

Eksempel 1: Sammensat funktion af $f(x) = x^2 - 4$ og $g(x) = 3\sqrt{x}$.

$f(x)$ som ydre funktion og $g(x)$ som indre funktion:

$$f(g(x)) = f(3\sqrt{x}) = (3\sqrt{x})^2 - 4 = 3^2 \cdot (\sqrt{x})^2 - 4 = 9x - 4$$

$g(x)$ som ydre funktion og $f(x)$ som indre funktion:

$$g(f(x)) = g(x^2 - 4) = 3\sqrt{x^2 - 4}$$

Opgave 1: Find forskriften for både $f(g(x))$ og $g(f(x))$.

a) $f(x) = 2x^2$ og $g(x) = x + 3$.

b) $f(x) = 3^x$ og $g(x) = \sqrt{x}$.

Eksempel 2:

$p(x) = \ln(x^4 + 1)$ er en sammensat funktion med ydre funktion $f(y) = \ln(y)$ og indre funktion $g(x) = x^4 + 1$.

Eksempel 3:

$p(x) = 2^{1+\sqrt{x}}$ er en sammensat funktion med ydre funktion $f(y) = 2^y$ og indre funktion $g(x) = 1 + \sqrt{x}$.

Opgave 2: Opskriv ydre funktion $f(y)$ og indre funktion $g(x)$ for nedenstående sammensatte funktioner

a) $p(x) = e^{x^2+2x-10}$

b) $p(x) = 3\sqrt{\ln(x) + 5}$

c) $p(x) = (4x + 3)^{10}$

d) $p(x) = (2 + \ln(x))^3$

e) $p(x) = \frac{1}{x^6+7}$

Eksempel 4: Differentiation af sammensat funktion

Generel regel: Hvis $p(x) = f(g(x))$, og sættes $y = g(x)$ så er $p'(x) = f'(y) \cdot g'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$.

$p(x) = \ln(x^4 + 1)$ fra **Eksempel 2** differentieres således:

$$p'(x) = (\ln(y))' \cdot (x^4 + 1)' = \frac{1}{y} \cdot (4x^4 - 1 + 0) = \frac{1}{x^4 + 1} \cdot 4x^3 = \frac{4x^3}{x^4 + 1}$$

$p(x) = 2^{1+\sqrt{x}}$ fra **Eksempel 3** differentieres således:

$$p'(x) = (2^y)' \cdot (1 + \sqrt{x})' = 2^y \cdot \ln(2) \cdot \left(0 + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right) = 2^{1+\sqrt{x}} \cdot \ln(2) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{2^{1+\sqrt{x}} \cdot \ln(2)}{2\sqrt{x}}$$

Opgave 3: Differentiér funktionerne fra **Opgave 2** vha. reglen som vist i **Eksempel 4**.