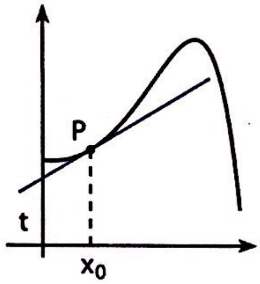
MORTEN BRYDENSHOLT & GRETE RIDDER EBBESEN

LÆREBOG I MATEMATIK

A2 STX



2. UDGAVE

systime

Lærebog i matematik A2 STX

Redaktør:
Elisabeth Husum

Omslag:
Publizon A/S

Sat med KP-regular 10/13

Grafisk tilrettelæggelse og produktion:
Morten Brydensholdt og Grete Ridder Ebbesen

2. udgave, 1. oplag
ISBN 978-87-616-9232-0

systime

Sonnesgade 11
DK-8000 Aarhus C
Tlf.: 70 12 11 00
systime.dk

NORDISK MILJØMÆRKNING
5041 0826

Eksempel 7.2.9

For en 3-mængde er antallet af permutationer $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$.

Specielt findes der 6 permutationer af elementerne i $A = \{$ rød, gul, grøn $\}$, og disse har vi angivet i Eksempel 7.2.8.

Eksempel 7.2.10

En gruppe på 10 personer stiller sig på række for at købe billetter til en fest.

De 10 personer kan danne i alt $10! = 3\,628\,800$ rækker.

Eksempel 7.2.11

30 elever i en klasse skal stille sig i en kø. Antallet af køer er

$$30! = 265\,252\,859\,812\,191\,058\,636\,308\,480\,000\,000$$

Hvis eleverne beslutter sig for at afprøve alle muligheder og danner en ny kø hvert sekund, vil projektet tage ca. $8{,}4 \cdot 10^{24}$ år. Til sammenligning er Universets alder 13,6 mia. år, altså $13{,}6 \cdot 10^{9}$ år.

Øvelse 154

Vi vil nu se på rækkefølger af nogle udvalgte elementer fra en mængde A med n elementer.

Definition 7.2.4. Givet en mængde A med n elementer og et helt tal r, $0 \le r \le n$. En *r-permutation* af elementerne i A er en opstilling af r elementer fra A i én bestemt rækkefølge.

Eksempel 7.2.12

Med $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ er de trecifrede tal 123, 132, 413 og 135 eksempler på 3-permutationer af elementer fra A.

Antallet af r-permutationer af elementerne i en mængde bestemmer vi med følgende sætning.

Sætning 7.2.2. *Givet en n-mængde A og et helt tal r, $0 \le r \le n$.*
Så er antallet af permutationer $P(n,r)$ af r elementer fra A

$$P(n,r) = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-(r-1)) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Bevis

Ved at liste antallet af valgmuligheder på de r pladser i figur 7.2.6

	1. pl	2. pl		r'te pl
Antal valgmuligheder	n	$n-1$	$\cdots$	$n-(r-1)$

Figur 7.2.6

giver multiplikationsprincippet os, at antallet af rækkefølger er

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-(r-1))$$

som vi omformer til

$$\begin{aligned} & n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-(r-1)) \\ = & \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-(r-1)) \cdot (n-r) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1}{(n-r) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1} = \frac{n!}{(n-r)!} \end{aligned}$$

Eksempel 7.2.13

Antallet af 4-permutationer af elementerne i en 6-mængde er

$$P(6,4) = \frac{6!}{(6-4)!} = \frac{6!}{2!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1} = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$$

Eksempel 7.2.14

Antallet af trecifrede tal med forskellige cifre af cifre i $A = \{1,2,3,4,5\}$ er

$$P(5,3) = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!} = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$$

Eksempel 7.2.15

Ved et galopløb med 10 heste er der pengepræmier til de heste, der opnår 1. pladsen, 2. pladsen og 3. pladsen.

Pengepræmien kan fordeles på

$$\frac{10!}{(10-3)!} = \frac{10!}{7!} = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720 \text{ måder}$$

▶ Øvelse 155, Øvelse 156

7.3 Kombinationer

Ved mange valg er rækkefølgen dog underordnet, og det afgørende vil være, hvilke elementer der er udvalgt. F.eks. består en bridgehånd af 13 kort udvalgt fra mængden

$$A = \{\clubsuit 2, \clubsuit 3, \ldots, \clubsuit K, \clubsuit A, \diamond 2, \diamond 3, \ldots, \diamond K, \diamond A, \heartsuit 2, \heartsuit 3, \ldots, \heartsuit K, \heartsuit A, \spadesuit 2, \spadesuit 3, \ldots, \spadesuit K, \spadesuit A\}$$

Den rækkefølge, som vi modtager kortene i, har ingen betydning for den endelige hånd. Den endelige hånd består af 13 af de 52 kort, dvs. en delmængde på 13 elementer fra A.

Vi vil derfor se nærmere på antallet af delmængder af en n-mængde.

Definition 7.3.1. Givet en n-mængde A og et helt tal r, $0 \leq r \leq n$.
Så kalder vi en delmængde af A med r elementer for *en r-delmængde* af A eller *en r-kombination* af A.

De trivielle delmængder af A svarer til $r = 0$ og $r = n$. 0-delmængden af A er den tomme mængde Ø (ingen elementer er udtaget), og n-delmængden af A er hele A (alle elementer er udtaget).

1-delmængderne består af et enkelt element fra A, så antallet af 1-delmængder af A er n.

$(n-1)$-delmængderne består af alle elementerne i A pånær ét. Altså er antallet af $(n-1)$-delmængder af A også n.

Eksempel 7.3.1
2-kombinationerne af $A = \{a, b, 1, 2\}$ er

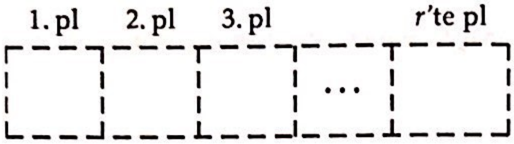
$$\{a,b\},\ \{a,1\},\ \{a,2\},\ \{b,1\},\ \{b,2\},\ \{1,2\}$$

Eksempel 7.3.2
3-kombinationerne af $\{x,y,z,w\}$ er

$$\{x,y,z\},\ \{x,y,w\},\ \{x,z,w\},\ \{y,w,z\}$$

For andre værdier af r end de ovenfor nævnte er det ikke så simpelt umiddelbart at angive antallet af r-delmængder, men vi vil nu udlede en formel til beregning af dette antal.

Én rækkefølge af r elementer fra A svarer til at udfylde skemaet i figur 7.3.1 med elementer fra A uden gengangere.



Figur 7.3.1

Antallet af udfyldninger er ifølge Sætning 7.2.2

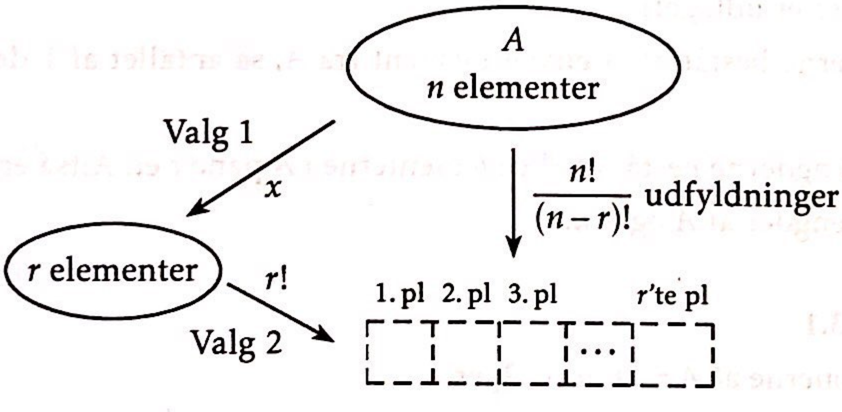
$$P(n,r) = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-(r-1)) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Vi foretager nu udfyldningen i to trin.

Valg 1: Vi vælger først de r elementer fra A, der skal stå i skemaet. Antallet af valgmuligheder kender vi ikke, så vi sætter dette tal til x.

Valg 2: Vi vælger dernæst én rækkefølge af de r elementer. Antallet af mulige rækkefølger er $r!$

Valgene er illustreret på figur 7.3.2.



Figur 7.3.2

Ifølge multiplikationsprincippet kan vi udfylde skemaet på $x \cdot r!$ måder, og så får vi

$$x \cdot r! = \frac{n!}{(n-r)!} \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{n!}{(n-r)!\,r!}$$

Da x svarer til antallet af valg af r elementer fra A, har vi nu fundet et udtryk for antallet af r-delmængder af en n-mængde.

Før vi formulerer dette resultat som en sætning, laver vi først en definition.

Definition 7.3.2. Lad n og r være ikke-negative hele tal med $0 \le r \le n$. Så er *binomialkoefficienten* $K(n,r)$ defineret ved

$$K(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!r!} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-r+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot r}$$

Vi har nu

Sætning 7.3.1. *Lad A være en n-mængde og r et helt tal,* $0 \le r \le n$. *Så er antallet af r-kombinationer af A givet ved*

$$K(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!r!}$$

Eksempel 7.3.3

Antallet af 2-delmængder af en 7-mængde er

$$K(7,2) = \frac{7!}{(7-2)!2!} = \frac{7!}{5!\cdot 2!} = \frac{7\cdot 6}{2\cdot 1} = 21$$

og tilsvarende finder vi antallet af 3-delmængder af en 7-mængde som

$$K(7,3) = \frac{7!}{(7-3)!3!} = \frac{7!}{4!\cdot 3!} = \frac{7\cdot 6\cdot 5}{3\cdot 2\cdot 1} = 35$$

Eksempel 7.3.4

En bridgehånd består af 13 kort ud af 52 kort. Antallet af bridgehænder er dermed

$$K(52,13) = \frac{52!}{39!13!} = \frac{52\cdot 51\cdot\ldots\cdot 40}{13\cdot 12\cdot\ldots\cdot 1} = 635013559600$$

Eksempel 7.3.5

En klasse med 18 drenge og 14 piger skal nedsætte et udvalg, der består af 2 drenge og 3 piger.

Klassen skal vælge de 2 drenge blandt 18 drenge, hvilket de kan gøre på $K(18,2)$ måder, og de 3 piger skal vælges ud af 14 piger, hvilket de kan gøre på $K(14,3)$ måder.