UNDERVISNINGS
MINISTERIET
STYRELSEN FOR
UNDERVISNING OG KVALITET

Matematik A

Studentereksamen

Gammel ordning

Forberedelsesmateriale

Digital eksamensopgave

gl-stx191-MATd/A-02052019

Torsdag den 2. maj 2019

Forberedelsesmateriale til stx-A-net MATEMATIK

Der skal afsættes 6 timer af holdets sædvanlige uddannelsestid til, at eleverne kan arbejde med forberedelsesmaterialet forud for den skriftlige prøve.

3-5 spørgsmål i delprøve 2 af den skriftlige prøve tager udgangspunkt i det materiale, der findes i dette oplæg. De øvrige spørgsmål omhandler emner fra kernestoffet.

Oplægget indeholder teori, eksempler og øvelser i tilknytning til et emne, der ligger umiddelbart i forlængelse af et kernestofemne.

Resultaterne af arbejdet med dette forberedelsesmateriale bør medbringes til den skriftlige prøve.

Alle hjælpemidler er tilladt, og det er tilladt at modtage vejledning.

Vektorfunktioner

Indhold

Forord

Dette forberedelsesmateriale handler om vektorfunktioner.

I forberedelsesmaterialet er der både øvelser og opgaver. Øvelserne er tænkt som hjælp til forståelse af teorien, herunder beviser for nogle af sætningerne. Opgaverne er tænkt som forberedelse til de opgaver, der kommer til den skriftlige eksamen.

I forberedelsesmaterialet benyttes fem typer af farvede bokse. De grønne indeholder definitioner, de grå indeholder eksempler, de blå indeholder øvelser, de røde indeholder sætninger, og de lilla indeholder opgaver. Se eksempler på farvekoderne her:

Definition

Eksempel

Øvelse Øvelserne er tænkt som hjælp til forståelse af teorien, herunder også beviser for nogle af sætningerne.

Sætning

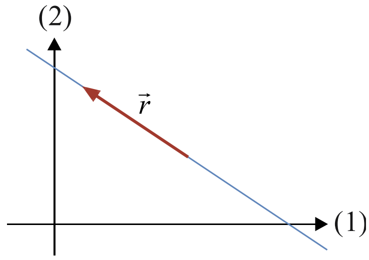
Opgave Opgaverne er tænkt som forberedelse på de opgaver, der kan komme til den skriftlige eksamen.

På de sidste sider i denne pdf er der gode korte vejledninger til, hvordan man kan arbejde med vektorfunktioner i både Maple og GeoGebra.

Der er ikke rigtig nogen af opgaverne, som er markeret "i hånden", men man kan god møde disse opgavetyper til delprøve 1 - eksamen. I de opgaver jeg har tilføjet på de sidste sider, er der et par stykker jeg har markeret til at skulle laves i hånden.

Indledning

Fra vektorregningen ved vi, at rette linjer i planen kan beskrives ved en parameterfremstilling. Det kunne eksempelvis være linjen gennem punktet $(4,2)$ med retningsvektor $\vec{r} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$:



$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

I dette forberedelsesmateriale vil vi folde parameterfremstillinger mere ud og generalisere til vektorfunktioner. Vektorfunktioner kan bruges til at beskrive flere forskellige typer af kurver end almindelige funktioner. Når parameterfremstillingen for linjen ovenfor beskrives som en vektorfunktion, benyttes typisk formen

$$\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} 4 - 3 \cdot t \\ 2 + 2 \cdot t \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

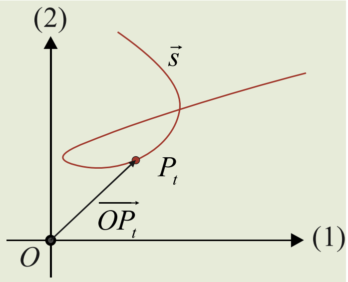
Vektorfunktioner og parameterkurver

Vi definerer en vektorfunktion og den tilhørende parameterkurve på følgende måde.

Definition 1 **Vektorfunktion og parameterkurve**

En *vektorfunktion* $\vec{s}$ knytter netop én vektor $\vec{s}(t)$ til ethvert tal t i et interval I.

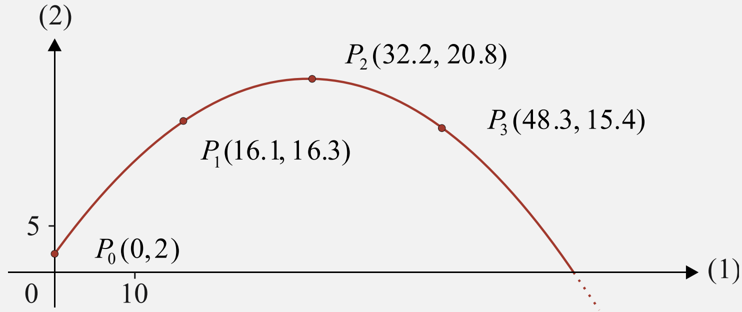
Når parameteren t gennemløber intervallet I, så gennemløber endepunktet P_t af stedvektoren $\overrightarrow{OP_t} = \vec{s}(t)$ en kurve, som vi kalder for *banekurven* eller *parameterkurven* for $\vec{s}$.



For vektorfunktionen $\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ er koordinaterne $x(t)$ og $y(t)$ funktioner af t, og de kaldes vektorfunktionens *koordinatfunktioner*.

Eksempel 1 **Skråt kast**

I en model bevæger en kugle sig langs en banekurve som vist på figuren.



Banekurven kan beskrives ved vektorfunktionen

$$\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16{,}1 \cdot t \\ -4{,}91 \cdot t^2 + 19{,}2 \cdot t + 2 \end{pmatrix}, \quad t \geq 0\,,$$

hvor både den vandrette afstand $x(t)$ og den lodrette afstand $y(t)$ måles i meter, og t måles i sekunder.

Vektorfunktionen $\vec{s}$ kan udover forskriften og parameterkurven også repræsenteres ved en tabel:

t	0	1	2	3	4
x	0	16,1	32,2	48,3	64,4
y	2	16,3	20,8	15,4	0,2

Bemærk, at notationen $P_1(16.1, 16.3)$ betegner, at punktet P_t befinder sig i $(16.1, 16.3)$ til tidspunktet $t = 1$.

Kastet starter ved $t = 0$ og slutter, når genstanden, der kastes, rammer jorden igen. Tidspunktet for dette bestemmes ved at løse ligningen $y(t) = 0$. Dette gøres i et matematisk værktøjsprogram hvor vi får:

$$-4{,}91 \cdot t^2 + 19{,}2 \cdot t + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad t = 4{,}01.$$

Ligningen har også løsningen $t = -0{,}10$, men da $t \geq 0$, ser vi bort fra denne løsning.

Kuglen rammer altså jorden efter ca. 4 sekunder.

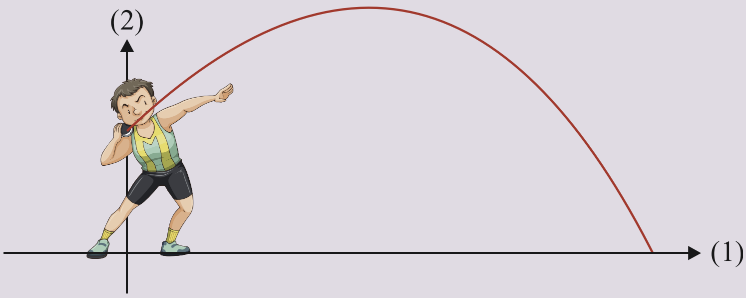
Vi kan beregne længden af kastet ved:

$$x(4{,}01) = 16{,}1 \cdot 4{,}01 = 64{,}6.$$

Kastet er altså 64,6 meter langt.

Øvelse 1 Undersøg, hvordan parameterkurver fremstilles grafisk, og tegn parameterkurven fra eksemplet ovenfor. Benyt eventuelt vejledningen i bilaget hørende til dit matematiske værktøjsprogram.

Opgave 1 **Skråt kast**



I en model beskriver vektorfunktionen $\vec{s}$ banekurven for et kuglestød

$$\vec{s}(t)=\begin{pmatrix}11,2\cdot t\\-4,91\cdot t^2+8,43\cdot t+1,7\end{pmatrix},\quad t\geq 0,$$

hvor $x(t)$ og $y(t)$ måles i meter, og t måles i sekunder efter kastets start.

a) Tegn banekurven for $\vec{s}$ i et matematisk værktøjsprogram.

b) Bestem kuglens position efter 1 sekund.

c) Bestem kuglestødets længde.

Øvelse 2 Se igen på vektorfunktionen $\vec{s}$ for kuglestødet fra opgaven ovenfor.

$$\vec{s}(t)=\begin{pmatrix}11,2\cdot t\\-4,91\cdot t^2+8,43\cdot t+1,7\end{pmatrix},\quad t\geq 0.$$

a) Tegn igen banekurven for $\vec{s}$ i et matematisk værktøjsprogram.

b) Indsæt et punkt på banekurven som styres ved hjælp af en skyder for t, så kuglens position for forskellige tidspunkter t vises.

Se bilaget for hjælp til dit matematiske værktøjssprogram.

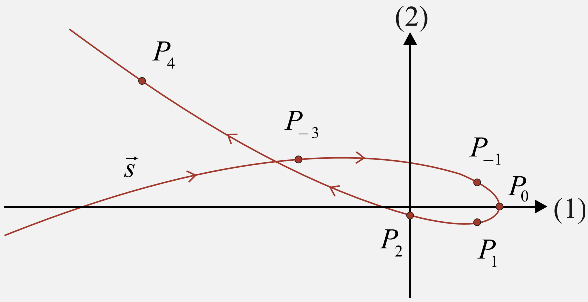
Parameterkurvens retning

Eksempel 1 illustrerer, at der for hver t-værdi fremkommer et punkt på parameterkurven hørende til vektorfunktionen. Ved at indsætte forskellige t-værdier i voksende rækkefølge, kan man dermed afgøre, i hvilken retning parameterkurven gennemløbes.

Eksempel 2 Vektorfunktionen $\vec{s}$ er givet ved

$$\vec{s}(t)=\begin{pmatrix}-t^2+4\\0,1\cdot t^3+0,2\cdot t^2-t\end{pmatrix},\quad t\in\mathbb{R}.$$

På parameterkurven er udvalgte punkter markeret. Ved at se på den rækkefølge støttepunkterne fremkommer i, når t vokser, kan retningen for parameterkurven fastlægges.



Opgave 2 Givet vektorfunktionen

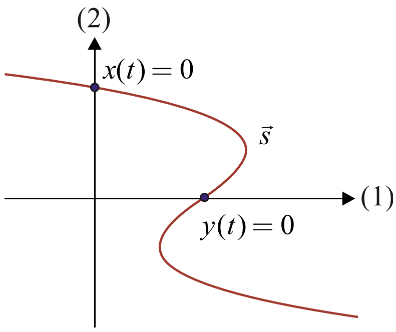
$$\vec{s}(t)=\begin{pmatrix}2\cos(t)\\2\sin(t)\end{pmatrix},\quad t\in[0;2\pi].$$

a) Tegn parameterkurven for vektorfunktionen $\vec{s}$.

b) Undersøg, hvilken retning parameterkurven gennemløbes i.

Skæring med koordinatakserne

Parameterkurvers skæring med akserne bestemmes ved at løse hver af ligningerne $x(t)=0$ og $y(t)=0$, og dernæst indsætte den eller de fundne værdier for t i $\vec{s}(t)$. Man løser ligningen $y(t)=0$ for at bestemme eventuelle skæringspunkter med førsteaksen, og man løser ligningen $x(t)=0$ for at bestemme eventuelle skæringspunkter med andenaksen (overvej). Bemærk, at parameterkurver i modsætning til grafer for almindelige funktioner kan have flere skæringspunkter med andenaksen.

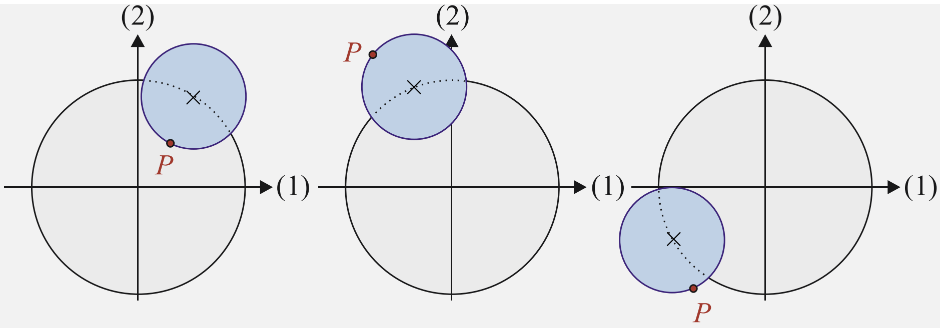


Eksempel 3 **Den roterende kaffekop**

Den roterende kaffekop er en forlystelse i et tivoli. Den består af to skiver, der roterer hver sin vej. En person placeres i en kop på den ene skive.

I en model består forlystelsen af en roterende cirkelformet skive med en radius på 10 m, hvorpå der på kanten er monteret en mindre cirkelformet skive med en radius på 5 m. Den lille cirkelskive roterer den modsatte vej af den store cirkelskive.

Figuren herunder viser modellen af forlystelsen, hvor punktet P markerer det sted, hvor personen befinder sig, og $\times$ markerer det sted, hvor den lille skive er monteret på den store skive.

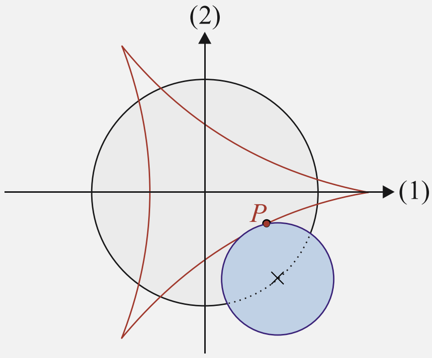


Positionen af punktet P til tidspunktet t kan bestemmes ved vektorfunktionen

$$\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} 10 \cdot \cos(t) + 5 \cdot \cos(-a \cdot t) \\ 10 \cdot \sin(t) + 5 \cdot \sin(-a \cdot t) \end{pmatrix}, \quad t \geq 0,$$

hvor a beskriver antal omløb på den lille cirkel, når t gennemløber intervallet fra 0 til 2π.

For $a = 2$ gennemløber P banekurven, som er vist herunder:



Banekurven starter til tidspunktet $t = 0$ i punktet $P_0(15,0)$ da

$$\vec{s}(0) = \begin{pmatrix} 10 \cdot \cos(0) + 5 \cdot \cos(-2 \cdot 0) \\ 10 \cdot \sin(0) + 5 \cdot \sin(-2 \cdot 0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Vi kan bestemme skæringspunkterne med akserne ved at løse ligningerne $x(t) = 0$ henholdsvis $y(t) = 0$. Banekurven starter til tidspunktet $t = 0$, og vi starter med at undersøge banekurven i intervallet $0 \leq t \leq 4\pi$. Vi bestemmer skæringspunkterne med førsteaksen ved at løse $y(t) = 0$:

$$\begin{aligned} y(t) &= 0 \\ 10 \cdot \sin(t) + 5 \cdot \sin(-2 \cdot t) &= 0. \end{aligned}$$

Et matematisk værktøjsprogram giver følgende løsninger til ligningen:

$$t = 0, t = \pi, t = 2\pi, t = 3\pi \text{ eller } t = 4\pi.$$

Førstekoordinaterne bestemmes ved:

$$\begin{aligned} x(0) &= 10 \cdot \cos(0) + 5 \cdot \cos(-2 \cdot 0) = 15 \\ x(\pi) &= 10 \cdot \cos(\pi) + 5 \cdot \cos(-2 \cdot \pi) = -5 \\ x(2\pi) &= 10 \cdot \cos(2\pi) + 5 \cdot \cos(-2 \cdot 2\pi) = 15 \\ x(3\pi) &= 10 \cdot \cos(3\pi) + 5 \cdot \cos(-2 \cdot 3\pi) = -5 \\ x(4\pi) &= 10 \cdot \cos(4\pi) + 5 \cdot \cos(-2 \cdot 4\pi) = 15. \end{aligned}$$

Banekurven skærer altså førsteaksen i punkterne $(15,0)$ og $(-5,0)$. Det bemærkes, at punktet P når tilbage til udgangspunktet efter et tidsrum på 2π, dvs. det tager ca. 6,3 sekunder for én rundtur i forlystelsen.

Banekurvens skæringspunkter med andenaksen bestemmes på tilsvarende måde ved at løse $x(t)=0$. Her fås løsningerne $y=5{,}9$ og $y=-5{,}9$.

Vi vil vende tilbage til eksemplet ”Den roterende kaffekop” flere gange i materialet.

Opgave 3 En vektorfunktion $\vec{s}$ er givet ved

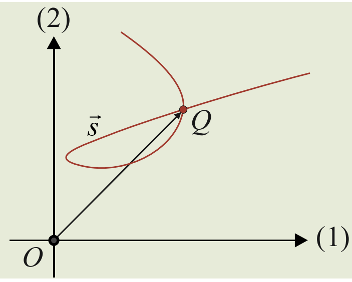
$$\vec{s}(t)=\begin{pmatrix} -t^2+4 \\ 0{,}1\cdot t^3+0{,}2\cdot t^2-t \end{pmatrix},\quad t\in\mathbb{R}.$$

a) Tegn parameterkurven for $\vec{s}$.

b) Bestem koordinatsættene til parameterkurvens eventuelle skæringspunkter med akserne.

Dobbeltpunkter

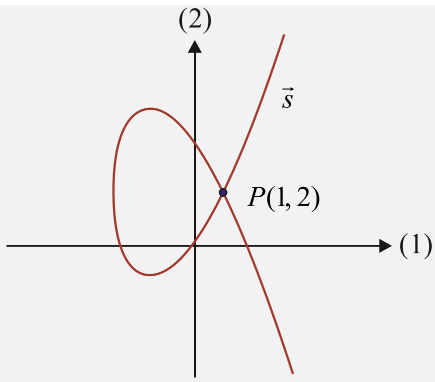
Definition 2 Et *dobbeltpunkt* for en parameterkurve er et punkt Q, hvor $\overrightarrow{OQ}=\vec{s}(t_1)=\vec{s}(t_2)$ for to forskellige værdier t_1 og t_2.



Eksempel 4 Vi ser på vektorfunktionen $\vec{s}$ givet ved

$$\vec{s}(t)=\begin{pmatrix} t^2-3 \\ t^3-4t+2 \end{pmatrix},\quad t\in\mathbb{R},$$

og den tilhørende parameterkurve.



Vi bemærker, at der tilsyneladende er et dobbeltpunkt i punktet $P(1,2)$. Vi bestemmer de tilhørende t-værdier ved at løse ligningssystemet $x(t)=1$ og $y(t)=2$:

$$t^2-3=1 \quad\Leftrightarrow\quad t=-2\vee t=2$$
$$t^3-4t+2=2 \quad\Leftrightarrow\quad t=-2\vee t=0\vee t=2.$$

De t-værdier, der er løsning til begge ligninger, giver et dobbeltpunkt. Det betyder, at dobbeltpunktet $P(1,2)$ fremkommer, når $t=-2$ eller $t=2$.

Hvis vektorfunktionen repræsenteres på tabelform, fremgår dobbeltpunktet som vist i følgende tabel:

t	-2	-1	0	1	2
x	1	-2	-3	-2	1
y	2	5	2	-1	2

Hvis vi ikke kender dobbeltpunktet på forhånd, så bestemmes det ved at løse ligningssystemet:

$$x(t_1) = x(t_2)$$
$$y(t_1) = y(t_2)$$

med betingelsen $t_1 \neq t_2$.

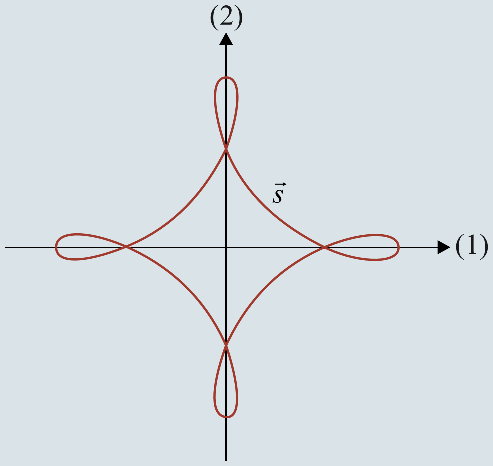
Dette gøres nemmest i et matematisk værktøjsprogram. Bemærk her, at der skal vælges forskellige betegnelser for parameteren f.eks. t og s. Herefter indsættes de fundne parameterværdier i vektorfunktionen for at bestemme dobbeltpunktets koordinater.

Øvelse 3 **Dobbeltpunkter for Den roterende kaffekop**

Vi kigger igen på Den roterende kaffekop, men denne gang med $a = 3$. Vi har derfor følgende vektorfunktion:

$$\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} 10 \cdot \cos(t) + 5 \cdot \cos(-3 \cdot t) \\ 10 \cdot \sin(t) + 5 \cdot \sin(-3 \cdot t) \end{pmatrix}, \text{ hvor } t \in [0; 2\pi],$$

og den tilhørende banekurve, som er symmetrisk omkring begge akser:



Det bemærkes, at der er fire dobbeltpunkter, og det oplyses, at det ene har t-værdien $t = \frac{\pi}{3}$.

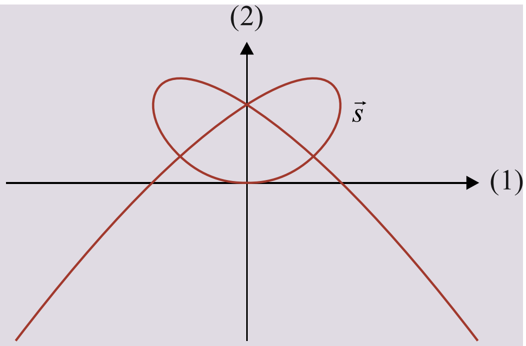
a) Bestem hvilket af dobbeltpunkterne, der er tale om.

b) Bestem den anden t-værdi for dobbeltpunktet.

c) Bestem ved symmetribetragtninger ud fra parameterkurven de tre øvrige dobbeltpunkter.

Opgave 4 En vektorfunktion $\vec{s}$ er givet ved

$$\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} t^3 - 3t \\ -t^4 + 4t^2 \end{pmatrix}, \quad t \in [-2{,}5; 2{,}5].$$



Parameterkurven for $\vec{s}$ har tre dobbeltpunkter. Det oplyses, at et af dobbeltpunkterne har t-værdien

$$t = \frac{1}{2} \cdot \left(\sqrt{6} + \sqrt{2}\right).$$

a) Bestem koordinatsættet til dette dobbeltpunkt.

Det oplyses, at der er et dobbeltpunkt i $P(-\sqrt{2}, 1)$.

b) Bestem t-værdierne hørende til dette dobbeltpunkt.

Det oplyses, at det sidste dobbeltpunkt ligger på andenaksen.

c) Bestem t-værdierne hørende til dette dobbeltpunkt.

Differentiabilitet

Teorien om differentiabilitet for vektorfunktioner bygger på teorien om differentiabilitet for almindelige funktioner. For vektorfunktioner har vi følgende definition.

Definition 3 **Differentiabilitet**

En vektorfunktion $\vec{s}$ kaldes differentiabel i t_0, hvis koordinatfunktionerne begge er differentiable i t_0. Differentialkvotienten defineres i så fald som:

$$\vec{s}'(t_0) = \begin{pmatrix} x'(t_0) \\ y'(t_0) \end{pmatrix}.$$

Hvis $\vec{s}$ er differentiabel for alle t_0, kaldes $\vec{s}$ differentiabel, og $\vec{s}\,'$ kaldes den afledede funktion.

Eksempel 5 **Bestemmelse af differentialkvotient**

En vektorfunktion $\vec{s}$ er givet ved

$$\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} -t^3 + 3t + 5 \\ t \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Differentialkvotienten for $\vec{s}$ bestemmes ved at differentiere koordinatfunktionerne hver for sig:

$$x(t) = -t^3 + 3t + 5$$

$$x'(t) = -3t^2 + 3$$

$$y(t) = t$$

$$y'(t) = 1.$$

Differentialkvotienten for $\vec{s}$ er dermed

$$\vec{s}'(t) = \begin{pmatrix} -3t^2 + 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Øvelse 4 Undersøg, hvordan man bestemmer differentialkvotienter for vektorfunktioner. Benyt eventuelt vejledningen i bilaget hørende til dit matematiske værktøjsprogram.

Opgave 5 Bestem differentialkvotienten for vektorfunktionen

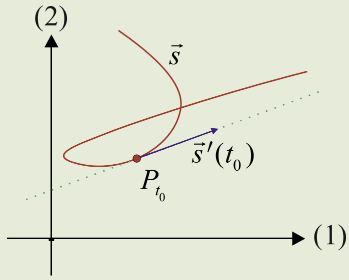
$$\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^t \cdot \cos(t) \\ \mathrm{e}^t \cdot \sin(t) \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Tangenter

Definition 4 **Tangentvektor og tangent**

Hvis $\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ er differentiabel i t_0 og $\vec{s}'(t_0) \neq \vec{0}$, så kaldes $\vec{s}'(t_0)$ for *tangentvektoren* til parameterkurven for $\vec{s}$ i punktet $P_{t_0}(x(t_0), y(t_0))$.

Linjen gennem punktet $P_{t_0}(x(t_0), y(t_0))$ med tangentvektoren $\vec{s}'(t_0) = \begin{pmatrix} x'(t_0) \\ y'(t_0) \end{pmatrix}$ som retningsvektor kaldes for parameterkurvens *tangent* i P_{t_0}.



Eksempel 6 I eksempel 5 fandt vi frem til, at differentialkvotienten for vektorfunktionen

$$\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} -t^3 + 3t + 5 \\ t \end{pmatrix} \quad \text{er} \quad \vec{s}'(t) = \begin{pmatrix} -3t^2 + 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Vi bestemmer nu tangenten til parameterkurven for $\vec{s}$ i $t_0 = 2$ ved først at bestemme røringspunktet P_2:

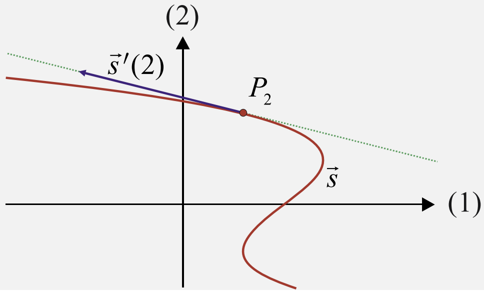
$$\vec{s}(2) = \begin{pmatrix} -2^3 + 3 \cdot 2 + 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Herefter bestemmes tangentvektoren i $t_0 = 2$:

$$\vec{s}'(2) = \begin{pmatrix} -3 \cdot 2^2 + 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Parameterfremstillingen for tangenten til parameterkurven for $\vec{s}$ i P_2 er derfor:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -9 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$



Når parameterkurven for $\vec{s}$ tegnes sammen med tangentvektoren i $t_0 = 2$, kan man ved at se på tangentvektorens retning bestemme den retning, som parameterkurven gennemløbes i.

Opgave 6 Se igen på vektorfunktionen fra opgave 4.

$$\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} t^3 - 3t \\ -t^4 + 4t^2 \end{pmatrix}, \quad t \in [-2{,}5; 2{,}5].$$

a) Bestem en parameterfremstilling for tangenten til parameterkurven for $\vec{s}$ i punktet P_{-1}.

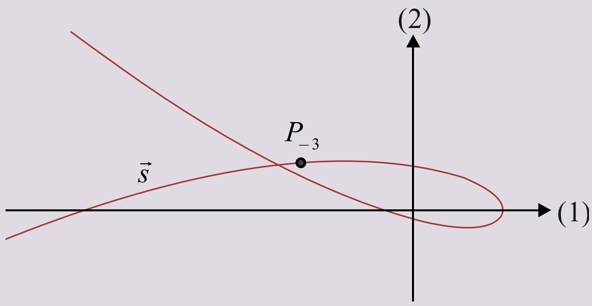
b) Tegn parameterkurven for $\vec{s}$ i intervallet $t \in [-2{,}5; 2{,}5]$ sammen med tangenten i P_{-1}. b) Dette kan være lidt teknisk. Spørg gerne, hvis du ikke lige ved,

Opgave 7 Bestem en parameterfremstilling for tangenten til parameterkurven for vektorfunktionen $\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} 2t^3 - 4t^2 \\ 2t^2 - 2t \end{pmatrix}$ i punktet $P(0,4)$.

Opgave 8 En vektorfunktion $\vec{s}$ er givet ved

$$\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} -t^2 + 4 \\ 0{,}1 \cdot t^3 + 0{,}2 \cdot t^2 - t \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Nedenfor ses parameterkurven for $\vec{s}$.



a) Bestem $\vec{s}\,'(t)$.

b) Bestem tangentvektoren i punktet P_{-3}.

c) Benyt den fundne tangentvektor til at afgøre parameterkurvens retning.

Eksempel 7 **Lodrette og vandrette tangenter**

En vektorfunktion $\vec{s}$ er givet ved

$$\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} 10t \cdot \mathrm{e}^t \\ -t^2 + 10 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Differentialkvotienten bestemmes til $\vec{s}\,'(t) = \begin{pmatrix} 10t \cdot \mathrm{e}^t + 10 \cdot \mathrm{e}^t \\ -2t \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$

En lodret linje er parallel med vektoren $\vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. For at undersøge om parameterkurven har en lodret tangent, skal vi derfor løse ligningen $x'(t) = 0$:

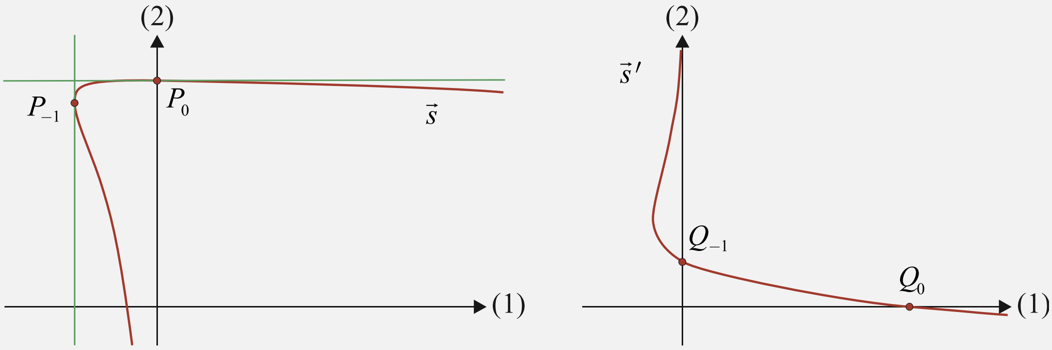
$$10t \cdot \mathrm{e}^t + 10 \cdot \mathrm{e}^t = 0.$$

I dette tilfælde får vi netop én løsning, nemlig $t = -1$. Da vi samtidig har, at $y'(-1) = -2 \neq 0$, og dermed at $\vec{s}\,'(-1)$ ikke er nulvektoren, så har parameterkurven for $\vec{s}$ en lodret tangent for $t = -1$.

Røringspunktet bestemmes ved: $\vec{s}(-1) = \begin{pmatrix} -10 \cdot \mathrm{e}^{-1} \\ 9 \end{pmatrix}$, dvs. der er en lodret tangent i punktet $P_{-1}(-10 \cdot \mathrm{e}^{-1}, 9)$.

En vandret linje er parallel med vektoren $\vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. En vandret tangent kan derfor bestemmes ved at løse $y'(t) = 0$. Vi får i dette tilfælde løsningen $t = 0$, og da $x'(0) \neq 0$ får vi en vandret tangent i $t = 0$. Røringspunktet bestemmes til $P_0(0,10)$.

På figuren herunder ses til venstre parameterkurven for $\vec{s}$ sammen med den lodrette tangent i P_{-1} samt den vandrette tangent i P_0. Til højre ses parameterkurven for $\vec{s}\,'$.



Ovenfor bestemte vi eventuelle lodrette tangenter ved at løse ligningen $x'(t) = 0$. Grafisk svarer dette til, at t-værdien i det punkt, Q_{-1}, hvor parameterkurven for $\vec{s}\,'$ skærer andenaksen, vil give anledning til en lodret tangent til parameterkurven for $\vec{s}$.

På samme måde kan sammenhængen mellem Q_0 og den vandrette tangent til parameterkurven for $\vec{s}$ i P_0 fortolkes.

Opgave 9 En vektorfunktion $\vec{s}$ er givet ved

$$\vec{s}(t)=\begin{pmatrix} -t^2+4 \\ 0{,}1\cdot t^3+0{,}2\cdot t^2-t \end{pmatrix},\quad t\in\mathbb{R}.$$

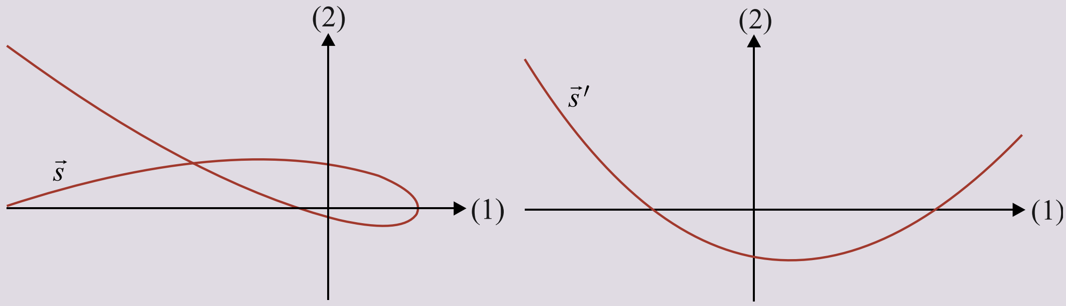
a) Tegn parameterkurven for $\vec{s}$.

b) Bestem koordinatsættene til røringspunkterne for eventuelle lodrette og vandrette tangenter til parameterkurven for $\vec{s}$.

Opgave 10 Se igen på vektorfunktionen $\vec{s}$ givet ved

$$\vec{s}(t)=\begin{pmatrix} -t^2+4 \\ 0{,}1\cdot t^3+0{,}2\cdot t^2-t \end{pmatrix}.$$

Nedenfor ses parameterkurven for $\vec{s}$ til venstre og parameterkurven for $\vec{s}\,'$ til højre.



a) Bestem t-værdierne for de punkter, hvor parameterkurven for $\vec{s}\,'$ skærer en af akserne.

b) Bestem de punkter på parameterkurven for $\vec{s}$, der hører til de fundne t-værdier.

c) Hvilken betydning har det for parameterkurven for $\vec{s}$, når parameterkurven for $\vec{s}\,'$ skærer akserne?

!! Hop om på aller sidste s.28-31 i dokumentet. Læs og lav opgaverne i afsnittene 'Tangenter' og 'Vinkel

Hastighed og acceleration

Definition 5 **Hastighed og acceleration**

Lad $\vec{s}(t)=\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ være en differentiabel vektorfunktion.

Den afledede funktion $\vec{s}\,'(t)$ kaldes også for *hastighedsvektoren* og betegnes $\vec{v}(t)$.

Længden af hastighedsvektoren $|\vec{v}(t)|$ kaldes for *farten*.

Den dobbelt afledede $\vec{s}\,''(t)$ kaldes *accelerationsvektoren* og betegnes $\vec{a}(t)$.

Opgave 11 **Kasteparabel**

Parameterkurven for $\vec{s}$ beskriver banekurven for et kuglestød

$$\vec{s}(t)=\begin{pmatrix} 11,2\cdot t \\ -4,91\cdot t^2+8,43\cdot t+1,7 \end{pmatrix},\quad t\geq 0.$$

a) Bestem hastighedsvektoren $\vec{v}$ for $\vec{s}$.

b) Bestem hastighedsvektoren $\vec{v}$ til tidspunktet $t = 0$.

c) Bestem ved hjælp af $\vec{v}(t)$ den vinkel med vandret, som tangenten til banekurven for kuglen har til tidspunktet $t=0$.

d) Bestem accelerationsvektoren $\vec{a}$ for $\vec{s}$.

Opgave 12 Forlystelsen Den roterende kaffekop følger en kurve, der kan beskrives ved nedenstående vektorfunktion. Denne gang med $a=1,5$.

$$\vec{s}(t)=\begin{pmatrix} 10\cdot\cos(t)+5\cdot\cos(-1,5\cdot t) \\ 10\cdot\sin(t)+5\cdot\sin(-1,5\cdot t) \end{pmatrix},\quad t\in[0,4\pi].$$

a) Tegn banekurven for $\vec{s}$.

b) Bestem farten som funktion af tidspunktet t.

c) Bestem koordinatsættene for de punkter, hvor farten er henholdsvis størst og mindst i intervallet $t\in[0;\pi[$.

d) Bestem accelerationsvektoren i hvert af punkterne bestemt i c), og tegn disse sammen med banekurven for $\vec{s}$. Giv en fortolkning.

Øvelse 5 En vektorfunktion $\vec{s}$ er givet ved

$$\vec{s}(t)=\begin{pmatrix} (k\cdot t)^2+2 \\ k\cdot t \end{pmatrix},$$

hvor k er enten -1 eller 1.

a) Tegn parameterkurven for $\vec{s}$, når $k=-1$, og når $k=1$.

b) Benyt $\vec{v}$ til at undersøge, hvilken betydning fortegnet for k har for den retning parameterkurven gennemløbes i.

!! Hop om på s.32-33 i dokumentet. Læs og lav opgaverne i afsnittet ‘Elimination af parameter’.

Længde og areal

Sætning 1 **Længden af et stykke af en parameterkurve**

Lad $\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ være en differentiabel vektorfunktion med kontinuert afledet vektorfunktion.

Længden af parameterkurven i intervallet $a \leq t \leq b$ kan beregnes ved:

$$L = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\ dt\ .$$

Vi beviser ikke sætningen her. Der er faktisk et fordybelsesafsnit i MAT A3, hvor man ser på dette bevis,

Eksempel 8 Med sætning 1 kan vi beregne længden af den kurve, som Den roterende kaffekop følger. Vektorfunktionen $\vec{s}$ har følgende forskrift:

$$\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} 10 \cdot \cos(t) + 5 \cdot \cos(-a \cdot t) \\ 10 \cdot \sin(t) + 5 \cdot \sin(-a \cdot t) \end{pmatrix},\quad t \in \mathbb{R}.$$

Vi har tidligere beregnet, at når $a = 2,$ så når kaffekoppen en tur rundt på den store skive i et tidsrum på 2π. Vi vil nu undersøge længden L af en rundtur, hvor $a = 2$.

Først bestemmes $x'(t)$ og $y'(t)$:

$$x'(t) = -10 \cdot \sin(t) + 10 \cdot \sin(-2t)$$

$$y'(t) = 10 \cdot \cos(t) - 10 \cdot \cos(-2t)$$

Så bestemmes længden:

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{(-10 \cdot \sin(t) + 10 \cdot \sin(-2t))^2 + (10 \cdot \cos(t) - 10 \cdot \cos(-2t))^2}\, dt = 80.$$

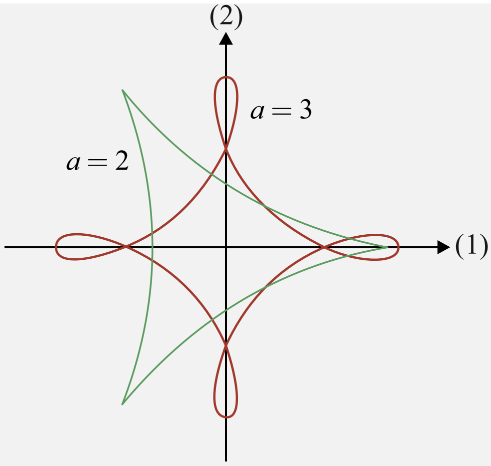
Rundturen er altså 80 meter lang.

Når $a = 3$, er tiden for en rundtur også 2π. Længden af en rundtur bestemmes til:

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{(-10 \cdot \sin(t) + 15 \cdot \sin(-3t))^2 + (10 \cdot \cos(t) - 15 \cdot \cos(-3t))^2}\, dt = 105{,}1.$$

Rundturen er altså 105,1 meter lang.

En sammenligning af de to banekurvers udseende bekræfter, at for $a = 3$ vil længden af banekurven for et omløb være længere end for $a = 2$.



Det tager således 2π sekunder eller ca. 6,28 sekunder at gennemkøre en omgang både når $a=2$ og når $a=3$. Dermed kan vi bestemme *gennemsnitsfarten* i hvert af de to tilfælde:

$a=2$: gennemsnitsfart $=\dfrac{80\text{ m}}{6{,}28\text{ s}}=12{,}7$ m/s , der svarer til $45{,}8$ km/t .

$a=3$: gennemsnitsfart $=\dfrac{105{,}05\text{ m}}{6{,}28\text{ s}}=16{,}7$ m/s , der svarer til $60{,}2$ km/t.

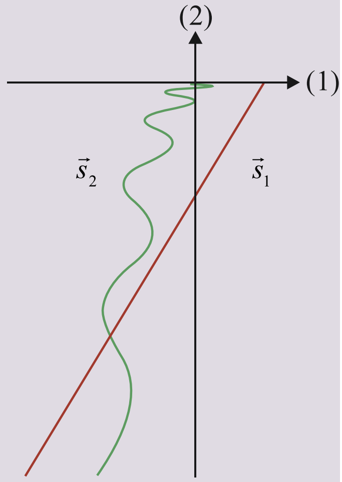
Den største fart for eksemplet med $a=3$ indtræffer blandt andet ved $t=\dfrac{\pi}{4}$, hvor hastighedsvektoren er $\vec{v}\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\begin{pmatrix}-17{,}68\\ 17{,}68\end{pmatrix}$.

På det tidspunkt er farten således $\left|\vec{v}\left(\dfrac{\pi}{4}\right)\right|=\sqrt{(-17{,}68)^2+17{,}68^2}=25{,}0$, dvs. 25 m/s, hvilket svarer til 90 km/t.

Opgave 13 To skiløbere løber ned ad et bjerg. Figuren viser de kurver, som de to skiløbere hver især følger ned ad bjerget. I en model er de to kurver en del af de banekurver, der kan beskrives ved vektorfunktionerne $\vec{s}_1$ og $\vec{s}_2$.

$$\vec{s}_1(t)=\begin{pmatrix}-0{,}4t+3{,}5\\ -10t\end{pmatrix},\quad t\geq 0$$

$$\vec{s}_2(t)=\begin{pmatrix}\cos(3t)-0{,}5\cdot t+2\\ -0{,}01\cdot t^4\end{pmatrix},\quad t\geq 0.$$



Pisten stopper 300 m nede ad bjerget, dvs. når $y(t)=-300$.

a) Hvem af skiløberne kommer hurtigst i mål?

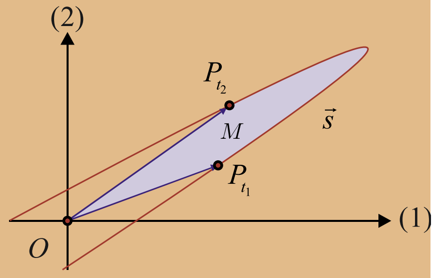
b) Bestem længden af hver af de to skiløberes rute.

c) Bestem hver af de to skiløberes gennemsnitsfart.

Sætning 2 **Areal af et område afgrænset af en parameterkurve**

Hvis stedvektoren $\overrightarrow{OP_t} = \vec{s}(t)$ for en parameterkurve overstryger et område i positiv omløbsretning, når parameterværdien løber fra t_1 til t_2, så kan arealet A af det overstrøgne område M bestemmes ud fra formlen:

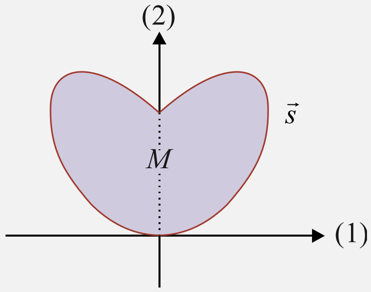
$$A = \frac{1}{2} \cdot \int_{t_1}^{t_2} \vec{s}\,'(t) \cdot \hat{\vec{s}}(t)\, dt$$



Bemærk, at integranden i formlen for arealet er skalarproduktet af de to vektorfunktioner $\vec{s}\,'$ og $\hat{\vec{s}}$. Vi beviser ikke sætningen her.

Eksempel 9 Vi har i opgave 4 set på parameterkurven for $\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} t^3 - 3t \\ -t^4 + 4t^2 \end{pmatrix}$, hvor vi fandt dobbeltpunktet $(0,3)$ hørende til *t*-værdierne $t = -\sqrt{3}$ og $t = \sqrt{3}$.

Når vi tegner parameterkurven i intervallet $t \in \left[-\sqrt{3}; \sqrt{3}\right]$ fås et lukket område *M*, som vi gerne vil bestemme arealet af.



For at bestemme arealet *A* af dette område bestemmes først den afledede funktion:

$$\vec{s}\,'(t) = \begin{pmatrix} 3t^2 - 3 \\ -4t^3 + 8t \end{pmatrix} \text{ og } \hat{\vec{s}}(t) = \begin{pmatrix} -(-t^4 + 4t^2) \\ t^3 - 3t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^4 - 4t^2 \\ t^3 - 3t \end{pmatrix}.$$

Vi indsætter nu i formlen fra sætning 2:

$$\frac{1}{2} \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \vec{s}\,'(t) \cdot \hat{\vec{s}}(t)\, dt = \frac{1}{2} \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 3t^2 - 3 \\ -4t^3 + 8t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} t^4 - 4t^2 \\ t^3 - 3t \end{pmatrix} dt =$$

$$\frac{1}{2} \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \left(\left(3t^2 - 3\right) \cdot \left(t^4 - 4t^2\right) + \left(-4t^3 + 8t\right) \cdot \left(t^3 - 3t\right) \right) dt = -\frac{48\sqrt{3}}{7}$$

Bemærk, at resultatet er et negativt tal, hvilket skyldes, at stedvektoren $\vec{s}(t)$ overstryger arealet i negativ omløbsretning, og vi skal derfor enten vende parameterkurvens retning (ved en substitution $s = -t$) eller lade *t* løbe fra $\sqrt{3}$ til $-\sqrt{3}$ for at få det korrekte positive resultat

$$A = \frac{1}{2} \int_{\sqrt{3}}^{-\sqrt{3}} \vec{s}\,'(t) \cdot \hat{\vec{s}}(t)\, dt = \frac{48\sqrt{3}}{7}.$$

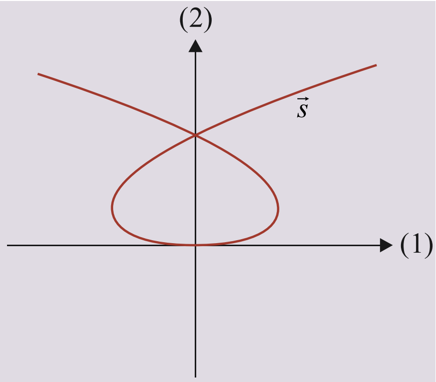
Øvelse 6 En cirkel med radius r og centrum i (x_0, y_0) er givet ved vektorfunktionen

$$\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} x_0 + r\cdot\cos(t) \\ y_0 + r\cdot\sin(t) \end{pmatrix}, \quad t \in [0;2\pi].$$

a) Benyt formlen fra sætning 2 til at vise, at cirklens areal er givet ved $\pi \cdot r^2$.

Opgave 14 En vektorfunktion $\vec{s}$ er bestemt ved

$$\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} -t^3 + 3t \\ t^2 \end{pmatrix}.$$



Når parameterværdien t gennemløber intervallet fra $-k$ til k, så overstryges et område M.

a) Bestem $\vec{s}(0)$ og $\vec{s}'(0)$, og benyt dette til at argumentere for, at parameterkurven gennemløbes i positiv omløbsretning, når t løber fra $-k$ til k.

b) Bestem arealet af M, når $k = 1$.

c) Bestem k, så arealet af M er 6.

Krumning for en parameterkurve

Vi indfører nu et mål for, hvor meget en parameterkurve krummer, dvs. hvor meget kurven afviger fra tangenten i et givet punkt på parameterkurven.

Definition 6 **Krumning for en parameterkurve**

For vektorfunktionen $\vec{s}$ betegner $\kappa(t)$ krumningen som funktion af t i et punkt P_t på parameterkurven for $\vec{s}$. Krumningen er givet ved

$$\kappa(t) = \frac{\vec{a}(t)\cdot\hat{\vec{v}}(t)}{|\vec{v}(t)|^3},$$

hvor $\vec{v} \neq \vec{0}$ og $\vec{a}$ er henholdsvis hastigheds- og accelerationsvektoren for $\vec{s}$.

Sætning 3 **Krumning for en parameterkurve**

Krumningen $\kappa(t)$ i punktet P_t på parameterkurven for vektorfunktionen $\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$

kan bestemmes ved

$$\kappa(t) = \frac{x'(t)\cdot y''(t) - y'(t)\cdot x''(t)}{\left(x'(t)^2 + y'(t)^2\right)^{3/2}}.$$

Øvelse 7 **Bevis for sætning 3**

For at vise, at krumningen kan bestemmes ved $\kappa(t)=\dfrac{x'(t)\cdot y''(t)-y'(t)\cdot x''(t)}{\left(x'(t)^2+y'(t)^2\right)^{3/2}}$, benyttes koordinatfunktionerne for accelerationsvektoren og hastighedensvektoren.

a) Opskriv koordinatfunktionerne for $\vec{a}(t)$.

b) Opskriv koordinatfunktionerne for $\vec{v}(t)$ og $\hat{\vec{v}}(t)$.

c) Bestem tælleren ved at udregne skalarproduktet $\vec{a}(t)\cdot\hat{\vec{v}}(t)$.

d) Bestem nævneren ved at udregne $\left|\vec{v}(t)\right|^3$.

Eksempel 10 En vektorfunktion $\vec{s}$ er givet ved

$$\vec{s}(t)=\begin{pmatrix}-t^3+3t\\ t^2\end{pmatrix},\quad t\in\mathbb{R}.$$

For at kunne bestemme krumningen som funktion af *t*, skal vi først bestemme følgende:

$$x'(t)=-3t^2+3$$

$$x''(t)=-6t$$

$$y'(t)=2t$$

$$y''(t)=2$$

Vi indsætter nu udtrykkene i formlen for krumningen:

$$\kappa(t)=\frac{(-3t^2+3)\cdot 2-2t\cdot(-6t)}{\left((-3t^2+3)^2+(2t)^2\right)^{3/2}}=\frac{6t^2+6}{(9t^4-14t^2+9)^{3/2}}.$$

Vi kan nu f.eks. bestemme krumningen i punktet $P_0(0,0)$ ved blot at indsætte $t=0$ i udtrykket

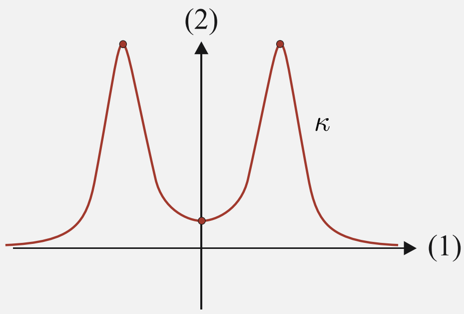
$$\kappa(0)=\frac{6\cdot 0^2+6}{(9\cdot 0^4-14\cdot 0^2+9)^{3/2}}=\frac{6}{9^{3/2}}=\frac{2}{9}.$$

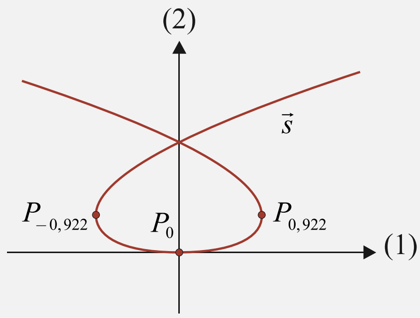
Krumningen til tidspunktet $t=0$ er altså $\dfrac{2}{9}$.

De *t*-værdier, der giver den mindste/største krumning findes ved at løse ligningen $\kappa'(t)=0$.

Ligningen har de 3 løsninger $t=-0{,}922$, $t=0$ og $t=0{,}922$, der svarer til punkterne $(-1.98,\ 0.85)$, $(0,0)$ og $(1.98, 0.85)$.

Ud fra grafen for κ og parameterkurven for $\vec{s}$ kan vi konstatere, at krumningen er maksimal i punkterne $(-1.98,\ 0.85)$ og $(1.98,\ 0.85)$, og krumningen er minimal i $(0,0)$.





Øvelse 8 En cirkel med radius r og centrum i (x_0, y_0) er givet ved vektorfunktionen

$$\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} x_0 + r \cdot \cos(t) \\ y_0 + r \cdot \sin(t) \end{pmatrix}, \quad t \in [0\,;2\pi].$$

a) Vis, at cirkler altid har en krumning på $\frac{1}{r}$.

Opgave 15 Vi ser igen på banekurven for Den roterende kaffekop. Når $a = 0,5$, så har vi følgende vektorfunktion:

$$\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} 10 \cdot \cos(t) + 5 \cdot \cos(-0,5 \cdot t) \\ 10 \cdot \sin(t) + 5 \cdot \sin(-0,5 \cdot t) \end{pmatrix}, \quad t \in [0;4\pi].$$

a) Tegn banekurven for $\vec{s}$.

b) Bestem $\kappa(t)$.

c) Bestem $\kappa(3)$.

d) Bestem koordinatsættet til det punkt på banekurven, hvor krumningen er mindst i intervallet $t \in]0;\pi[$.

Bilag 1: Maple

Tegning af parameterkurver

En vektorfunktion $\vec{s}$ er givet ved

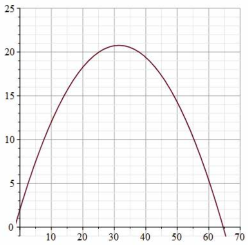
$$\vec{s}(t)=\begin{pmatrix}x(t)\\y(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}16{,}1\cdot t\\-4{,}91\cdot t^2+19{,}2\cdot t+2\end{pmatrix}.$$

Vektorfunktioner defineres som vektorer eller koordinatfunktioner. Nedenfor benyttes koordinatfunktioner:

$$x(t) := 16.1\,t = t\rightarrow 16.1\,t$$
$$y(t) := -4.91\,t^2 + 19.2\,t + 2 = t\rightarrow (-1)\cdot 4.91\,t^2 + 19.2\,t + 2$$

Kommandoen *plot* kan bruges til at tegne parameterkurven på følgende måde:

$$plot([x(t), y(t), t=-10..10], view=[-1..70,-1..25], gridlines)$$



Differentiation af vektorfunktioner

$$\langle x'(t), y'(t)\rangle = \begin{bmatrix}16.1\\-9.82\,t+19.2\end{bmatrix}$$

I et konkret punkt

$$\langle x'(1), y'(1)\rangle = \begin{bmatrix}16.1\\9.38\end{bmatrix}$$

Animation:

Pakken *plots* skal indlæses for at kunne foretage animation. Start derfor med

$$with(plots)$$

Grafen for banekurven i intervallet $0\le t\le 5$ gemmes i variablen *plot1* med nedenstående kommando, hvis vektorfunktionens koordinater allerede er gemt i $x(t)$ og $y(t)$:

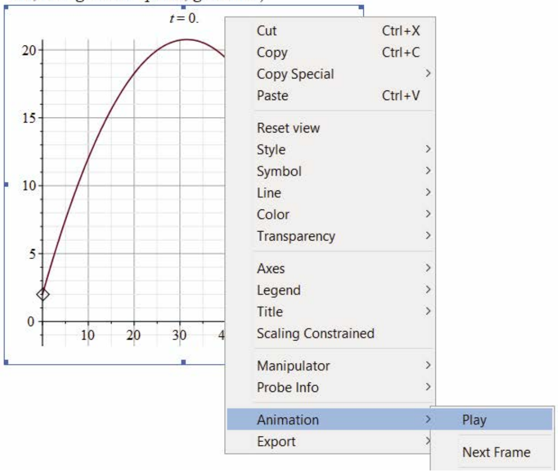
$$plot1 := plot([op([x(t), y(t)]), t=0..5])$$

Animationen klargøres med kommandoen

$$animate(pointplot, [[x(t), y(t)]], t=0..5, symbolsize=30, background=plot1)$$

Selve animationen fremkommer ved at højreklikke på figuren og så vælge menupunktet *Animation*:

```
with(plots) :
plot1 := plot([op([x(t), y(t)]), t = 0 ..4.1]) :
animate(pointplot, [[x(t), y(t)]], t = 0 ..4.1, symbolsize = 30, background = plot1, gridlines)
```



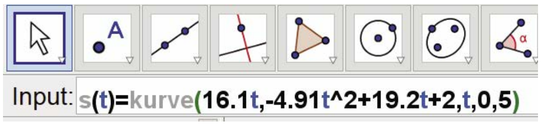
Bilag 2: Geogebra

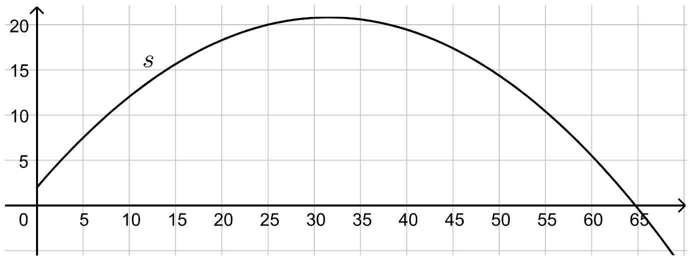
Tegning af parameterkurver

En vektorfunktion $\vec{s}$ er givet ved

$$\vec{s}(t)=\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 16{,}1\cdot t \\ -4{,}91\cdot t^2+19{,}2\cdot t+2 \end{pmatrix},\quad 0\le t\le 5.$$

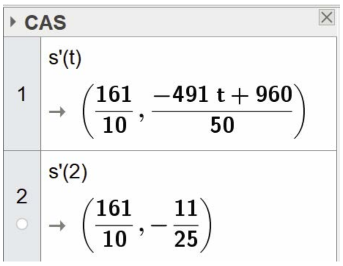
Vektorfunktioner defineres med kommandoen *kurve*:





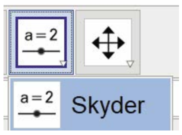
Differentiation af vektorfunktioner

Skriv $\vec{s}\,'(t)$ i inputfeltet eller i CAS-vinduet.



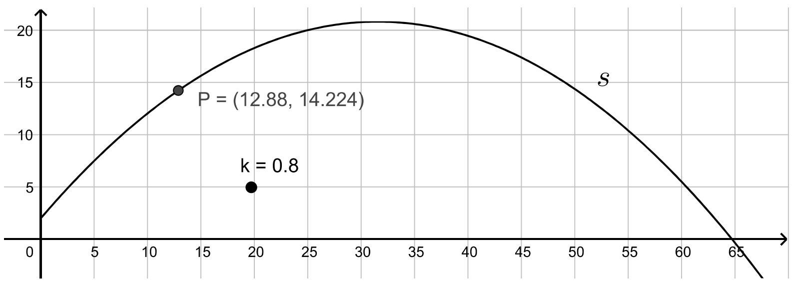
Animation

Opret skyder k med skyder-ikonet vist til højre og lad skyderens værdier løbe fra 0 til 5.



Definér punktet P i inputfeltet ved at skrive $P=s(k)$.

P vil nu være punktet på banekurven for $\vec{s}$, hvor $t=k$.



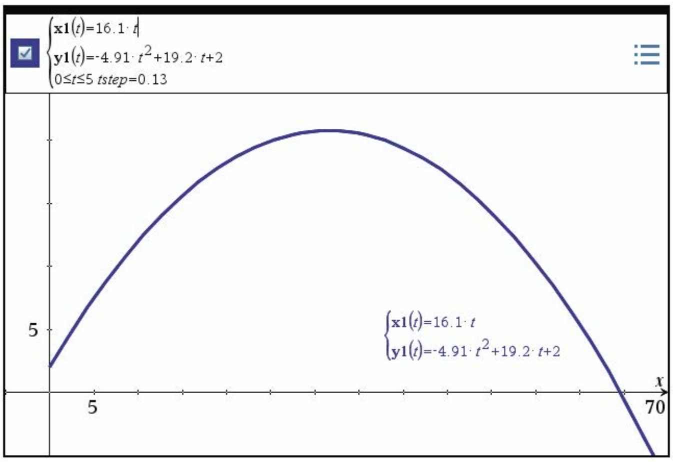
Bilag 3: TI Nspire

Tegning af parameterkurver

En vektorfunktion $\vec{s}$ er givet ved

$$\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16{,}1 \cdot t \\ -4{,}91 \cdot t^2 + 19{,}2 \cdot t + 2 \end{pmatrix}.$$

Vælg ”Grafer”, ”Grafindtastning/Rediger” og herefter ”Parameterfremstilling”. Parameteren t er forudindstillet til at løbe fra 0 til 2π, men dette kan ændres frit. Herunder er t valgt til at løbe fra 0 til 5.



Vinduet indstilles på sædvanlig vis.

Differentiation af vektorfunktioner

$$\mathbf{s}(t) := \begin{bmatrix} 16.1 \cdot t \\ -4.91 \cdot t^2 + 19.2 \cdot t + 2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{v}(t) := \frac{d}{dt}(\mathbf{s}(t)) \quad \blacktriangleright \ \textit{Udført}$$

$$\mathbf{v}(t) \quad \blacktriangleright \begin{bmatrix} 16.1 \\ 19.2 - 9.82 \cdot t \end{bmatrix}$$

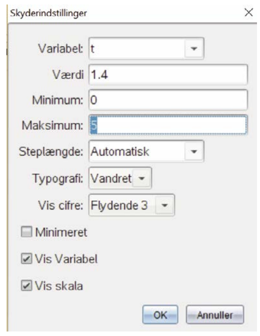
Animation

Tegn først parameterkurven i vinduet ”Grafer”. Opret en liste i ”Noter” med henholdsvis første- og andenkoordinaterne til hvert af punkterne på banekurven:

$$\mathbf{x} := \{\mathbf{x1}(t)\} \quad \blacktriangleright \ \{16.1 \cdot t\}$$

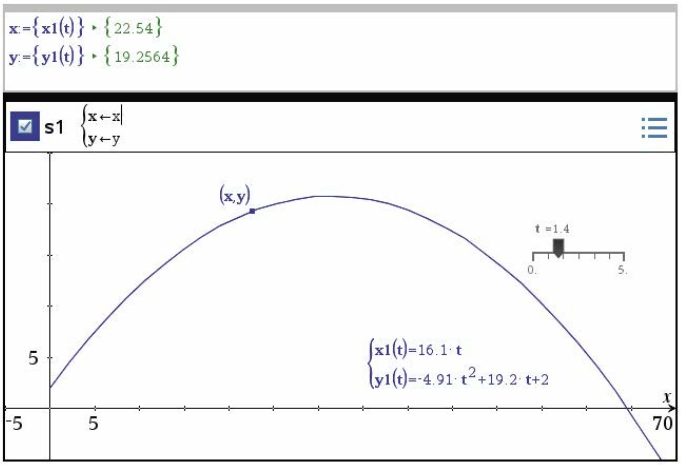
$$\mathbf{y} := \{\mathbf{y1}(t)\} \quad \blacktriangleright \ \{-4.91 \cdot t^2 + 19.2 \cdot t + 2\}$$

Tegn et punktplot oven i banekurven. Vælg ”Grafer”, ”Grafindtastning/Rediger” og herefter ”Punktplot”. Vælg listen x som førstekoordinat, og listen y som andenkoordinat.



Opret en skyder for t, og lad skyderens værdier løbe fra 0 til 5.

Punktet, der nu fremkommer på banekurven, afhænger af skyderens t-værdi. Det tilsvarende koordinatsæt fremgår af de to lister x og y i ”Noter”.



Tangenter

Eksempel 11 Betragt følgende vektorfunktion med tilhørende afledede vektorfunktion:

$$\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} -t^3 + 3t + 5 \\ t \end{pmatrix} \quad \text{er} \quad \vec{s}'(t) = \begin{pmatrix} -3t^2 + 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Vi vil bestemmer ligningen for tangenten til parameterkurven for $\vec{s}$ i punktet, hvor $t = 2$ ved først at bestemme røringspunktet P_2 :

$$\vec{s}(2) = \begin{pmatrix} -2^3 + 3 \cdot 2 + 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Røringspunktet er derfor $P_2 = (3, 2)$.

Tangentvektoren i P_2 bestemmes :

$$\vec{s}'(2) = \begin{pmatrix} -3 \cdot 2^2 + 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Formlen for en ligning for en linje givet ved en normalvektor og et punkt ved vi fra 2g er på formen:

$$a \cdot (x - x_0) + b \cdot (y - y_0) = 0\,,$$

hvor $\vec{n} = \binom{a}{b}$ er normalvektor til linjen og $P_0(x_0, y_0)$ er et punkt på linjen.

Vi har et punkt på linjen, så for at bestemme tangentligningen har vi brug for en normalvektor. Tangentvektoren $\vec{s}'(2) = \binom{-9}{1}$ er en retningsvektor, men denne kan vi lave tværvektoren til, så har vi en normalvektor:

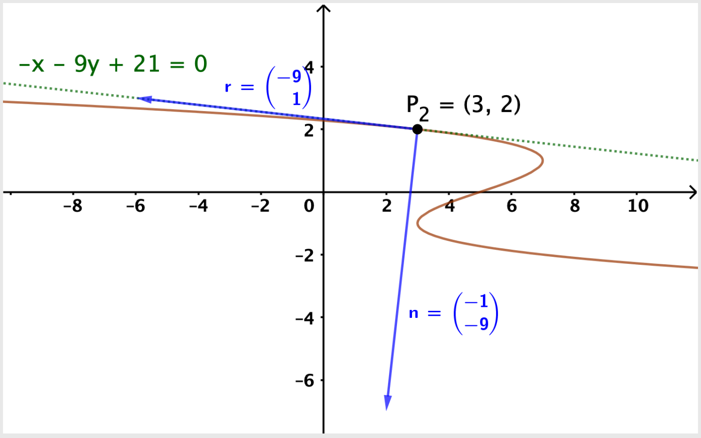
$$\vec{n} = \widehat{\vec{s}'(2)} = \begin{pmatrix} -1 \\ -9 \end{pmatrix}$$

En ligning for tangent i P_2 bliver derfor:

$$-1 \cdot (x - 3) - 9 \cdot (y - 2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -x + 3 - 9y + 18 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad -x - 9y + 21 = 0$$

Illustreret her :



Opgave 16 Betragt vektorfunktionen

$$\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} t^3 - 3t \\ -t^4 + 4t^2 \end{pmatrix}, \qquad -2{,}5 \leq t \leq 2{,}5.$$

a) Bestem ligningen for tangenten til banekurven for $\vec{s}$ i punktet P_{-2}, altså hvor $t = -2$.

b) Tegn banekurven for $\vec{s}$ i intervallet $-2{,}5 \leq t \leq 2{,}5$ sammen med tangenten i P_{-2}.

Opgave 17 Betragt vektorfunktionen

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} -t^2 + 4 \\ 0{,}1 \cdot t^3 + 0{,}2 \cdot t^2 - t \end{pmatrix}, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

a) Bestem ligningen for tangenten til banekurven for $\vec{r}$ i punktet, hvor $t = 1$.

Vinkel mellem to tangenter

Vi skal se på, hvordan man bestemmer den spidse vinkel mellem to tangenter til banekurven i et dobbeltpunkt.

Eksempel 12 Vi ser på vektorfunktionen givet ved

$$\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} t^2 - 3 \\ t^3 - 4t + 2 \end{pmatrix}, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Banekurven har et dobbeltpunkt i $P(1,2)$. I Eksempel 4 har vi set, at dobbeltpunktet svarer til parameterværdierne $t = -2$ og $t = 2$.

Vi skal bestemme den spidse vinkel mellem de to tangentlinjer i P. Dette kan vi gøre ved at finde vinklen mellem de to tangentvektorer i P, nemlig $\vec{s}\,'(-2)$ og $\vec{s}\,'(2)$.

Først bestemmes den afledede funktion:

$$\vec{s}\,'(t) = \begin{pmatrix} 2t \\ 3t^2 - 4 \end{pmatrix}$$

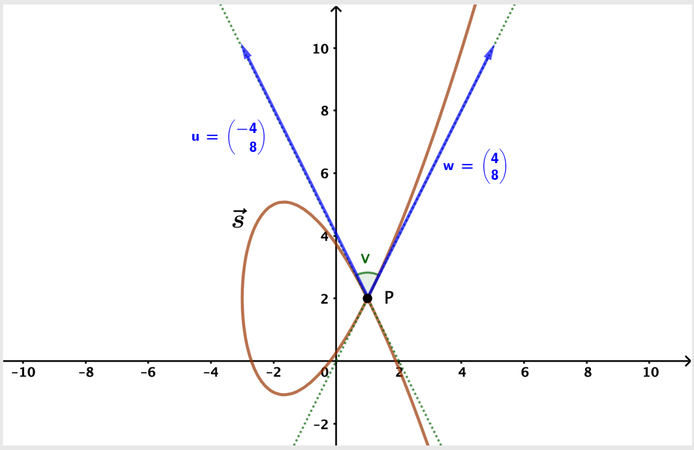
Tangentvektoren til $t = -2$, vi kalder den $\vec{u}$:

$$\vec{u} = \vec{s}\,'(-2) = \begin{pmatrix} 2 \cdot (-2) \\ 3 \cdot (-2)^2 - 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Tangentvektoren til $t = 2$, vi kalder den $\vec{w}$:

$$\vec{w} = \vec{s}\,'(2) = \begin{pmatrix} 2 \cdot 2 \\ 3 \cdot 2^2 - 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Figuren herunder vises situationen.



Nu kan vinklen mellem vektorerne bestemmes vha. formel (52):

$$\cos(v) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

$$\cos(v) = \frac{\begin{pmatrix} -4 \\ 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix} -4 \\ 8 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} -4 \\ 8 \end{pmatrix}\right|} \quad \Leftrightarrow \quad \cos(v) = \frac{-16 + 64}{\sqrt{(-4)^2 + 8^2} \cdot \sqrt{4^2 + 8^2}}$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos(v) = \frac{48}{\sqrt{80} \cdot \sqrt{80}} \quad \Leftrightarrow \quad \cos(v) = \frac{3}{5} \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{v} = \cos^{-1}\left(\frac{3}{5}\right) = 53{,}13°$$

Vinklen mellem de to tangentlinjer er altså 53,13°.

Husk, Maple har en indbygget kommando i Gym-pakken:

$with(Gym):$

$\vec{u} := \langle -4, 8 \rangle = \begin{bmatrix} -4 \\ 8 \end{bmatrix}$

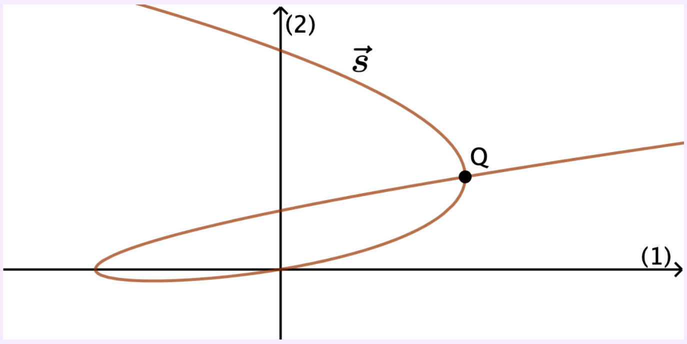
$\vec{w} := \langle 4, 8 \rangle = \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \end{bmatrix}$

$vinkel(\vec{u}, \vec{w}) = 53.13$

Opgave 18 En vektorfunktion er givet ved

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} t^3 - 12t \\ t^2 - 2t \end{pmatrix}, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

På banekurven for $\vec{r}$ er Q et dobbeltpunkt hørende til t-værdierne $t = -2$ og $t = t_0$.



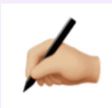
a) Bestem koordinatsættet til punktet Q.

b) Bestem t_0.

c) Bestem den spidse vinkel mellem banekurvens to tangentlinjer i Q.

Der kan stille forskellige typer opgaver inden for vektorfunktioner, hvor der trækkes på viden fra vektorregning og analytisk geometri. Dette er følgende opgave et eksempel på.

Opgave 19 I et koordinatsystem bevæger et punkt P sig således, at stedvektoren til P til tidspunktet t er givet ved



$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} t^3 - t \\ 0{,}5 \cdot t^2 - t \end{pmatrix}, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

a) Bestem hastighedsvektoren til tidspunktet $t = 0$.

Linjen m er bestemt ved ligningen

$$m: \;\; x - y = 2\,.$$

b) Bestem de to tidspunkter, hvor hastighedsvektoren er parallel med m.

Elimination af parameter

Vi taler om elimination af parameteren, når repræsentationen af en vektorfunktion $\vec{s}(t) = \binom{x(t)}{y(t)}$ omskrives til en ligning, hvor kun x og y indgår, dvs. parameteren t er elimineret/udelukket.

Eksempel 13 Betragt vektorfunktionen

$$\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-t \\ 2t+12 \end{pmatrix}.$$

Dette svarer til at vi har følgende to ligninger med tre ubekendte:

$$\begin{cases} x = 3 - t \\ y = 2t + 12 \end{cases}$$

Vi vil nu eliminere t. Vi kan gøre det ved først at isolere t i den en ligning, her er det nemmest i den første ligning:

$$x = 3 - t \quad \Leftrightarrow \quad t + x = 3 \quad \Leftrightarrow \quad t = 3 - x$$

Du kan vi indsætte $t = 3 - x$ på t's plads i ligning nummer to:

$$y = 2 \cdot (3 - x) + 12 = 6 - 2x + 12 = -2x + 18$$

Vi kan nu se, at linjen med ligningen $y = -2x + 18$ svarer til vektorfunktionen $\vec{s}(t) = \binom{3-t}{2t+12}$.

Eksempel 14 Betragt vektorfunktionen

$$\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t^2 - 3t + 5 \\ \frac{1}{2}t - 1 \end{pmatrix}.$$

Dette svarer til at vi har følgende to ligninger med tre ubekendte:

$$\begin{cases} x = 2t^2 - 3t + 5 \\ y = \frac{1}{2}t - 1 \end{cases}$$

Vi vil nu eliminere t. Vi kan gøre det ved først at isolere t i den en ligning, her er det nemmest i den nederste ligning:

$$y = \frac{1}{2}t - 1 \quad \Leftrightarrow \quad y + 1 = \frac{1}{2}t \quad \Leftrightarrow \quad 2 \cdot (y + 1) = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot t \quad \Leftrightarrow \quad 2y + 2 = t$$

Du kan vi indsætte $t = 2y + 2$ på t's plads i den første ligning:

$$x = 2 \cdot (2y + 2)^2 - 3 \cdot (2y + 2) + 5$$

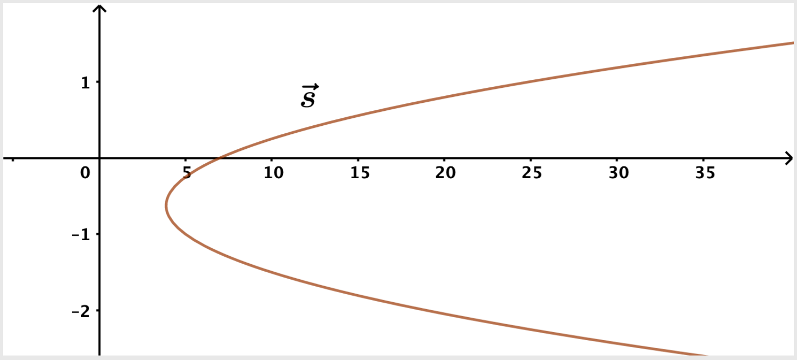
Vi kan udregne dette ved at bruge 1. kvadratsætning og reducere udtrykket. Vi får så:

$$x = 8 \cdot y^2 + 10 \cdot y + 7$$

Vi kan nu se, at vektorfunktionen $\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} 2t^2-3t+5 \\ \frac{1}{2}t-1 \end{pmatrix}$ svarer til en kurve med ligningen

$$x = 8 \cdot y^2 + 10 \cdot y + 7\,.$$

Dette ligninger en parabel, hvor x og y har byttet roller. Hvis vi tegner grafen, så kan se, at dette også præcis er det det er:



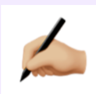
Opgave 20 Betragt vektorfunktionen

$$\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} t+2 \\ t^2+4t+3 \end{pmatrix}, \qquad t \in \mathbb{R}\,.$$

a) Gør rede for ved beregning, at banekurven for $\vec{s}$ gennemløber en parabel bestemt ved $y = x^2 - 1$.

b) Bestem ligningen for tangenten til banekurven i, hvor $t = -1$.

Opgave 21 Betragt vektorfunktionen



$$\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} t-\pi \\ 2 \cdot \sin(t) - 1 \end{pmatrix}, \qquad t \in \mathbb{R}\,.$$

a) Gør rede for ved beregning, at banekurven for $\vec{s}$ gennemløber en den harmoniske svingning, som kan på figuren herunder: