Fra: Mat B1 (stx)
Af: Carstensen, Frandsen, Studsgaard
Systime, 2002
Rød bog

4 TRIGONOMETRI

y=3x-3 A D B_2

INDLEDNING

Ordet *trigonometri* betyder trekantmåling. Polygoner (mangekanter) med mere end tre sider kan *trianguleres*, dvs. deles op i trekanter, ved hjælp af diagonaler, så sider og vinkler også i polygoner i nogle tilfælde kan beregnes.

Trigonometri har en lang historie som afgørende hjælpemiddel til landmåling og benyttedes til fremstilling af nøjagtige landkort over Europa i begyndelsen af 1800-tallet. Desuden var trigonometriske beregninger helt nødvendige for, at de store sejlskibe under opdagelsesrejserne i 1400- og 1500-tallet kunne bestemme deres nøjagtige position på oceanerne ved observation af stjernernes og solens højde over horisonten.

DETTE KAPITEL

Vi skal først se på ensvinklede trekanter og forholdet mellem deres sider. Det viser sig, at dette er nøglen til at beregne vinkler i *retvinklede* trekanter.

Til at beregne stykker (dvs. sider og vinkler) i skæve trekanter udvikles de to formelsystemer *sinusrelationerne* og *cosinusrelationerne*. Desuden angives en formel til bestemmelse af en trekants areal.

→ **Trigonometri**

ENSVINKLEDE TREKANTER

To trekanter kaldes *ensvinklede* eller *ligedannede*, hvis de har samme form, dvs. hvis deres vinkler er parvis lige store. Den ene trekant fås i så fald af den anden ved en forstørrelse eller formindskelse med et tal, der kaldes *målestoksforholdet*. På fig. 1 ses to ensvinklede trekanter, ΔABC og ΔDEF. Her er $A = D$, $B = E$ og $C = F$.

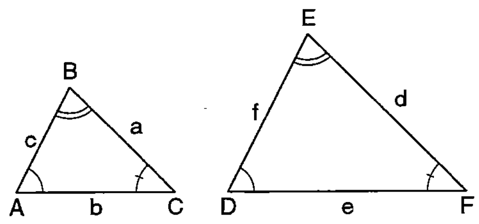

Fig. 1

Længderne af siderne i trekanterne betegnes med små bogstaver svarende til den vinkel, de ligger overfor, dvs. siden a ligger over for vinklen A, b over for B osv.

To sider, der ligger over for lige store vinkler, kaldes *ensliggende*. På figuren er b og e ensliggende, a og d er ensliggende og c og f er ensliggende.

Den egenskab, vi skal benytte ved ensvinklede trekanter, fremgår af følgende:

SÆTNING 1
I ensvinklede trekanter er forholdet mellem ensliggende sider konstant. Man siger, at ensliggende sider er *proportionale*.

På fig. 1 er som nævnt ΔABC og ΔDEF ensvinklede, så der gælder, at

$$\frac{a}{d} = \frac{b}{e} = \frac{c}{f},$$

hvilket også kan skrives sådan:

$$\frac{|BC|}{|EF|}=\frac{|AC|}{|DF|}=\frac{|AB|}{|DE|}.$$

Her angiver lodrette streger længder af de pågældende linjestykker (sider). På fig. 1 er dette forhold lig med $\frac{2}{3}$, fordi siderne i ΔABC er $\frac{2}{3}$ af siderne i ΔDEF. Man kan også sige, at siderne i ΔDEF er $1\frac{1}{2}$ gang så lange som siderne i ΔABC.

→ Geometri → Klassisk

EKSEMPEL 1. Vi ser på et par ensvinklede trekanter, hvoraf nogle af sidernes længder er opgivet, se fig. 2, og vil finde længderne af siderne a og e.

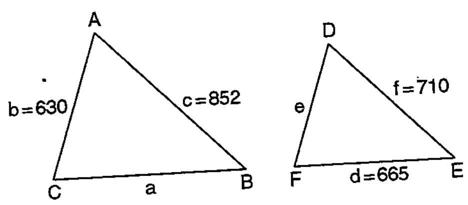

Fig. 2

Vi finder, at

$$\frac{a}{d}=\frac{b}{e}=\frac{c}{f} \Leftrightarrow \frac{a}{665}=\frac{630}{e}=\frac{852}{710},$$

og danner en ligning af den første og den sidste brøk, og ganger over kors:

$$\frac{a}{665}=\frac{852}{710} \Leftrightarrow 710a=852\cdot665 \Leftrightarrow a=\frac{852\cdot665}{710}=798.$$

På samme måde kan vi bruge de to sidste brøker:

$$\frac{630}{e}=\frac{852}{710} \Leftrightarrow 852e=630\cdot710 \Leftrightarrow e=\frac{630\cdot710}{852}=525.$$

SINUS OG COSINUS

Vi begynder med at se på to trigonometriske størrelser, sinus og cosinus. De er indbygget i cas som SIN og COS.

ENHEDSCIRKLEN

Vi ser på en cirkel med centrum i koordinatsystemets begyndelsespunkt (0,0) og med radius 1 (fig. 3). Denne cirkel kaldes *enhedscirklen*. Desuden er der givet en vinkel med gradstørrelsen v, som vi anbringer med toppunkt i (0,0) og med højre ben ud ad x-aksens positive del. Vinklens venstre ben skærer enhedscirklen i et punkt P_v, som kaldes vinklens *retningspunkt*.

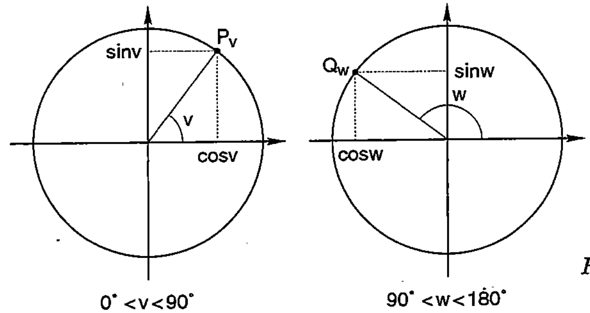

Fig. 3

DEFINITION
Cosinus til en vinkel v er x-koordinaten til retningspunktet P_v, skrives cos$v$.
Sinus til en vinkel v er y-koordinaten til retningspunktet P_v, skrives sin$v$.

Koordinaterne til retningspunktet P_v er altså

$$P_v\ (\cos v\ ,\ \sin v).$$

På fig. 3 er tallene cos$v$ og sin$v$ markeret på x-aksen og y-aksen. På figuren er v valgt til 53°, og ved hjælp af cas fås, at P har koordinaterne

$$P_{53}\ (\cos53°, \sin53°) = (0{,}6018\ ;\ 0{,}7986).$$

Desuden er vinklen w med retningspunktet Q_w valgt til 144°, så Q_w har koordinaterne

$$Q_{144}\ (\cos144°, \sin144°) = (-0{,}8090\ ;\ 0{,}5878).$$

EKSEMPEL 2. Hvis vi om en vinkel mellem 0° og 90° får oplyst, at $\sin v = 0{,}75$, kan vi ved hjælp af cas finde vinklen med SIN^{-1} :

$$v = \sin^{-1}(0{,}75) = 48{,}59°\ .$$

Hvis vi udstrækker vinkelområdet til [0°;180°] findes endnu en vinkel w, så $\sin w = 0{,}75$, nemlig $w = 180° - 48{,}59° = 131{,}41°$. Situationen ses på fig. 4 og 5.

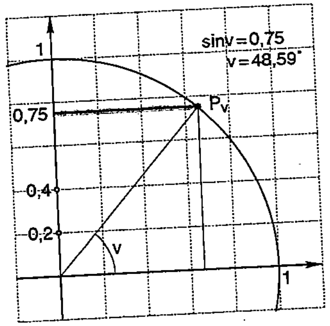

Fig. 4

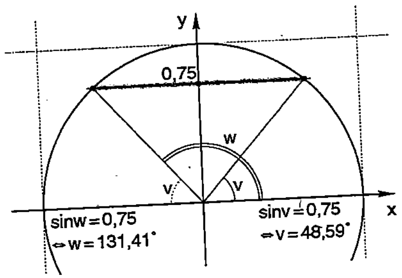

Fig. 5

OMLØBSRETNING

Hvis enhedscirklen gennemløbes fra punktet E (1,0) mod uret, siger vi, at cirklen gennemløbes i *positiv omløbsretning*. Hvis det sker den modsatte vej, er omløbsretningen *negativ*.

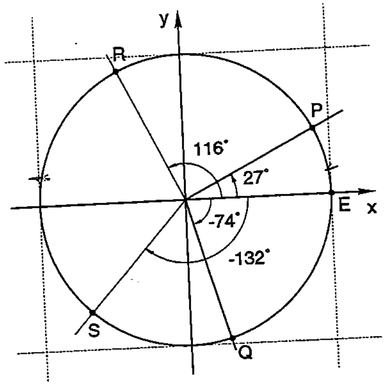

Fig. 6

Efter omløbsretningen kan vi regne vinkler med fortegn. På fig. 6 har vi afsat vinkler med retningspunkter P, Q, R og S. Retningspunktet Q for vinklen på -74° er også retningspunkt for en vinkel på 360° - 74° = 286°. Tilsvarende er S også retningspunkt for en vinkel på 360° - 132° = 228°. Vi har altså fx

$$\cos(-74°) = \cos 286° \quad , \quad \sin(-132°) = \sin 228°\ .$$

GRUNDRELATIONEN

For en vilkårlig vinkel v ligger retningspunktet P_v med koordinaterne ($\cos v$, $\sin v$) på enhedscirklen (fig. 7). Projektionen af P_v på x-aksen danner sammen med x-aksen og den lodrette linje gennem P_v og linjen OP_v en retvinklet trekant, hvis hypotenuse har længden 1, og hvis kateter har længderne $|\sin v|$ og $|\cos v|$. Vi bruger numerisktegn, fordi længder er positive, og $\sin v$ og $\cos v$ kan være negative.

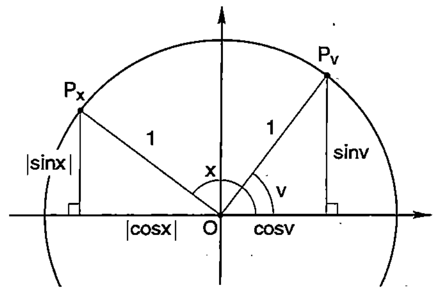

Fig. 7

Pythagoras' sætning giver så

$$|\sin v|^2 + |\cos v|^2 = 1 \Leftrightarrow (\sin v)^2 + (\cos v)^2 = 1\ .$$

Denne ligning kaldes *grundrelationen*, og vi skriver sådan:

Grundrelationen : $\cos^2 v + \sin^2 v = 1$.

TANGENS

Vi indfører endnu en trigonometrisk størrelse, *tangens*, der forkortes tan. Den defineres sådan:

DEFINITION
Ved tangens til en vinkel v forstås tallet

$$\tan v = \frac{\sin v}{\cos v} \ , \quad \cos v \neq 0 \ .$$

Her har vi forudsat, at nævneren $\cos v$ ikke er 0. Hvis en vinkels retningspunkt på enhedscirklen falder i et af punkterne P (0,1) eller Q (0,-1), svarende til vinkler på henholdsvis 90° og 270° (fig. 8), er $\cos v = 0$, så vi forudsætter, at v *ikke* antager nogen af disse værdier.

På enhedscirklen kan vi aflæse værdien af $\tan v$ for en given vinkel v. På fig. 9 er P retningspunkt for vinkel v, og vi forudsætter først, at P ligger i 1. kvadrant.

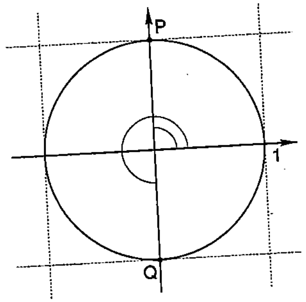

Fig. 8

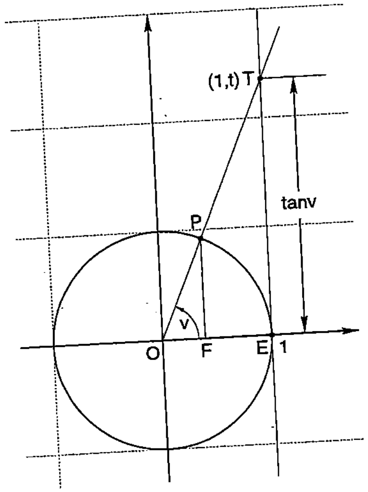

Fig. 9

Linjen OP skærer tangenten til enhedscirklen i E (1,0) i punktet T, og projektionen af P på x-aksen er F. Nu er ΔOPF og ΔOTE ensvinklede, så

$$\frac{|FP|}{|ET|} = \frac{|OF|}{|OE|} \Leftrightarrow \frac{\sin v}{|ET|} = \frac{\cos v}{1} \Leftrightarrow$$

$$|ET| \cdot \cos v = \sin v \Leftrightarrow |ET| = \frac{\sin v}{\cos v} = \tan v \ .$$

Heraf ses, at det stykke, som vinklen v afskærer af tangenten i (1,0) til enhedscirklen, er lig med $\tan v$. Koordinaterne til T er altså (1,$\tan v$).
Så ser vi på det tilfælde, at retningspunktet P ligger i 2. kvadrant (fig. 10).

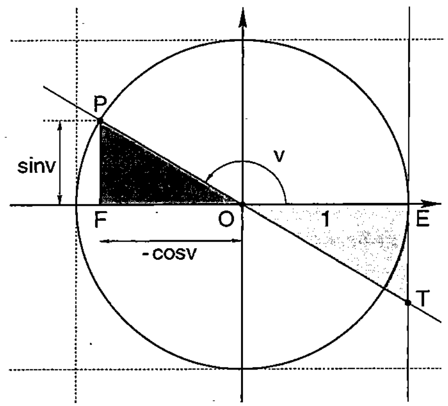

Fig. 10

Linjen OP skærer igen tangenten i (1,0) i punktet T. Igen er ΔOPF og ΔOTE ensvinklede, og da

$$|OF| = -\cos v \ , \quad |PF| = \sin v \ , \quad |OE| = 1 \ ,$$

får vi ved samme regninger som ovenfor, at

$$|ET| = -\tan v \ .$$

Da $|ET|$ = - $\tan v$ er positiv (det er en længde), er $\tan v$ negativ. Punktet T har igen koordinaterne (1,$\tan v$).
Hvis P ligger i 3. eller 4. kvadrant, går vi frem på samme måde.

DEN RETVINKLEDE TREKANT

Vi skal se på, hvordan vi kan beregne sider og vinkler i en retvinklet trekant, hvis nogle af dem er kendt. Sider og vinkler i en trekant kaldes under ét for *stykker* i trekanten.

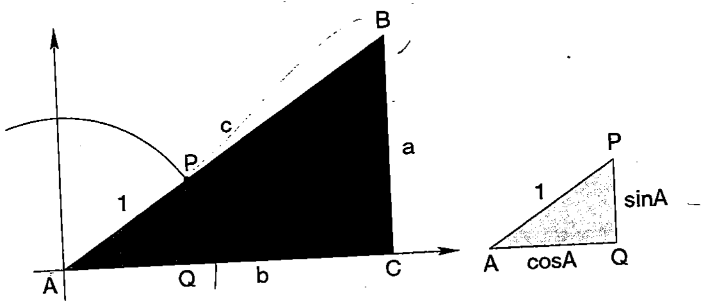

Fig. 11

Vi ser på en retvinklet ΔABC, hvor $C = 90°$. Kateternes længder er a og b, og hypotenusens er c. Trekanten anbringes i koordinatsystemets første kvadrant, så vinkel A falder i (0,0) og den rette vinkel C på x-aksens positive del (fig. 11). Siden AB eller dens forlængelse skærer enhedscirklen i P, og projektionen af P på x-aksen er Q.

Af hensyn til overskueligheden er ΔAPQ flyttet ud. Da P er retningspunkt på enhedscirklen for vinklen A, er koordinaterne til P (cos$A$,sin$A$), dvs.

$$|PQ| = \sin A \ , \ |AQ| = \cos A \ .$$

Desuden er $|AP| = 1$, fordi AP er radius i cirklen.

Nu er ΔAPQ og ΔABC ensvinklede, så deres sider er proportionale, dvs.

$$\frac{|PQ|}{|BC|} = \frac{|AQ|}{|AC|} = \frac{|AP|}{|AB|} \ .$$

Heri indsættes længderne af siderne:

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\cos A}{b} = \frac{1}{c} \ .$$

Ligningen bestående af den første og den sidste brøk kan bruges til at finde sin$A$:

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{1}{c} \Leftrightarrow a \cdot \frac{\sin A}{a} = a \cdot \frac{1}{c} \Leftrightarrow \sin A = \frac{a}{c} \ .$$

På samme måde kan de to sidste brøker bruges til at finde cos$A$:

$$\frac{\cos A}{b} = \frac{1}{c} \Leftrightarrow b \cdot \frac{\cos A}{b} = b \cdot \frac{1}{c} \Leftrightarrow \cos A = \frac{b}{c} \ .$$

Af de to sidste formler kan vi finde tan$A$ ved hjælp af definitionen på tan:

$$\tan A = \frac{\sin A}{\cos A} = \frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}} = \frac{a}{c} \cdot \frac{c}{b} = \frac{a}{b} \ .$$

Vi har hermed vist følgende sætning:

SÆTNING 2
I den retvinklede ΔABC gælder

$$\sin A = \frac{a}{c} \ , \quad \cos A = \frac{b}{c} \ , \quad \tan A = \frac{a}{b} \ .$$

Hvis vi var gået ud fra vinklen B, havde vi tilsvarende fået

$$\sin B = \frac{b}{c} \ , \quad \cos B = \frac{a}{c} \ , \quad \tan B = \frac{b}{a} \ .$$

I en trekant kaldes

en side og en vinkel *hosliggende,* hvis siden er et af vinkelbenene,

en side og en vinkel *modstående,* hvis de ligger over for hinanden (dvs. hvis siden ikke er et af vinkelbenene).

Således er

a og A modstående , b og B modstående
a og B hosliggende , b og A hosliggende .

LEONHARD EULER (1707-1783)

Leonhard Euler er født i Schweiz og en af alle tiders mest produktive matematikere. Han var et fremmeligt barn med anlæg for sprog, han havde en glimrende hukommelse og var fremragende til hovedregning.

Euler gik på universitetet i Basel og studerede ikke blot matematik, men også jura og filosofi. Derefter gik han i gang med at studere teologi for at blive præst, men interessen for matematik vandt.

Euler blev ansat ved det nyoprettede Akademi i St. Petersborg i 1727. En af hans tidligere triumfer var at bestemme summen af den uendelige række

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\cdots+\frac{1}{n^2}+\cdots$$

Flere fremtrædende matematikere havde ikke formået at finde summen, men i 1735 lykkedes det Euler at vise, at summen er $\frac{1}{6}\pi^2$.

I 1738 mistede Euler synet på højre øje, sandsynligvis på grund af en forudgående infektion. Han gigantiske matematiske produktion fortsatte imidlertid med uformindsket styrke.

Frederik den Store af Prøjsen inviterede i 1741 Euler til at komme til Tyskland for at blive medlem af det nystiftede Akademi i Berlin, en indbydelse, Euler tog imod.

Imidlertid faldt han ikke til i Berlin og rejste i 1766 igen til St. Petersborg, hvor man bød den nu verdenskendte matematiker velkommen tilbage. Synet på hans raske øje svandt imidlertid, og i 1771 var han næsten fuldkommen blind. Euler lod sig ikke slå ud, men fortsatte sin matematiske produktion til sin død i 1783.

Euler efterlod sig en matematisk arv af kolossalt omfang - akademiet i St. Petersborg fortsatte med at udgive hans skrifter endnu 48 år efter hans død. I dag er ca. 75 bind af hans *Opera Omnia* (samlede værker) udgivet - et projekt der begyndte i 1911, og endnu mangler adskillige bind af hans korrespondance og øvrige manuskripter at se dagens lys.

Fig. 12

Vi kan derfor også formulere sætning 2 sådan:

SÆTNING 2A
I den retvinklede ΔABC gælder for sin, cos og tan til en af de spidse vinkler:

$$\sin(\text{vinkel}) = \frac{\text{modstående katete}}{\text{hypotenusen}}\ ,\quad \cos(\text{vinkel}) = \frac{\text{hosliggende katete}}{\text{hypotenusen}}$$

$$\tan(\text{vinkel}) = \frac{\text{modstående katete}}{\text{hosliggende katete}}\ .$$

EKSEMPEL 3. I den retvinklede ΔABC er kateten $a = 4$ og hypotenusen $c = 7$ (fig. 13).

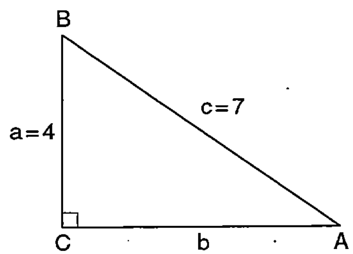

Fig. 13

Vi ønsker at bestemme vinklerne A og B samt kateten b. Først benyttes Pythagoras' sætning:

$$a^2+b^2=c^2 \iff b^2=c^2-a^2=49-16=33 \iff b=\sqrt{33}=5{,}74\ .$$

Så kan vi benytte formlen for sinus:

$$\sin A=\frac{a}{c}=\frac{4}{7} \iff A=34{,}85°\ .$$

Da A og B tilsammen er 90°, er

$$B=90°-A=90°-34{,}85°=55{,}15°\ .$$

Dermed er trekanten beregnet, fordi alle stykker (sider og vinkler) nu er kendt.

EKSEMPEL 4. Om den retvinklede ΔABC oplyses, at $B = 26°$ og $a = 9$ (fig. 14).

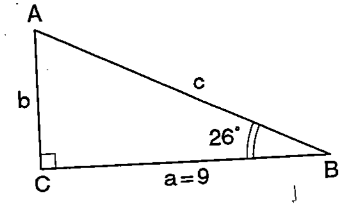

Fig. 14

Vi vil finde de ubekendte stykker A, b og c. Vi kan let finde den sidste vinkel:

$$A = 90° - B = 90° - 26° = 64°$$

Benyttes tangens, fås

$$\tan B = \frac{b}{a} \Leftrightarrow \tan 26° = \frac{b}{9} \Leftrightarrow b = 9\tan 26° = 4{,}38959 \approx 4{,}39\ .$$

Nu kendes to af siderne i trekanten, så vi kan bruge Pythagoras' sætning til at finde den tredje. Imidlertid kan vi også bruge sinus eller cosinus:

$$\sin A = \frac{a}{c} \Leftrightarrow \sin 64° = \frac{9}{c} \Leftrightarrow c \cdot \sin 64° = c \cdot \frac{9}{c}$$

$$\Leftrightarrow c \cdot \sin 64° = 9 \Leftrightarrow c = \frac{9}{\sin 64°} = 10{,}01\ .$$

Pythagoras' sætning giver naturligvis samme resultat:

$$c^2 = a^2 + b^2 = 9^2 + 4{,}38959^2 = 100{,}26850 \Leftrightarrow c = 10{,}01\ .$$

LIGEBENET TREKANT

Beregning af vinkler og sider i ligebenede trekanter (dvs. trekanter, hvor to af siderne er lige lange) foregår ved at dele trekanten op i to ens retvinklede trekanter ved hjælp af højden fra topvinklen (fig. 15), og benytte, at de to vinkler ved grundlinjen er lige store.

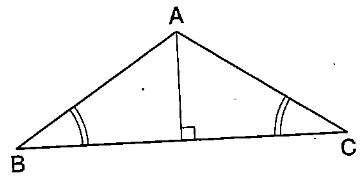

Fig. 15

SINUS- OG COSINUSRELATIONERNE

Vi har set, hvordan man kan beregne stykker i en retvinklet trekant, når visse af stykkerne er kendt på forhånd. Vi skal nu se på, hvordan stykkerne i en vilkårlig (skæv) trekant kan beregnes. Hvis man kender tre stykker i en trekant (som dog ikke må være de tre vinkler), kan man beregne de resterende stykker.

SINUSRELATIONERNE

I ΔABC trækker vi en af højderne h fx højden fra vinkel A (fig. 16).

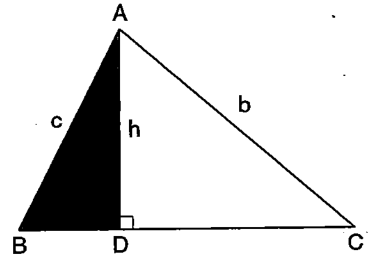

Fig. 16

Højdens *fodpunkt* på siden BC er D. Nu er ΔABD retvinklet, så efter sætning 1 gælder at

$$\sin B = \frac{h}{c} \Leftrightarrow h = c \sin B\ ,$$

fordi h er den modstående katete til B, og c er hypotenuse i ΔABD. Arealet T af ΔABC fås nu til

$$T = \tfrac{1}{2} a \cdot h = \tfrac{1}{2} a \cdot c \cdot \sin B\ .$$

Havde vi trukket en af de andre højder, kunne vi tilsvarende have fundet

$$T = \tfrac{1}{2} b \cdot c \cdot \sin A \quad \text{og} \quad T = \tfrac{1}{2} a \cdot b \cdot \sin C\ .$$

Dette er vigtige formler, som vi samler i en sætning.

SÆTNING 3
Arealet T af ΔABC kan findes som

$$T = \tfrac{1}{2} b \cdot c \cdot \sin A = \tfrac{1}{2} a \cdot c \cdot \sin B = \tfrac{1}{2} a \cdot b \cdot \sin C\ .$$

Vi har altså nu ligningerne

$$\tfrac{1}{2} b \cdot c \cdot \sin A = \tfrac{1}{2} a \cdot c \cdot \sin B = \tfrac{1}{2} a \cdot b \cdot \sin C \,,$$

som vi ganger med 2:

$$b \cdot c \cdot \sin A = a \cdot c \cdot \sin B = a \cdot b \cdot \sin C \,,$$

og dividerer med abc:

$$\frac{b \cdot c \cdot \sin A}{abc} = \frac{a \cdot c \cdot \sin B}{abc} = \frac{a \cdot b \cdot \sin C}{abc} \iff \frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c} \,.$$

Dermed har vi vist følgende sætning:

SÆTNING 4. *Sinusrelationerne*
For en vilkårlig trekant gælder *sinusrelationerne*:

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

eller

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \,.$$

EKSEMPEL 5. I ΔABC er $A = 43°$, $B = 76°$ og $a = 7$. Vi vil beregne siderne b og c samt vinklen C (fig. 17).

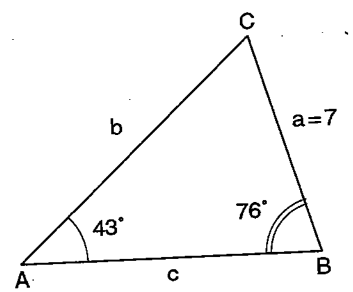

Fig. 17

Vi finder straks, at

$$C = 180° - 76° - 43° = 61° \,.$$

Derefter indsætter vi de kendte størrelser i sinusrelationerne:

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} \iff \frac{\sin 43°}{7} = \frac{\sin 76°}{b} \,.$$

Her er det praktisk at gange over kors:

$$b \cdot \sin 43° = 7 \cdot \sin 76° \iff b = \frac{7 \cdot \sin 76°}{\sin 43°} = 9{,}959 \,.$$

Siden c findes ligeledes ved hjælp af sinusrelationerne:

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin C}{c} \iff \frac{\sin 43°}{7} = \frac{\sin 61°}{c}$$

$$\iff c \cdot \sin 43° = 7 \cdot \sin 61° \iff c = \frac{7 \cdot \sin 61°}{\sin 43°} = 8{,}977 \,.$$

Dermed er samtlige stykker i trekanten beregnet.

Trekantens areal er

$$T = \tfrac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin C = \tfrac{1}{2} \cdot 7 \cdot 9{,}959 \cdot \sin 61° = 30{,}486 \,.$$

Fig. 19

Billedet viser afstands- og højdemåling i middelalderen.

COSINUSRELATIONERNE

Det er ikke altid, at sinusrelationerne kan bruges til at finde ukendte stykker i en given trekant, fx ikke hvis de tre sider er kendt, og vinklerne søges. Vi udvikler derfor endnu et formelsystem til beregning af ukendte stykker.

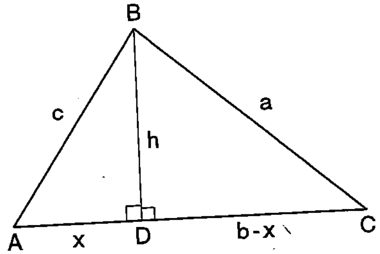

Fig. 18

Vi ser på en trekant og antager, at den er spidsvinklet (fig. 18). Vi tegner højden fra B med fodpunkt D på AC og betegner længden af AD med x, så DC får længden $b - x$.

Da ΔABD og ΔBDC er retvinklede giver Pythagoras' sætning

$$\Delta BDC \;:\; h^2 + (b - x)^2 = a^2 \;\Leftrightarrow\; h^2 + b^2 - 2bx + x^2 = a^2$$
$$\Delta ABD \;:\; h^2 + x^2 = c^2 .$$

Vi trækker den nederste ligning fra den øverste (venstre side fra venstre side og højre fra højre):

$$(h^2 + b^2 - 2bx + x^2) - (h^2 + x^2) = a^2 - c^2$$
$$\Leftrightarrow h^2 + b^2 - 2bx + x^2 - h^2 - x^2 = a^2 - c^2 \;\Leftrightarrow\; b^2 - 2bx = a^2 - c^2$$
$$\Leftrightarrow\; 2bx = b^2 + c^2 - a^2 \qquad (1)$$

Da ΔABD er retvinklet, kan reglen for cosinus fra sætning 2a bruges:

$$\cos A = \frac{x}{c} \;, \text{ hvoraf } \; x = c \cdot \cos A .$$

Dette udtryk for x indsættes i ligningen (1):

$$2b \cdot c \cdot \cos A = b^2 + c^2 - a^2 \;.$$

Vi kan her isolere enten cos$A$ eller a^2. Vælges den første mulighed fås

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \;, \qquad (2)$$

og vælges den anden fås

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A \;. \qquad (3)$$

Formlerne (2) og (3) er en af *cosinusrelationerne*. Hvis vi havde brugt højden fra A eller C, havde vi fået tilsvarende formler. Med få ændringer kan beviset gennemføres også for stumpvinklede trekanter. Formlerne gælder derfor i alle trekanter.

SÆTNING 5. *Cosinusrelationerne*
I enhver trekant gælder

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \quad \text{eller} \quad a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A \,,$$
$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \quad \text{eller} \quad b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos B \,,$$
$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \quad \text{eller} \quad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C \,.$$

EKSEMPEL 6. I ΔABC kendes alle tre sider (fig. 20), nemlig

$$a = 4 \;,\; b = 5 \;\text{ og }\; c = 6 \;.$$

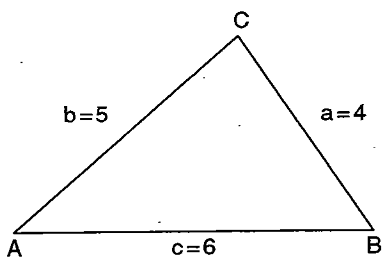

Fig. 20

Vinklerne findes ved hjælp af cosinusrelationerne. Vi får

$$\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{5^2+6^2-4^2}{2\cdot 5\cdot 6} = 0{,}75 \;\Leftrightarrow\; A = 41{,}41°$$

$$\cos B = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac} = \frac{4^2+6^2-5^2}{2\cdot 4\cdot 6} = 0{,}5625 \;\Leftrightarrow\; B = 55{,}77° .$$

Endelig er

$$C = 180° - A - B = 82{,}82° .$$

EKSEMPEL 7. I ΔABC er en vinkel og de to hosliggende sider kendt (fig. 21), nemlig

$$A = 35° \;,\; b = 10 \text{ og } c = 7 ,$$

og vi ønsker at beregne a, B og C.

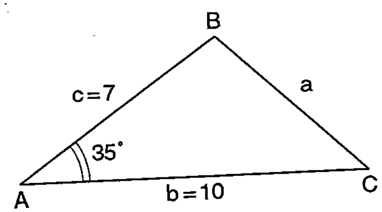

Fig. 21

Vi benytter cosinusrelationen

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cdot\cos A ,$$

fordi højre side af lighedstegnet netop indeholder de kendte størrelser. Vi får

$$a^2 = 10^2 + 7^2 - 2\cdot 10\cdot 7\cdot\cos 35° = 34{,}3187 \;\Leftrightarrow\; a = 5{,}8582 \approx 5{,}86 .$$

Nu kendes alle sider i trekanten, og vi kan derfor bruge cosinusrelationerne på den anden form:

$$\cos B = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac} = \frac{34{,}3187+7^2-10^2}{2\cdot 5{,}8582\cdot 7} \;\Leftrightarrow\; B = 101{,}74° .$$

Endelig er $C = 180° - 35° - 101{,}74° = 43{,}26°$.

DET DOBBELTTYDIGE TILFÆLDE

I de eksempler vi har set på ovenfor, fandt vi præcis én trekant, der havde de mål, der blev angivet. Hvis der fx er opgivet de tre sider, fandt vi i eksempel 5 netop én trekant med de angivne sider.

Hvis der imidlertid er opgivet to sider og en ikke-mellemliggende vinkel, kan det tænkes, at der findes to trekanter med de opgivne mål. Det er også muligt, at der slet ikke findes nogen trekant, eller at der findes netop én.

Vi viser ved et par eksempler, hvordan beregningerne foregår.

EKSEMPEL 8. I ΔABC får vi opgivet, at

$$A = 29° \;,\; b = 13 \;,\; a = 9 .$$

Vi kan konstruere trekanten ved at afsætte et linjestykke med længde 13 (siden b). Endepunkterne af linjestykket er A og C (fig. 22). Så tegnes vinkel A på 29° med AC som det ene ben, og derefter anbringes passerspidsen i C, og der trækkes en cirkelbue med radius 9. Cirkelbuen skærer det andet vinkelben i vinkel A to steder, i punkterne B_1 og B_2.

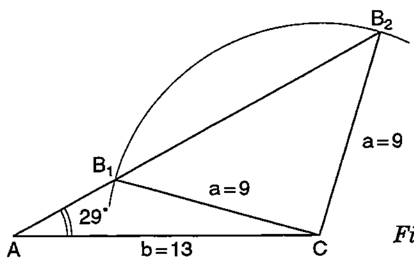

Fig. 22

Dermed har vi fået to trekanter med de opgivne mål på A, b og a, nemlig ΔAB_1C og ΔAB_2C, og vi vil nu beregne de ukendte stykker i dem begge (fig. 23).

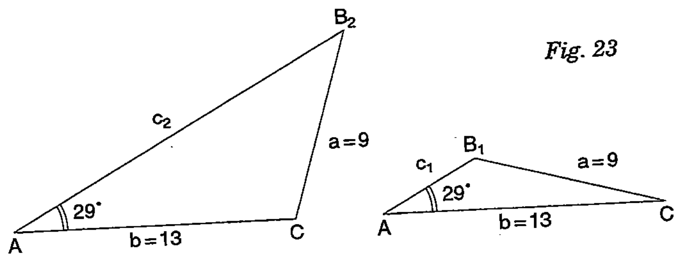

Fig. 23

Vi benytter cosinusrelationen og får

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A \Leftrightarrow 9^2 = 13^2 + c^2 - 2 \cdot 13 \cdot c \cdot \cos 29°$$

$$\Leftrightarrow 0 = 13^2 - 9^2 + c^2 - 26 \cdot c \cdot \cos 29° \Leftrightarrow c^2 - 22{,}7401c + 88 = 0 .$$

Denne andengradsligning i c har løsningerne

$$c = 17{,}79 \quad \text{og} \quad c = 4{,}95 .$$

På fig. 22 er altså $|AB_1| = 4{,}95$ og $|AB_2| = 17{,}79$.

Først beregner vi ΔAB_1C. Vi kender alle tre sider, så vi kan bruge cosinusrelationen:

$$\cos B_1 = \frac{4{,}95^2 + 9^2 - 13^2}{2 \cdot 4{,}95 \cdot 9} \Leftrightarrow B_1 = 135{,}45° .$$

Derefter er

$$C = 180° - 135{,}45° - 29° = 15{,}55° .$$

Derefter beregner vi ΔAB_2C. På fig. 22 er $\angle CB_1B_2 = 180° - 135{,}45° = 44{,}55°$. Nu er ΔCB_1B_2 ligebenet, så vi også har at $B_2 = 44{,}55°$. Men så er

$$C = 180° - 29° - 44{,}55° = 106{,}45° .$$

EKSEMPEL 9. Det kan som nævnt tænkes, at der kun fremkommer én trekant af de opgivne stykker. Hvis det fx opgives, at

$$A = 29° \ , \ b = 13 \ , \ a = 14 \ ,$$

og vi igen foretager konstruktionen som nævnt i eksempel 8, vil cirkelbuen med centrum C og radius 14 kun skære vinkelbenet i ét punkt B (fig. 24 til venstre).

Vi får igen ved cosinusrelationerne:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A \Leftrightarrow 14^2 = 13^2 + c^2 - 2 \cdot 13 \cdot c \cdot \cos 29°$$

$$\Leftrightarrow 0 = 13^2 - 14^2 + c^2 - 26 \cdot c \cdot \cos 29° \Leftrightarrow c^2 - 22{,}7401c - 27 = 0 .$$

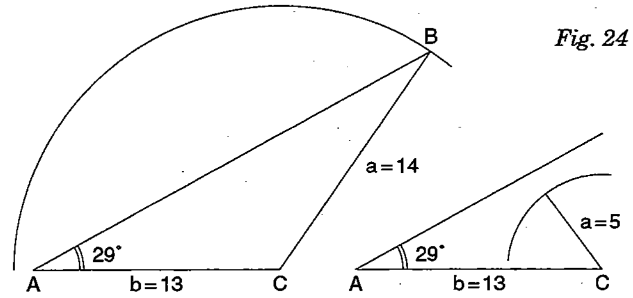

Fig. 24

Denne andengradsligning har løsningerne

$$c = 23{,}87 \quad \text{og} \quad c = -1{,}13 .$$

Her kan selvfølgelig kun den første bruges. I trekanten har vi de tre sider og får

$$\cos C = \frac{13^2 + 14^2 - 23{,}87^2}{2 \cdot 13 \cdot 14} \Leftrightarrow C = 124{,}23° .$$

Så er

$$B = 180° - 124{,}23° - 29° = 26{,}77° .$$

Der er også den mulighed, at cirkelbuen lige netop tangerer vinkelbenet – i så fald bliver B ret. Endelig er der den mulighed, at cirkelbuen slet ikke er lang nok til at 'nå' over til vinkelbenet. Det er fx tilfældet, hvis $a = 5$ (fig. 24 til højre). I dette tilfælde findes ingen trekant med de opgivne mål.