Supplerende beregninger/ kommentarer til bogen første sider om monotoniundersøgelse

Eksempel 111: Monotoniforhold og ekstrema

Bestem monotoniforhold og ekstrema for funktionen

$f(x) = x^4 - 4x^2 + 1.$

$restart : with(Gym) :$

$f(x) := x^4 - 4x^2 + 1 :$

Ekstra: Def-mængde, nulpunkter og fortegn

$Dm(f) = R$ (alle reelle tal).

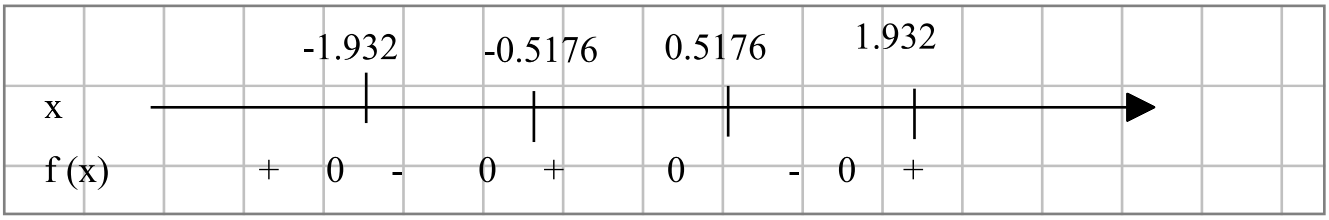
$f(x) = 0.0 \xrightarrow{\text{solve for x}}$

$[[x = -0.5176380902], [x = 0.5176380902], [x = -1.931851653], [x = 1.931851653]]$

Så finder vi fortegnene af f(x) ved at beregne en værdi af f(x) på hver side af nulpunkterne af f'(x):

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	$f(-2) = 1$	$f(-1) = -2$	$f(0) = 1$	$f(1) = -2$	$f(2) = 1$

Fortegnslinie:



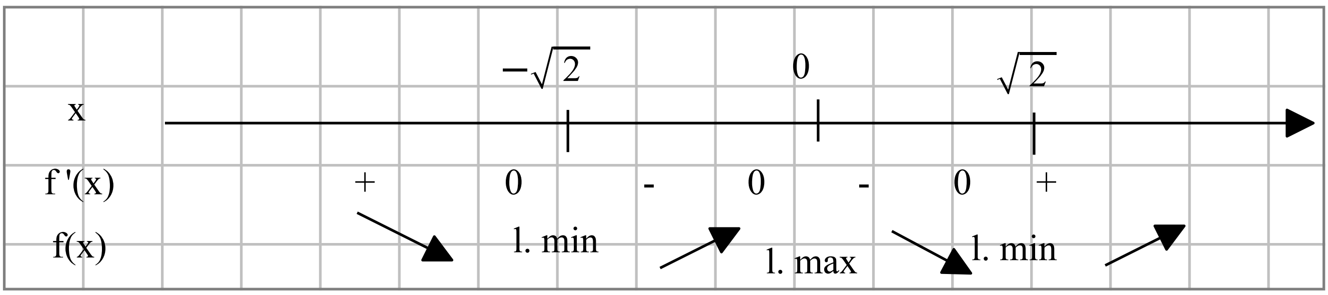
Monotoniundersøgelse

$f'(x) = 0 \xrightarrow{\text{solve for x}} [[x = 0], [x = \sqrt{2}], [x = -\sqrt{2}]]$

Så finder vi fortegnene af f'(x) ved at beregne en værdi af f'(x) på hver side af nulpunkterne af f'(x):

x	-3	-1	1	3
$f'(x)$	$f'(-3) = -84$	$f'(-1) = 4$	$f'(1) = -4$	$f'(3) = 84$

Monotonilinie:



Konklusion:

$f(x)$ er aftagende i intervallet $\left[-\infty; -\sqrt{2}\right]$, voksende i $\left[-\sqrt{2}; 0\right]$, aftagende i $\left[0; \sqrt{2}; 0\right]$ og voksende i $\left[\sqrt{2}; \infty\right[$.

Lokalt min: $f\left(-\sqrt{2}\right) = -3$

Lokalt max: $f(0) = 1$

Lokalt min: $f\left(\sqrt{2}\right) = -3$

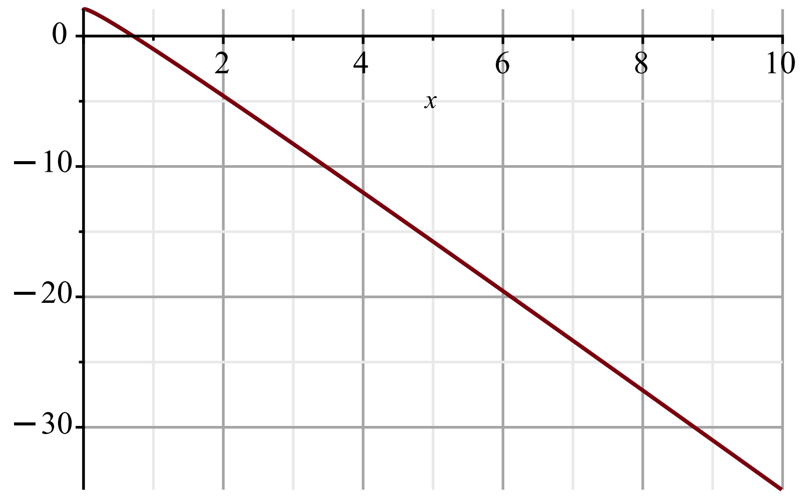
Eksempel 112: Maksimum for $f(x) = 2 - 4x + \sqrt{x}$

Bestem maksimum for funktionen $f(x) = 2 - 4x + \sqrt{x},\ \ x \geq 0$

restart : *with*(*Gym*) :

$f(x) := 2 - 4x + \sqrt{x}$:

plot($f(x)$, $x = 0..10$, *size* = [400, 250], *gridlines*)



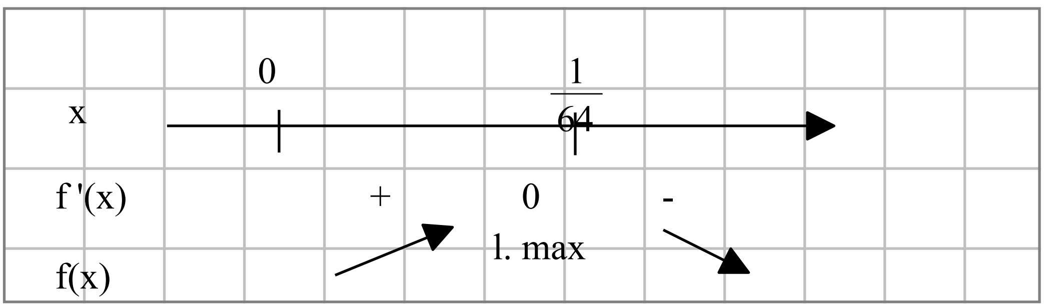
Spørgsmål: Hvor er f(x) voksende eller aftagende eller begge dele i forskellige intervaller? Det er svært at se ud fra grafen.

$f'(x) = 0 = -4 + \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = 0 \xrightarrow{\text{solve for x}} \left[\left[x = \dfrac{1}{64}\right]\right]$

Så finder vi fortegnene af f'(x) ved at beregne en værdi af f'(x) på hver side af nulpunkterne af f'(x):

x	0.01	0.2
$f'(x)$	$f'(0.01) = 1.000000000$	$f'(0.2) = -2.881966012$

Monotonilinie:



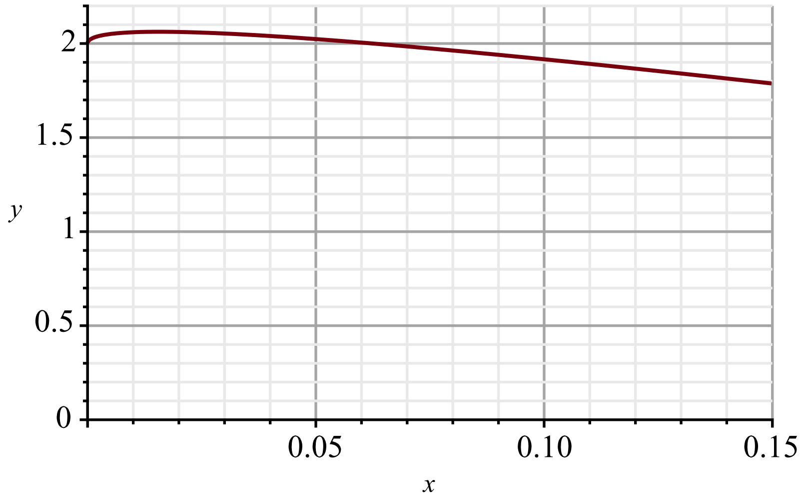
Konklusion:

$f(x)$ er voksende i intervallet $\left[0; \dfrac{1}{64}\right]$ og aftagende i $\left[\dfrac{1}{64}; \infty\right[$.

Lokalt max: $f\left(\frac{1}{64}\right) = \frac{33}{16} \xrightarrow{\text{at 5 digits}} 2.0625$

Nyt plot, der illustrerer monotoniforholdene

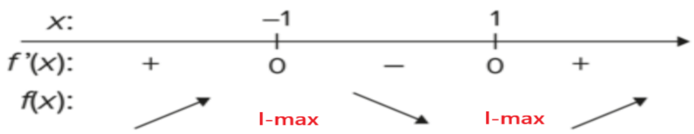
$plot\left(f\left(x\right), x = 0..0.15, y = 0..2.2, size = \left[400, 250\right], gridlines\right)$



Eksempel 113: Monotoniforhold for $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x$

Der mangler noget på monotonilinien, her vist med rødt:

Vi sammenfatter disse resultater på en fortegnslinje:



Figur 113