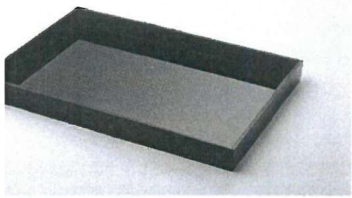
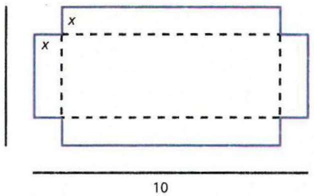
1.5 Polynomier af højere grad





36 Introduktion

En rektangulær bakke kan laves ud af en plade ved at klippe et kvadrat ud af hvert hjørne med en given sidelængde x. Se tegningen i margenen. Volumen af bakken kan beregnes med funktionen

$$V(x) = 4x^3 - 30x^2 + 50x.$$

Dette er et tredjegradspolynomium, fordi den højeste eksponent er 3.
I afsnittet her skal vi se nærmere på polynomier, der har højere grad end 2.

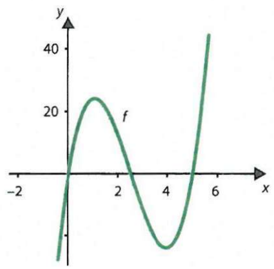
37 Eksempel

Vi vil opstille en forskrift for bakkens volumen. Når bakken foldes som vist på tegningen, bliver x højden af bakken, og bakkens bredde og længde bliver pladens sidelængder fratrukket $2x$ (et x i hver ende).
Volumen af en kasse beregnes ved at gange sidelængderne sammen, og vi får derfor følgende volumenfunktion:

$$V(x) = x \cdot (5 - 2x) \cdot (10 - 2x),$$

som kan omskrives til

$$V(x) = 4x^3 - 30x^2 + 50x.$$



Grenene vender hver sin vej, når polynomiets grad er ulige, og samme vej, når graden er lige.

38 Eksempel

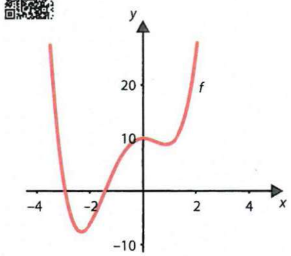
På figuren ses grafen for tredjegradspolynomiet $f(x) = 4x^3 - 30x^2 + 50x$.
I polynomier er $Dm(f)$ lig med alle reelle tal.
For polynomiet V, som bruges som model for volumen i introduktionscasen, er det modelbetingelserne, der bestemmer definitionsmængden. Her er $Dm(V) =]0;2{,}5[$, fordi kassen er 5 bred, og x er en længde (et positivt tal).

39 Definition

Et polynomium af n'te grad er en funktion med en forskrift af typen

$$f(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \cdots + a_1 \cdot x + a_0,$$

hvor koefficienterne $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1$ og a_0 er reelle tal, og hvor a_n ikke er nul.



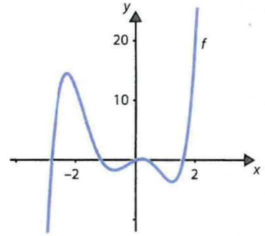
40 Eksempel

Funktionen $f(x) = x^4 + 2x^3 - 4x^2 + 10$ er et fjerdegradspolynomium.
Vi ser på grafen, at der må være to rødder.
Hvis vi parallelforskyder grafen lodret op, ved at sætte konstantleddet til et tal større end 10, kan vi få et fjerdegradspolynomium uden rødder.
Omvendt, hvis vi formindsker konstantleddet, vil grafen parallelforskydes nedad. Vi kan derved få 0, 1, 2, 3 eller 4 rødder i fjerdegradspolynomiet.

41 Sætning

Et polynomium af n'te grad har højest n rødder.

42 Eksempel

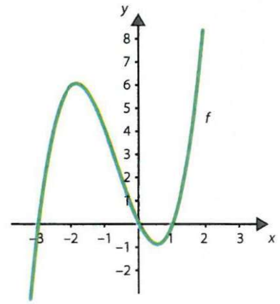


Femtegradspolynomiet $f(x) = x^5 + 2x^4 - 4x^3 - 4x^2 + 2x$, hvis graf kan ses i margenen, har 5 rødder. Hvis vi imidlertid lægger konstanten 5 til, får vi et andet polynomium: $g(x) = x^5 + 2x^4 - 4x^3 - 4x^2 + 2x + 5$, hvis graf har samme forløb, men er parallelforskudt opad.
Bemærk, at uanset størrelsen af den konstant vi lægger til, vil vi altid have mindst én rod, i modsætning til eksemplet med fjerdegradspolynomiet.

43 Sætning

Et polynomium af ulige grad har mindst én rod.

44 Eksempel



Funktionen $f(x) = 2 \cdot x \cdot (x-1) \cdot (x+3)$ er et tredjegradspolynomium skrevet på faktoriseret form. Ganger vi de fire faktorer sammen på højresiden, får vi tredjegradspolynomiet skrevet op på traditionel form $f(x) = 2x^3 + 4x^2 - 6x$.
Omskrivningen kan udføres med CAS. I nogle programmer med kommandoen "expand(2·x·(x−1)·(x+3))".
I den faktoriserede form er det let at aflæse rødderne til 0, 1 og −3, idet hvert af disse tal bevirker, at en af faktorerne bliver lig med 0, og derved bliver $f(x) = 0$ ifølge nulreglen.

45 Øvelse

Et polynomium er givet ved $f(x) = x^4 + 2x^3 - 4x^2 + 10$.

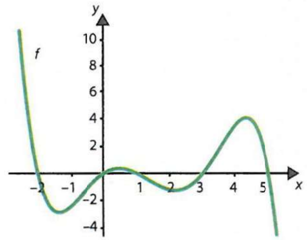
a. Hvilken grad har polynomiet?
b. Angiv hvor mange muligheder, der er for antal rødder for f.
c. Tegn grafen for f.
d. Angiv, hvor mange rødder f har.
e. Bestem rødderne med CAS.

46 Øvelse

Lad der være givet en funktion $f(x) = -0{,}3x(x+3)(x+2)(x-1)$

a. Brug CAS til at gange parenteserne ud, for at vise at f er et fjerdegradspolynomium.
b. Bestem rødderne i f.

47 Øvelse



I koordinatsystemet ses grafen for et femtegradspolynomium.

a. Angiv antallet af rødder.
b. Bestem rødderne ved grafisk aflæsning.
c. Indsæt rødderne en af gangen i det faktoriserede polynomium $f(x) = -0{,}05 \cdot x \cdot (x+2) \cdot (x-1) \cdot (x-3) \cdot (x-4)$, og afgør, om polynomiets graf kunne være den, der vises i koordinatsystemet.