Potenser og rødder 3

I dette kapitel beskrives nogle af de regneregler, der gælder for potenser og rødder. Først gennemgås potenser med heltallig eksponent, derefter ses på, hvordan dette kan udvides til også at omfatte eksponenter, som er brøker eller negative tal.

3.1 Heltallige eksponenter

Potensopløftning virker som bekendt på følgende måde:[1]

$$3^5 = \overbrace{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}^{\text{5 gange}} \; .$$

Roduddragning er den modsatte regneoperation, så f.eks. er

$$\sqrt[4]{16} = 2, \qquad \text{fordi } 2^4 = 16 \; .$$

Hvis man ganger to potenser med samme grundtal, kan man f.eks. gøre følgende:

$$7^2 \cdot 7^4 = \overbrace{\underbrace{7 \cdot 7}_{\text{2 gange}} \cdot \underbrace{7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7}_{\text{4 gange}}}^{2+4=6 \text{ gange}} = 7^6 \; .$$

Dividerer man to potenser med samme grundtal, kan man lave en udregning som denne:

$$\frac{4^5}{4^3} = \frac{4 \cdot 4 \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{4}}{\cancel{4} \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{4}} = 4 \cdot 4 = 4^2 \; ,$$

dvs.

$$\frac{4^5}{4^3} = 4^{5-3} \; .$$

Har man to potensopløftninger efter hinanden, får man:

$$(2^4)^3 = \overbrace{(\underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}_{\text{4 gange}}) \cdot (\underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}_{\text{4 gange}}) \cdot (\underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}_{\text{4 gange}})}^{\text{3 gange à 4}} = 2^{4 \cdot 3} = 2^{12} \; .$$

Når man har set på, hvad der sker, når man regner på to potenser med samme grundtal, er det næste, man kan se på, hvad der sker, når man har to potenser med samme eksponent.

[1] I regnestykket 3^5 kaldes 3 for *grundtallet* og 5 kaldes *eksponenten*.

Ganger man to potenser med samme eksponent, kan man f.eks. få følgende:

$$5^3 \cdot 2^3 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 5 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 2 = (5 \cdot 2) \cdot (5 \cdot 2) \cdot (5 \cdot 2) = (5 \cdot 2)^3 \ .$$

Ved division, sker dette:

$$\frac{7^4}{3^4} = \frac{7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7}{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3} = \frac{7}{3} \cdot \frac{7}{3} \cdot \frac{7}{3} \cdot \frac{7}{3} = \left(\frac{7}{3}\right)^4 \ .$$

Alle disse udregninger kan generaliseres til 5 regneregler for potenser.

Sætning 3.1

Hvis m og n er to naturlige tal og a og b er to vilkårlige tal, gælder følgende

1. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$.
2. Hvis a er forskellig fra 0 og $m > n$ er $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$.
3. $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$.
4. $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$.
5. Hvis b er forskellig fra 0 er $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$.

3.2 Det udvidede potensbegreb

I dette afsnit udvides potensbegrebet til også at omfatte eksponenter, som ikke er hele, positive tal. Her opstår der et interessant spørgsmål: Hvad der menes med 5^4 er til at forstå; men hvordan skal man fortolke f.eks. 2^{-7} eller $3^{\frac{1}{4}}$?

Det, man gør i praksis for at definere, hvordan disse »skæve« eksponenter skal forstås, er at kræve, at regnereglerne i sætning 3.1 skal gælde, uanset hvilke værdier eksponenterne har. Ud fra dette finder man, at potensopløftning, hvor eksponenten er et negativt tal eller en brøk, kun kan fortolkes på én måde.

Regner man f.eks. på 5^0, finder man vha. regel 2 i sætning 3.1, at

$$5^0 = 5^{2-2} = \frac{5^2}{5^2} = 1 \ .$$

Man kunne her lige så godt have set på et andet grundtal end 5; vha. samme type udregning kan man f.eks. vise, at $7^0 = 1$. Udregningen vil altså kunne generaliseres til alle tal.[2]

Har man en potensopløftning med en negativ eksponent, kan man igen udnytte samme regneregel og få[3]

$$6^{-3} = 6^{0-3} = \frac{6^0}{6^3} = \frac{1}{6^3} \ .$$

Dette regnestykke kan også gennemføres med andre tal, så man f.eks. finder, at $13^{-7} = \frac{1}{13^7}$. Argumentet går godt for alle grundtal bortset fra 0.

[2]Bortset fra 0, da man ikke må dividere med 0.

[3]Her udnytter man, at det lige er vist, at $5^0 = 1$, $6^0 = 1$, $43^0 = 1$, osv.

For at man kan sige noget om potensopløftning med brøker som eksponent, kan man bruge regel 3 i sætning 3.1, til at beregne f.eks. $(8^{\frac{1}{3}})^3$. Det giver

$$(8^{\frac{1}{3}})^3 = 8^{\frac{1}{3}\cdot 3} = 8^1 = 8 \ .$$

Men der gælder også, at[4]

$$(\sqrt[3]{8})^3 = 8 \ .$$

Derfor må

$$8^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{8} \ .$$

Dette kan forklare, hvordan man skal fortolke situationen, hvis eksponenten er $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{7}$ eller $\frac{1}{73}$; men det siger intet om, hvad der sker, hvis eksponenten er en brøk, hvor tælleren ikke er 1.

Hvis man udnytter de kendte regneregler får man f.eks.

$$4^{\frac{5}{7}} = 4^{5\cdot\frac{1}{7}} = (4^5)^{\frac{1}{7}} = \sqrt[7]{4^5} \ .$$

Dvs. hvis eksponenten så svarer potensopløftningen altså til at opløfte i et helt tal og uddrage en rod.

Skal potensregnereglerne gælde for alle tal, har man derfor følgende definition.

Definition 3.2

Der gælder følgende definitioner.

1. $a^0 = 1$ (hvis $a \neq 0$).
2. $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ (hvis $a \neq 0$).
3. $a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$.

Denne definition på potenser virker måske en smule mærkelig, men den er nødvendig for at de samme regneregler skal gælde for de udvidede potenser, som der gælder for de simple potenser – jf. gennemgangen ovenfor.

Når man definerer de udvidede potenser på denne måde, ved man altså med sikkerhed, at de samme regneregler gælder, uanset om eksponenten er et helt tal eller ej, dvs. man har følgende sætning:

Sætning 3.3

Der gælder følgende regneregler

1. $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$.
2. $(a^x)^y = a^{x\cdot y}$.
3. $\dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$.
4. $a^x \cdot b^x = (a \cdot b)^x$.
5. $\dfrac{a^x}{b^x} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^x$.

Da roduddragning i virkeligheden er et specialtilfælde af potensopløftning, kan man også udlede følgende sætning.[5]

[4] Fordi roduddragning er det modsatte af potensopløftning.

[5] De to regneregler følger af, at f.eks.

$$\sqrt[3]{5}\cdot\sqrt[3]{2} = 5^{\frac{1}{3}}\cdot 2^{\frac{1}{3}} = (5\cdot 2)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{5\cdot 2}$$

$$\frac{\sqrt[7]{4}}{\sqrt[7]{11}} = \frac{4^{\frac{1}{7}}}{11^{\frac{1}{7}}} = \left(\frac{4}{11}\right)^{\frac{1}{7}} = \sqrt[7]{\frac{4}{11}} \ .$$

Sætning 3.4

Hvis $a > 0$ og $b > 0$, gælder der

1. $\sqrt[x]{a} \cdot \sqrt[x]{b} = \sqrt[x]{a \cdot b}$.
2. $\dfrac{\sqrt[x]{a}}{\sqrt[x]{b}} = \sqrt[x]{\dfrac{a}{b}}$.

I sætning 3.4 er der ingen regneregel for de to udtryk $\sqrt[x]{a} \cdot \sqrt[y]{a}$ og $\frac{\sqrt[x]{a}}{\sqrt[y]{a}}$. Det skyldes, at det i dette tilfælde altid er nemmest at omskrive til potensopløftning, før man reducerer.

Hvis man vil, er det dog muligt at reducere de to udtryk og udlede en formel. Dette overlades som en øvelse til læseren.

3.3 Øvelser

Øvelse 3.1
Reducer følgende udtryk ved hjælp af potensregneregler.

a) $5^2 \cdot 5^3$
b) $2^4 \cdot 2^5$
c) $\left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2$
d) $\frac{3^6}{3^4}$
e) $\frac{(\frac{2}{3})^7}{(\frac{2}{3})^6}$
f) $\left(\frac{2}{3}\right)^4 \left(\frac{3}{2}\right)^4$
g) $2^6 \cdot 5^6$
h) $\frac{12^3}{2^3}$
i) $\frac{35^4}{5^4}$
j) $\frac{4^2}{(\frac{1}{2})^2}$
k) $(3^4)^5$
l) $\left(\left(\frac{2}{7}\right)^3\right)^3$

Øvelse 3.2
Afgør, uden hjælpemidler, i hvert af nedenstående tilfælde, om udtrykket er defineret (dvs. giver mening). Reducér det i givet fald.

a) $\sqrt[4]{16}$
b) $\sqrt[3]{-64}$
c) $\sqrt{(-4)^2}$
d) $\sqrt{-4^2}$
e) $\sqrt[3]{125}$
f) $\sqrt[3]{\frac{1}{8}}$
g) $\sqrt[4]{-81}$
h) $\sqrt[5]{\frac{1}{32}}$
i) $\frac{1}{\sqrt[3]{216}}$
j) $\sqrt[4]{\frac{1}{10000}}$
k) $\sqrt{8}\sqrt{32}$
l) $\sqrt{45}\sqrt{5}$
m) $\sqrt{-3}\sqrt{-3}$
n) $\frac{\sqrt{135}}{\sqrt{15}}$
o) $\sqrt{\frac{-8}{-2}}$
p) $\sqrt{-0}$

Øvelse 3.3
Angiv uden brug af hjælpemidler følgende rødder – hvis de eksisterer.

a) $\sqrt{9} + \sqrt{16}$
b) $\sqrt{3^2 + 4^2}$
c) $\sqrt{3 \cdot 12}$
d) $\sqrt{13 + 3 \cdot 4}$
e) $\sqrt{-4^2 + 2^3}$
f) $\sqrt{12^2 + 5^2}$
g) $\sqrt[3]{(-2)^6}$
h) $\sqrt{(\frac{3}{5})^2 + (\frac{4}{5})^2}$

Øvelse 3.4
Udregn, uden brug af hjælpemidler, følgende tal

a) $49^{\frac{1}{2}}$
b) $\left(\frac{4}{9}\right)^{\frac{1}{2}}$
c) $27^{\frac{-1}{3}}$
d) 64^0
e) $-64^{\frac{1}{3}}$
f) $(3^2)^0$
g) $(-27)^{\frac{-1}{3}}$
h) $81^{\frac{1}{4}}$
i) $\left(\frac{1}{3}\right)^0$
j) 4^{-2}
k) $9^{-\frac{1}{2}}$
l) 100023^0

Øvelse 3.5
Udregn tallene

a) $-1 + (-1)^2 + (-1)^3 + \cdots + (-1)^{2006}$
b) $(-1)^2 + (-1)^4 + (-1)^6 + \cdots + (-1)^{2006}$
c) $(1 - 1 + 1)^6 - (-1 + 1 - 1)^4 - (1 - 1 + 1)^2$