Bevis for differentiation af vigtige funktioner 2

Sætning 5

Funktionen $f(x) = x^a$ er differentiabel med differentialkvotient $f'(x) = a \cdot x^{a-1}$.

Bevis

Vi omskriver funktion således: $f(x) = x^a = \left(e^{\ln(x)}\right)^a = e^{a \cdot \ln(x)}$.

Dette er en sammensat funktion med ydre funktion $p(y) = e^y$ og indre funktion $q(x) = a \cdot ln(x)$.

Så gælder $p'(y) = e^y$ og $q'(x) = \left(a \cdot ln(x)\right)' = a \cdot (\ln(x))' = a \cdot \frac{1}{x}$

Vi differentierer nu $f(x)$ vha. kædereglen:

$$\boxed{f'(x) = p'(y) \cdot q'(x) = e^y \cdot a \cdot \frac{1}{x} = a \cdot \frac{1}{x} \cdot e^{a \cdot \ln(x)} = a \cdot \frac{1}{x} \cdot x^a = a \cdot \frac{x^a}{x} = a \cdot x^{a-1}}$$

Så er sætningen bevist.

Sætning 6

Funktionen $f(x) = a^x$ er differentiabel med differentialkvotient $f'(x) = a^x \cdot \ln(a)$

Bevis

Vi omskriver funktion således: $f(x) = a^x = \left(e^{\ln(a)}\right)^x = e^{x \cdot \ln(a)}$

Dette er en sammensat funktion med ydre funktion $p(y) = e^y$ og indre funktion $q(x) = x \cdot ln(a)$.

Så gælder $p'(y) = e^y$ og $q'(x) = \left(x \cdot ln(a)\right)' = \ln(a)$ (Husk, at $\ln(a)$ er en konstant)

Vi differentierer nu $f(x)$ vha. kædereglen:

$$\boxed{f'(x) = p'(y) \cdot q'(x) = e^y \cdot \ln(a) = e^{x \cdot \ln(a)} \cdot \ln(a) = a^x \cdot \ln(a)}$$

Så er sætningen bevist.