0, y_0, z_0)$ er der tegnet et udsnit af en tangentplan, der har røringspunkt i P .



Der indføres et vilkårligt punkt $Q(x, y, z)$ på tangentplanen. Vi ønsker nu, at udtrykke z -værdien fra Q som en funktion af x og y .

Vi ser nu på, hvordan man kan bevæge sig fra P til Q .

- 1) Fra P bevæger vi os i y -aksens retning, så vi når 2. koordinaten for Q - altså y . For at komme op på planen bevæger vi os i z -aksens retning. Ændringen i z kaldes for Δz_1 .

- 2) Fra dette punkt bevæger vi os i x -aksens retning, så vi når 1.koordinaten for Q - altså x .
For at komme op til Q bevæger vi os i z -aksens retning. Denne ændring kaldes Δz_2 .

Nu kan z -koordinaten til Q altså udtrykkes ved:

$$z = z_0 + \Delta z_1 + \Delta z_2$$

Da Δz_1 og Δz_2 beskriver ændringerne i z -aksens retning, når man hhv. bevæger sig $(x - x_0)$ og $(y - y_0)$ ud af x - og y -aksen, og de partielle afledede i P er $f'_x(x_0, y_0)$ og $f'_y(x_0, y_0)$, kan Δz_1 og Δz_2 udtrykkes ved

$$\Delta z_1 = f'_x(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) \text{ og } \Delta z_2 = f'_y(x_0, y_0) \cdot (y - y_0)$$

Altså kan z udtrykkes ved

$$z = z_0 + f'_x(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + f'_y(x_0, y_0) \cdot (y - y_0)$$