

Vingummibamser

Vi ser i denne del nærmere på vingummibamseprojektet med fokus på sproglig forståelse, formel, tabel og graf. Udgangspunktet i hvert afsnit er, at fabrikanten har valgt prisen på en tom pose til 4 kr og prisen per bamse til 2 kr.

Sprogligt

1

Der er mange måder at beskrive sammenhængen mellem antal bamser og pris. Gør man det med ord - uden matematiske symboler eller fagudtryk, kalder man det **en sproglig beskrivelse**.

Det kunne fx være "prisen for en tom pose er 4 kr og prisen per bamse er 2 kr".

Ud fra den sproglige beskrivelse kan man beregne den samlede pris ved at gange prisen for en bamse med antallet af bamser og så lægge posens pris til. Dermed vil prisen på en pose med 5 bamser være $2 \cdot 5 + 4 = 14$. Tilsvarende vil prisen på en pose med 6 bamser være $2 \cdot 6 + 4 = 16$.

Formel

2

Man kan også beskrive sammenhængen mellem pris og antal ved brug af en **formel**:

$$y = 2 \cdot x + 4,$$

hvor x angiver antal bamser x og y angiver prisen i kr.

Et udtryk som dette der med variabelnavne og matematiske symboler giver en måde at beregne noget ud fra noget andet kaldes en formel.

Tabel

3

Ud fra den sproglige beskrivelse kan vi også udfylde en **tabel** over sammenhængen mellem pris og antal bamser:

antal	0	1	2	3	4	5	6
pris	4	6	8	10	12	14	16

Vis pile ☐

Vis beregninger ☐

Øvelse

bamsepris 2 posepris 4

antal	0	1	2	3	4	5	6
pris	4	6	8	10	12	14	16

Vis pile ☐

Vis beregninger ☐

Du skal nu undersøge tabellen nærmere.

1. Prøv om du ved at trække i skyderne kan komme frem til, hvilken betydning bamseprisen og poseprisen har for tallene i tabellen.
 - a. Hvor finder man poseprisen?
 - b. Hvor finder man bamseprisen?

2. Sæt flueben i "Vis pile" og sammenlign det figuren nu viser med dine svar i 1.

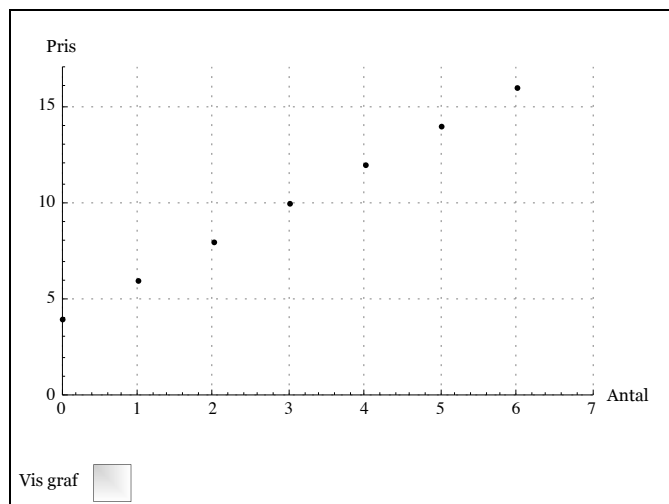
Systemet i sammenhængen mellem pris og antal bamser er altså, at prisen starter på poseprisen og for hver gang der kommer en ekstra bamse i posen, så stiger prisen med bamseprisen.

Graf

4

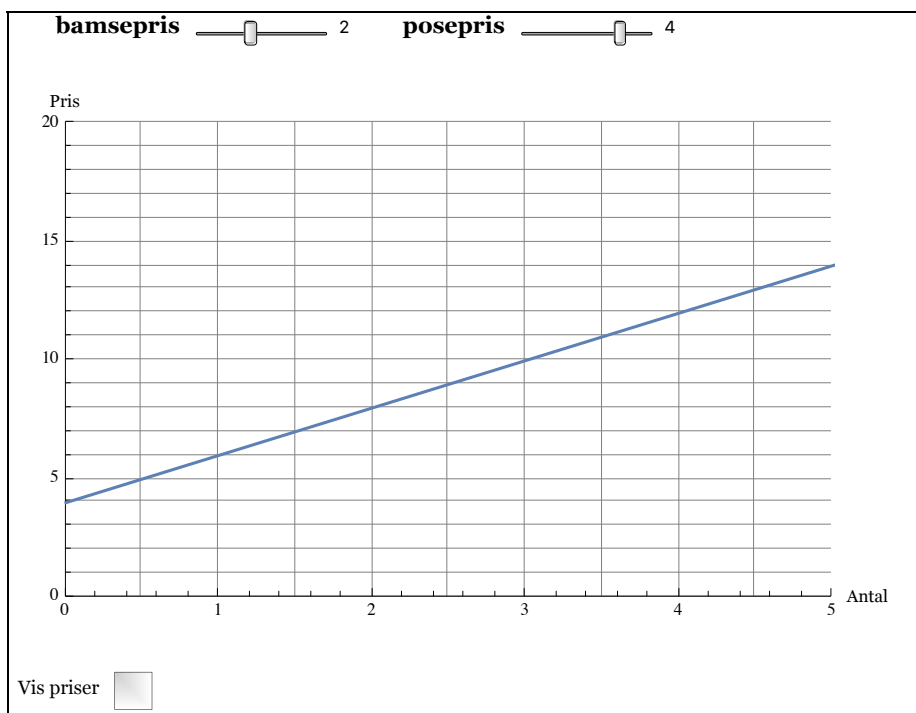
Den sidste måde, hvorpå vi vil beskrive sammenhænge, er ved brug af grafer.

Vi starter med at indtegne de sammenhørende værdier fra tabellen i et koordinatsystem:



Det ses at punkterne ligger på linje. Linjen kaldes **graf**en for sammenhængen.

Øvelse



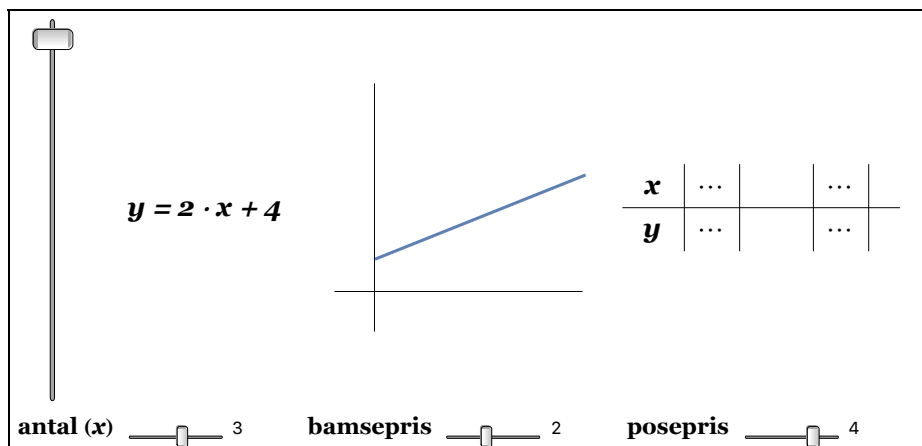
1. Prøv at ændre poseprisen ved at trække i skyderen. Hvad sker der med linjen? I hvilket punkt skærer linjen y -aksen?
2. Prøv nu at ændre bamseprisen. Hvad sker der med linjen?
3. Sæt flueben i "Vis priser" og forklar, hvordan vi kan finde prisen for en pose og prisen for en bamse ud fra grafen.

Vi ser, at poseprisen angiver grafens skæring med y -aksen, og at bamseprisen angiver, hvor meget grafen stiger, hver gang man går 1 hen ad x -aksen.

Opsamling

5

Vi kan bestemme prisen for en pose med et antal bamser ud fra de tre matematiske repræsentationsformer formel, graf og tabel. Det er illustreret på følgende figur:



Fordi man ud fra antallet af bamser kan bestemme prisen, siger man, at der er en sammenhæng mellem antallet og prisen:

Definition

Hvis man ud fra x kan bestemme y er der en **sammenhæng** mellem x og y .

I vingummibamseprojektet måtte journalisten spørge om prisen på en pose med et frit valgt antal bamser i. Antallet af bamser er altså noget journalisten vælger og kaldes derfor **den uafhængige variabel** i sammenhængen. Prisen afhænger selvfølgelig af hvor mange bamser, der er i posen og kaldes derfor **den afhængige variabel**. Fabrikantens pris på både posen og en bamse er den samme hver gang journalisten spørger, derfor kaldes disse priser **konstanter**.

I de naturvidenskabelige fag møder du også variable. Hvis du fx i fysik har lavet forsøg med opvarmning af vand, hvor du målte vandets temperatur hvert halve minut, så vil tiden være den uafhængige variabel, og temperaturen vil være den afhængige variabel, fordi temperaturen afhænger af tiden.

Lineære sammenhænge

I denne del udvider vi resultaterne fra vingummibamseprojektet til alle problemer af samme type; de såkaldte lineære sammenhænge. Det nye er, at vi nu tillader negative værdier for både variable og konstanter.

Definition

1

Inspireret af vores resultater i vingummibamseprojektet, definerer vi følgende:

Definition:

En **lineær sammenhæng** er en sammenhæng, der har en af følgende egenskaber:

Formel: Den kan beskrives med en formel på formen $y = ax + b$.

Tabel: Når x stiger med 1, så stiger y altid med det samme tal.

Graf: Grafen er en ret linje.

I formlen kaldes a for hældningskoefficienten eller **hældningen** og b kaldes **begyndelsesværdien**.

Det viser sig, at hvis en sammenhæng har blot en af de tre egenskaber, så har den automatisk også de to andre. Det vil vi ikke gå i detaljer med her, men i de næste to afsnit skal du undersøge, hvilken betydning a og b i formlen har for tabellen og grafen.

Tabelforståelse

x					
y					

1.1

I vingummibamseprojektet indså vi, hvordan man ved brug af en tabel kunne illustrere sammenhængen mellem pris og antal bamser, og at forskel i pris skyldtes forskel i antal bamser. Der gælder noget tilsvarende for alle lineære sammenhænge. Det skal du undersøge i følgende øvelse:

Øvelse

a  2 **b**  3 Ekstra indstillinger 

x	-6	-3	0	3	6	9	12
y	-9	-3	3	9	15	21	27

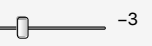
- Prøv om du ved at trække i skyderne kan komme frem til, hvilken betydning a og b har for tallene i tabellen.
 - Hvor finder man b -værdien?
 - Hvor finder man a -værdien?
- Hints til b :
 - Sæt flueben i "Ekstra indstillinger" og "Vis farver".
 - Træk i skyderen for b . Forklar med dine egne ord, hvor man finder b -værdien (uden at bruge farven).
 - Træk i skyderen for "nul". Passer din forklaring fra **b.** stadig? Hvis ikke, så tilpas den.
 - Har "skridt" nogen betydning for, om din forklaring passer?
- Hints til a :
 - Sæt flueben i "Ekstra indstillinger" og "Vis pile" (fjern evt. farver og sæt "skridt" til 1).
 - Hvad har pilene med tallene i tabellen at gøre?
 - Hvad har pilene med a at gøre? Forklar med dine egne ord, hvilken betydning a har for tallene i tabellen (uden at tale om pilene).
 - Træk i skyderen for "nul". Passer din forklaring fra **c.** stadig? Hvis ikke, så tilpas den.
 - Prøv at ændre på "skridt". Passer din forklaring stadig? Hvis ikke, så tilpas den. (Hint: Prøv at markere "Vis farver")
- Undersøg om dine forklaringer på betydningen af a og b stadig passer, hvis de ikke er heltal. (Fjern markeringen af "Heltal" og flyt på skyderne).

I den næste øvelse skal du øve dig i at bestemme a og b ud fra en tabel.

Øvelse

Let ☐ Sværere ☐ Antal rigtige: 0/0

x	0	1	2	3	4	5	6
y	-3	0	3	6	9	12	15

a  3 **b**  -3

Check svar Ny opgave Nulstil

Vækstegenskab

1.1.1

Konklusionen på den første øvelse ovenfor kan formuleres som " **b svarer til x -værdien 0**" og "**når man lægger et tal til x , så lægger man a gange det samme tal til y** ". Det sidste er en meget nyttig egenskab ved lineære sammenhænge. Vi vil derfor gerne kunne skrive den med symboler, så vi får en formel, som vi kan bruge til at løse opgaver.

For at kunne skrive vores formel op, skal vi blot have introduceret lidt fagsprog og et symbol:

Definition

En stigning (i forstanden et tal, man lægger til) kalder man en **absolut tilvækst**.
En absolut tilvækst i en variabel angives med et Δ .

Eksempler

Hverdagsprog

 x stiger med 4 x falder med 4

Fagsprog

Den absolutte tilvækst i x er 4.Den absolutte tilvækst i x er -4.

Symbolsprog

 $\Delta x = 4$ $\Delta x = -4$

Vi kan nu skrive anden del af konklusionen på øvelsen meget kort:

Sætning

For en lineær sammenhæng gælder følgende **vækstegenskab**:

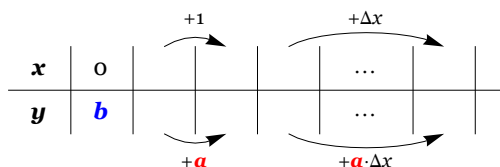
$$\Delta y = a \cdot \Delta x$$

Vækstegenskaben er ikke bare en nyttig formel, man kan bruge, når man står med en lineær sammenhæng; man kan faktisk bruge den til at genkende lineære sammenhænge. Det er nyttigt i fx de naturvidenskabelige fag, hvor man ofte står med ting, der ændrer sig på den måde. Det kunne fx være at man måler på temperaturen af noget vand, mens man opvarmer det. Hvis temperaturen stiger med lige meget for hver tidsenhed, så er der en lineær sammenhæng mellem temperaturen og den tid, der er gået.

Opsummering

1.1.2

Vores tabelforståelse af a og b for lineære sammenhænge kan opsummeres på følgende måde:



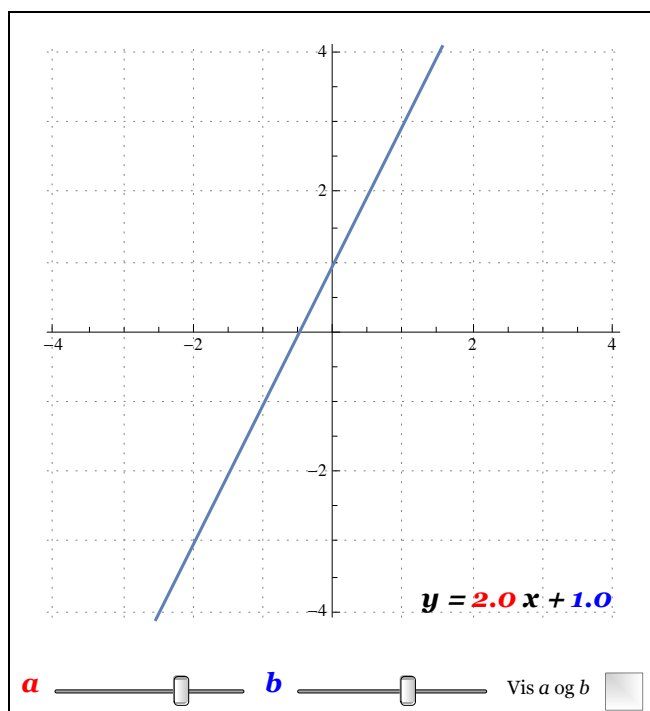
Grafisk forståelse



1.2

I den følgende øvelse skal du undersøge, hvilken betydning konstanterne a og b har for grafens udseende.

Øvelse



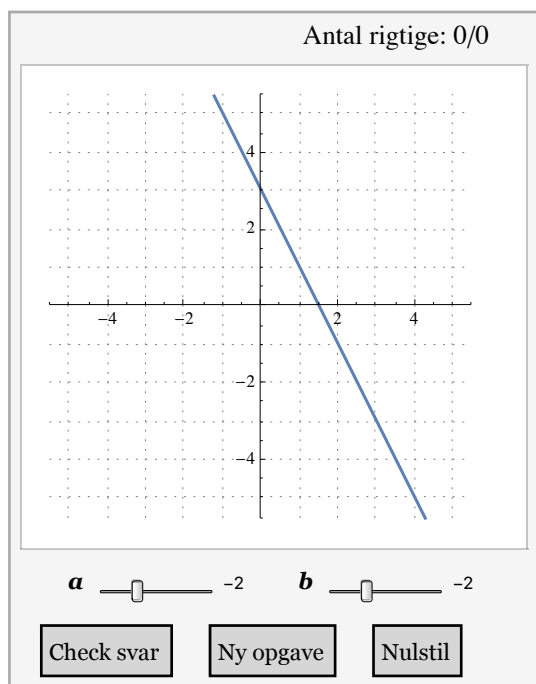
1. Prøv at ændre på b -værdien. Hvad sker der med linjen?

a. I hvilket punkt skærer linjen y -aksen?

- b.** Forklar ud fra din tabelforståelse og din formelforståelse, hvorfor linjen skærer y -aksen netop i dette punkt.
- 2.** Sæt b -værdien til 1 og prøv at ændre på a -værdien. Hvad sker der med linjen?
- a.** Brug din tabelforståelse til at forklare, hvorfor det sker.
- b.** Hvad kan du sige om linjen, når $a > 0$, $a < 0$ og $a = 0$?
- 3.** Sæt flueben i "vis a og b " og forklar:
- a.** Hvilken betydning a og b har for grafens udseende.
- b.** Hvordan vi kan finde a og b i en lineær sammenhæng ud fra grafen.

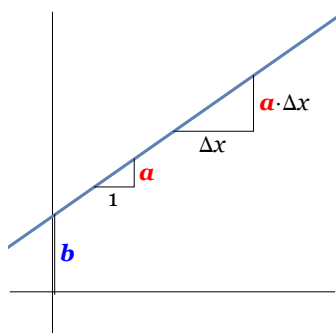
I næste øvelse skal du øve dig i at bestemme a og b ud fra en graf.

Øvelse



Opsummering

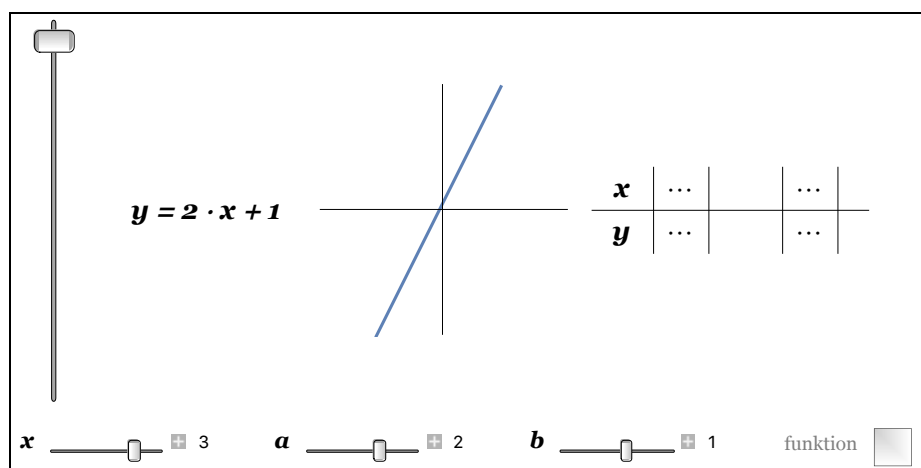
Vores grafforståelse af a og b for lineære sammenhænge kan opsummeres på følgende måde:



Bestemmelse af y – værdier

2

Følgende figur illustrerer, hvordan vi kan bruge hver af de tre repræsentationsformer til at bestemme y -værdier ud fra x -værdier, når der er en lineær sammenhæng mellem x og y .



Lineære funktioner

2.1

Vi skal i næste emne se på funktionsbegrebet, som du også mødte i grundskolen. Når man arbejder med funktioner, taler man ikke om “ y -værdier”, men om “funktionsværdier”. Det betyder umiddelbart blot, at y erstattes med $f(x)$, men som vi skal se i næste afsnit er der stor forståelsesmæssig forskel på funktioner og sammenhænge.

For at kunne løse opgaver, der taler om lineære funktioner, kan du tænke på følgende måde:

“ $f(x)$ er y -værdien hørende til x -værdien x ”

Eksempel

Den lineære funktion

$$f(x) = 2x + 1$$

svarer så til den lineære sammenhæng

$$y = 2x + 1.$$

Derfor svarer $f(3)$ til y -værdien hørende til x -værdien 3, hvormed

$$f(3) = 2 \cdot 3 + 1 = 7.$$

Denne kobling er også illustreret på figuren ovenfor (markér “funktion”).

Topunktsformler

3

a ud fra to punkter

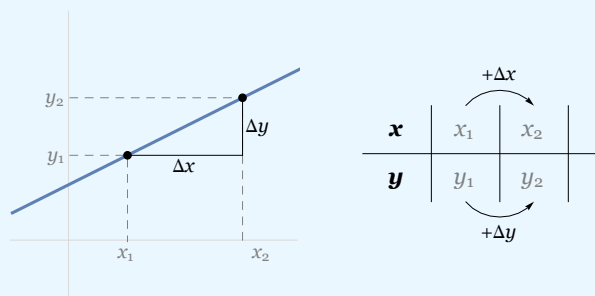
3.1

Følgende formel gør det muligt ud fra to tilvækster eller to punkter at bestemme hældningen i en lineær sammenhæng.

Sætning

For en lineær sammenhæng gælder følgende:

$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$



Kobling til vingummibamser

Vi vender endnu engang tilbage til vingummibamsefabrikantspillet.

I niveau 2 stillede journalisten to spørgsmål:

1. Hvad koster en pose med 5 bamser?
2. Hvad koster en pose med 8 bamser?

Lad os sige, at han fik svarene 23 kr og 35 kr. Ved at beregne stigningen i pris ($35 \text{ kr} - 23 \text{ kr} = 12 \text{ kr}$), og stigningen i antal bamser ($8 - 5 = 3$), så kunne journalisten konkludere, at 3 bamser kostede 12 kr, hvormed en bamse kostede 4 kr.

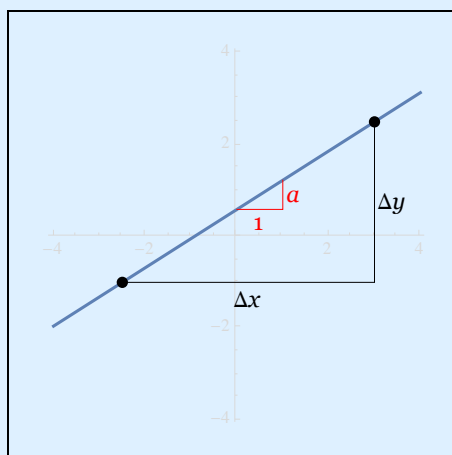
Da stigningen i pris svarer til Δy og stigningen i antal bamser svarer til Δx , svarer journalistens strategi ("divider prisstigning med antalstigning") til formlen.

Tabelbevis

I afsnittet om tabelforståelse indså vi, at lineære sammenhænge har følgende vækstegenskab: $\Delta y = a \cdot \Delta x$. Formlen for a følger ved at dividere med Δx på begge sider.

Grafbevis

Da grafen er den linje, der går gennem de to punkter, er trekanten, der viser betydningen af a , ensvinklet med den retvinklede trekant med kateterne Δx og Δy på følgende figur:



Ud fra vores viden om ensvinklede trekanter:

"Forholdet mellem ensliggende sider giver skalafaktoren"

får vi, at skalafaktoren er givet ved Δx , fordi

$$\text{skalafaktor} = \frac{\text{sort vandret katete}}{\text{rød vandret kate}} = \frac{\Delta x}{1} = \Delta x.$$

Derfor er den sorte lodrette katete Δx gange længere end den røde lodrette katete. Dvs

$$\Delta y = a \cdot \Delta x$$

Formlen følger nu ved at dividere med Δx på begge sider.

Ligningsbevis

Lad os starte med at se på, hvad ligningen fortæller os om de to punkter. Siden de ligger på grafen, opfylder koordinaterne ligningen. Dvs.

$$\begin{aligned} y_1 &= a \cdot x_1 + b \\ y_2 &= a \cdot x_2 + b \end{aligned}$$

Det bruger vi til at regne på Δy :

$$\begin{aligned} \Delta y &= y_2 - y_1 \\ &= (a \cdot x_2 + b) - (a \cdot x_1 + b) \\ &= a \cdot x_2 + b - a \cdot x_1 - b \\ &= a \cdot x_2 - a \cdot x_1 \\ &= a \cdot (x_2 - x_1) \\ &= a \cdot \Delta x \end{aligned}$$

Definition af Δy .

Indsætter udtryk for y_2 og y_1 .

Hæver parenteserne.

b 'erne går ud.

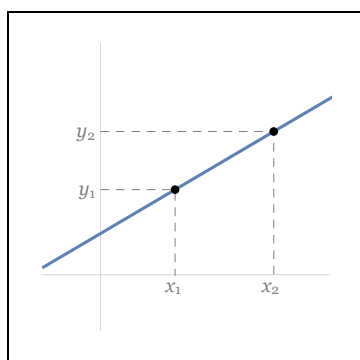
Sætter a udenfor parentes.

Definition af Δx .

Formlen for a følger nu ved at dividere med Δx på begge sider.

Øvelse

Formlen kan bruges uanset hvilke to punkter, man får oplyst, med undtagelse af, når de to punkter har samme x -koordinat. Hvorfor virker den ikke, hvis punkterne har samme x -koordinat? Figuren nedenfor kan måske bruges til inspiration.



b ud fra punkt og a

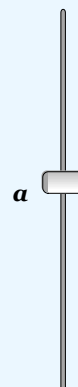
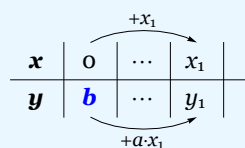
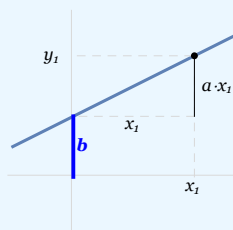
3.2

Følgende formel gør det muligt ud fra et punkt og hældningen at bestemme begyndelsesværdien i en lineær sammenhæng.

Sætning

For en lineær sammenhæng kan begyndelsesværdien beregnes på følgende måde:

$$b = y_1 - a \cdot x_1$$



Kobling til vingummibamser

Vi vender endnu engang tilbage til vingummibamsefabrikantspillet.

For at kunne beregne prisen for posen trak journalisten prisen for bamserne fra prisen for posen med bamser.

Hvis han fx havde regnet ud at prisen for en bamse var 2 kr og han havde fået at vide, at en pose med 3 bamser kostede 10 kr, så kunne han finde posens pris ved at trække prisen for de tre bamser (altså $2 \cdot 3$) fra de 10 kr.

Da a svarer til prisen per bamse og y_1 svarer til prisen for en pose med x_1 bamser, svarer journalistens tankegang til formlen.

Tabelbevis

I afsnittet om tabelforståelse indså vi, at **begyndelsesværdien svarer til x -værdien 0**.

Da vi kender et punkt, kender vi også tilvæksten i x fra 0 og frem til det punkt. Den er $\Delta x = x_1 - 0 = x_1$.

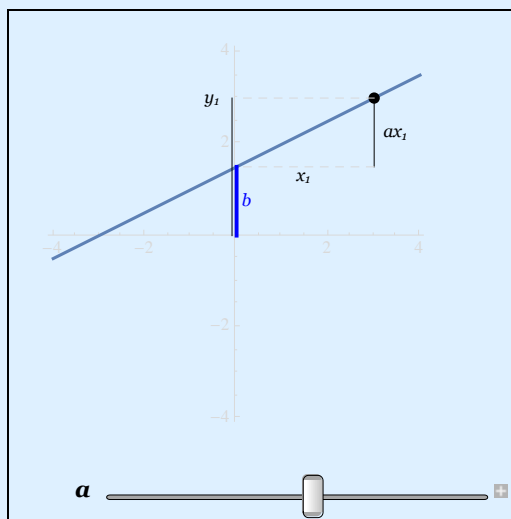
Indsætter vi det i vækstegenskaben $\Delta y = a \cdot \Delta x$, får vi at ændringen i y er $a \cdot x_1$. Dvs. at y_1 er $a \cdot x_1$ større end b , hvormed $b = y_1 - a \cdot x_1$.

Idéen er illustreret på følgende figur:

		$+x_1$		
x	0	...	x_1	
y	b	...	y_1	
		$+a \cdot x_1$		

Grafbevis

Følgende figur illustrerer idéen:



Fra vores viden om betydningen af hældningen (a) for grafens forløb, ved vi, at når vi går x_1 skridt hen, så skal vi gå a gange x_1 skridt op for igen at møde grafen. Derfor er y_1 præcis $a \cdot x_1$ større end b . Det betyder, at $b = y_1 - a \cdot x_1$.

Ligningsbevis

Siden vi har et punkt på grafen, fortæller ligningen os, at

$$y_1 = a \cdot x_1 + b$$

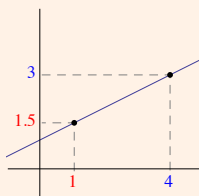
Formlen for b følger ved at trække $a \cdot x_1$ fra på begge sider.

Træning

3.3

Eksempel:

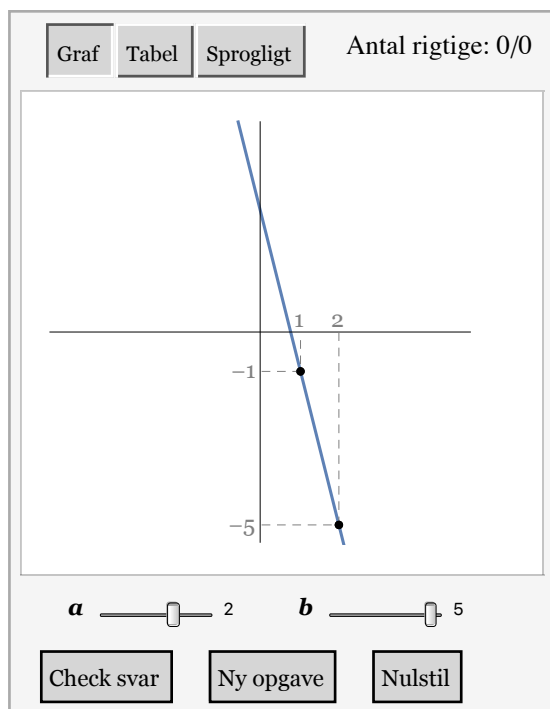
Vi bestemmer hældningen og begyndelsesværdien ud fra to punkter på grafen for en lineær sammenhæng:



$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3 - 1.5}{4 - 1} = 0.5$$

$$b = y_1 - ax_1 = 1.5 - 0.5 \cdot 1 = 1$$

Med følgende figur kan du øve dig i at bestemme a og b ud fra to punkter.



Med følgende figur kan du øve dig i mere avancerede anvendelser af topunktsformlerne:

Antal rigtige: 0/0

x	2	x_2	
y	1	-1	

$a = -2$ $b = ?$

b x_2

Skæring mellem linjer

4

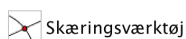
I mange opgaver om lineære sammenhænge er det vigtigt at kunne bestemme skæringspunktet mellem to linjer. Det skal du kunne gøre på to måder:

Grafisk (med CAS)

4.0.1

I GeoGebra kan man let tegne linjer, hvis man kender deres ligninger; man taster blot ligningen ind i inputfeltet og trykker på Enter-tasten.

Når man har tegnet sine to linjer, kan man finde deres skæringspunkt ved at vælge skæringsværktøjet i værktøjslinjen med punkter. Det ser sådan ud:



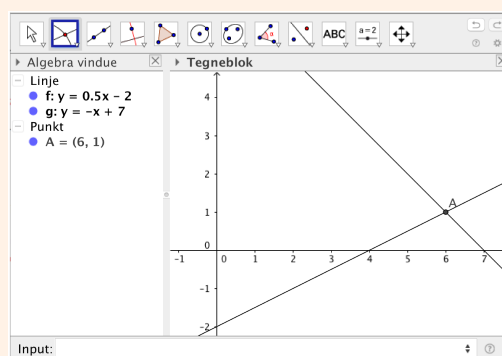
Skæringsværktøj

Når man har valgt det, kan man klikke på de to linjer (eller deres ligninger i algebravinduet). Så tegner GeoGebra linjernes skæringspunkt. Koordinaterne kan findes i algebravinduet.

Eksempel 1

Vi bestemmer skæringspunktet mellem linjerne $y = \frac{1}{2} \cdot x - 2$ og $y = 7 - x$.

Efter at have gjort som beskrevet ovenfor, får vi følgende i GeoGebra:



Skæringspunktet er derfor (6, 1).

Eksempel 2 (kontekst)

Hos Alis taxa oplyser man, at startgebyret er 66 kr, og at prisen pr. kørt km er 17 kr.

Hos Annas taxa oplyser man, at startgebyret er 42 kr, og at prisen pr. kørt km er 20 kr.

Vi skal finde ud af, hvor lang en tur skal være, for at Alis taxa er billigst.

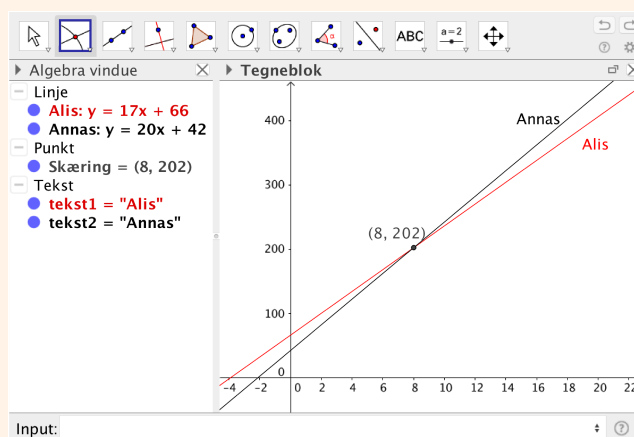
Lad os kalde antal kørte km for x og prisen i kr for y . Så kan sammenhængen mellem x og y for de to selskaber beskrives ved følgende

formler:

$$\begin{aligned}\text{Alis: } y &= 17 \cdot x + 66 \\ \text{Annas: } y &= 20 \cdot x + 42\end{aligned}$$

Hvis vi finder skæringspunktet mellem de to linjer, der svarer til formlerne, finder vi den afstand man skal køre, for at det koster lige meget at køre med hvert selskab.

Vi tegner de to grafer og finder deres skæringspunkt:



Vi ser, at de to selskaber er lige dyre, hvis turen er 8 km lang. Så da grafen for Alis taxa (den røde) ligger under grafen for Annas taxa (den sorte) efter skæringspunktet, så er Alis taxa altså billigst, hvis turen er mere end 8 km lang.

Ligningsløsning (i hånden)

4.0.2

Skæringspunktet opfylder begge ligninger. Så hvis vi opfatter de to ligninger som et ligningssystem (to ligninger med to ubekendte), så kan vi finde skæringspunktet ved at løse ligningssystemet ligesom i grundskolen.

Eksempel 1

Vi bestemmer skæringspunktet mellem linjerne med ligningerne $y = 5 \cdot x + 1$ og $y = 2 \cdot x - 8$.

Vi opfatter de to ligninger som et ligningssystem:

$$\begin{aligned}y &= 5 \cdot x - 1 \\ y &= 2 \cdot x + 8\end{aligned}$$

Vi leder altså efter et talpar (x, y) , der opfylder begge ligninger på en gang. Da vores y -værdi kan beregnes på to forskellige måder ud fra vores x -værdi, må de to måder give det samme resultat. Dvs.

$$5 \cdot x - 1 = 2 \cdot x + 8$$

Det er en almindelig ligning med kun en ubekendt, så den løser vi på normal vis:

Først samler vi x 'erne på samme side ved at trække $2 \cdot x$ fra på begge sider:

$$\begin{aligned}5 \cdot x - 1 - 2 \cdot x &= 2 \cdot x + 8 - 2 \cdot x \\ 3 \cdot x - 1 &= 8\end{aligned}$$

Nu kan vi isolere x ved først at lægge 1 til på begge sider og så dividere med 3. Det giver løsningen

$$x = 3.$$

x -koordinaten til vores skæringspunkt er altså 3.

For at finde y -koordinaten til vores skæringspunkt, benytter vi os af, at hver af de oprindelige ligninger gør det muligt at bestemme y -værdien, der hører til en x -værdi. Vi indsætter derfor 3 på x 's plads i en af dem. Vi vælger den første (men det er ligegyldigt, hvilken man vælger).

$$y = 5 \cdot x - 1 = 5 \cdot 3 - 1 = 16$$

Skæringspunktet er derfor $(3, 16)$.

Eksempel 2 (kontekst)

I tekstopgaver er det ikke altid hele skæringspunktet, der bliver spurgt om. Så skal man huske at fortolke skæringspunktet rigtigt. Vi ser på et eksempel:

To nabofirmaer, Star og Friend, har siden 2010 konkurreret om hvem af dem, der har det største overskud ved årets slutning.

Firmaet Star oplyser, at overskuddet ved årets slutning kan beskrives ved formelen $y = 1.8 \cdot x + 7.4$, hvor x er antal år efter 2010, og y er overskuddet ved årets slutning angivet i mio. kr.

Firmaet Friend oplyser, at deres tilsvarende formel er $y = 2.3 \cdot x + 3.4$.

Vi vil finde ud af i hvilket år, de to firmaer har lige stort overskud ved årets slutning.

Når de to firmer skal have lige stort overskud, så skal vi finde **skæringen mellem de to linjer**, der svarer til formlerne, fordi de der har den samme x -værdi (der er gået lige lang tid) og samme y -værdi (de tjener lige meget).

Bruger vi vores teknik fra de tidligere eksempler, finder vi skæringspunktet til

(8, 21.8).

Da x er antal år efter 2010, tjener de to virksomheder altså lige meget 8 år efter 2010. Dvs. i **2018**.

Vi skulle ikke bruge skæringspunktets y -koordinat til noget i denne opgave, men den kunne være interessant, hvis opgaven havde været en lidt anden, da den viser, hvor meget de to virksomheder tjener det år, hvor de tjener lige meget.

Træning

4.0.3

Standard Sværere

Antal rigtige: 0/0

Linjerne med ligningerne

$y = 4 \cdot x + 2$ og

$y = 1 \cdot x + 5$

skærer hinanden i (x_s, y_s) .

x_s

0

y_s

0

Check svar

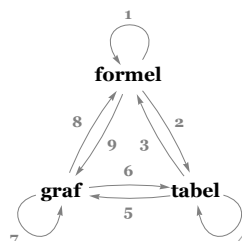
Ny opgave

Nulstil

Opgaver om repræsentationsformer

5

Der er 9 relevante spørgsmålstyper til de tre repræsentationsformer. De er alle illustreret på følgende figur:



1: Du får givet en **formel** og skal afgøre, om der er en lineær sammenhæng mellem størrelserne.

Løsning:

Undersøg om formlen kan omskrives til formen $y = a \cdot x + b$. Hvis den kan det, er svaret 'ja' og hvis ikke, er svaret 'nej'.

Eksempler:

1. $\frac{y}{2} = x + 1$. Er der en lineær sammenhæng?:

Ja, der er en lineær sammenhæng mellem x og y , fordi formlen kan omskrives til $y = 2 \cdot x + 2$.

2. $y = x^2$. Er der en lineær sammenhæng?:

Nej, der er ikke en lineær sammenhæng mellem x og y , fordi formlen ikke kan omskrives til formen $y = a \cdot x + b$.

2: Du får givet en **formel** og skal bestemme nogle ukendte værdier i en **tabel**.

Løsning:

Indsæt en kendt værdi i formlen og brug den resulterende ligning til at bestemme den ukendte værdi evt. ved ligningsløsning.

Eksempel:

$$y = 2x + 1 \text{ og } \begin{array}{c|c|c|c} x & 1 & ?_2 & \\ \hline y & ?_1 & 7 & \end{array} :$$

For at bestemme $?_1$ sætter vi 1 ind på x 's plads og $?_1$ ind på y 's plads i formlen:

$$?_1 = 2 \cdot 1 + 1 = 3$$

For at bestemme $?_2$ sætter vi $?_2$ ind på x 's plads i formlen og 7 ind på y 's plads:

$$7 = 2 \cdot ?_2 + 1$$

Ved at løse ligningen, får vi $?_2 = 3$.

3: Du får givet en **tabel** og skal bestemme **formlen**.

Løsning:

Brug formlerne for a og b .

Eksempel:

Bemærk, at dette kun er relevant, hvis du **ved**, at alle punkterne ligger præcis på samme rette linje. Ofte kommer tallene fra et eksperiment og er derfor forbundet med måleusikkerhed. I så fald bruger man **regression** til at finde den linje, der bedst passer med punkterne og **aldrig** topunktsformlerne.

$$\begin{array}{c|c|c|c|c} x & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline y & 3 & 5 & 7 & 9 \end{array} . \text{ Bestem formlen for den lineære sammenhæng.}$$

Vi ser på de to første punkter:

$$\begin{array}{c|c|c|c|c} x & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline y & 3 & 5 & 7 & 9 \end{array}$$

Vi bruger topunktsformlerne for lineær sammenhæng på de to punkter:

$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{5-3}{2-1} = 2$$

$$b = y_1 - ax_1 = 3 - 2 \cdot 1 = 1$$

Formlen er derfor $y = 2x + 1$.

4: Du får givet en **tabel** og skal afgøre, om der er en lineær sammenhæng mellem værdierne.

Løsning:

Bestem de absolutte tilvækster mellem x -værdierne og mellem y -værdierne.

Hvis der findes et tal a , så $\Delta y = a \cdot \Delta x$, så er der tale om lineær sammenhæng og ellers ikke.

Eksempler:

1. $\begin{array}{c|c|c|c|c} x & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline y & 3 & 5 & 7 & 9 \end{array}$. Er der en lineær sammenhæng?

Vi bestemmer de absolutte tilvækster:

x	1	2	3	4
y	3	5	7	9

$\xrightarrow{+1} \xrightarrow{+1} \xrightarrow{+1}$
 $\xrightarrow{+2} \xrightarrow{+2} \xrightarrow{+2}$

Vi ser, at den samme tilvækst i x altid giver den samme tilvækst i y , så der **er** en lineær sammenhæng mellem x og y (a er 2).

2.

x	-1	2	6	11
y	0	9	21	36

. Er der en lineær sammenhæng?

Vi bestemmer de absolutte tilvækster:

x	-1	2	6	11
y	0	9	21	36

$\xrightarrow{+3} \xrightarrow{+4} \xrightarrow{+5}$
 $\xrightarrow{+9} \xrightarrow{+12} \xrightarrow{+15}$

Vi ser, at tilvæksten i y altid er 3 gange så stor som tilvæksten i x (altså $\Delta y = 3 \cdot \Delta x$). Så der **er** tale om lineær sammenhæng.

5: Du får givet en **tabel** og skal tegne **graf**en for sammenhængen.

Løsning:

Tegn punkterne med x -værdierne som x -koordinater og y -værdierne som y -koordinater ind i et koordinatsystem og forbind dem med en ret linje.

Eksempel:

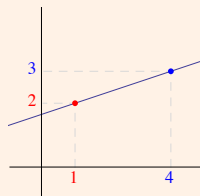
x	1	4	10	16
y	2	3	5	7

. Tegn grafen for den lineære sammenhæng mellem x og y .

Da en ret linje er fastlagt af to punkter, kan vi nøjes med at se på de to første punkter:

x	1	4	10	16
y	2	3	5	7

Vi tegner dem ind i et koordinatsystem og tegner linjen gennem dem:

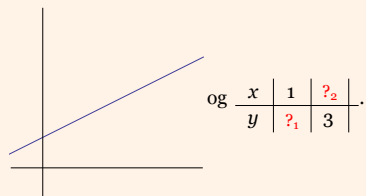


6: Du får givet en **graf** og skal bestemme nogle ukendte værdier i en **tabel**.

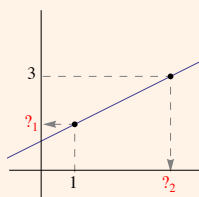
Løsning:

Vi aflæser den tilsvarende x - eller y -værdi på grafen ved at starte ved den givne y - eller x -koordinat.

Eksempel:



Vi aflæser på følgende måde:

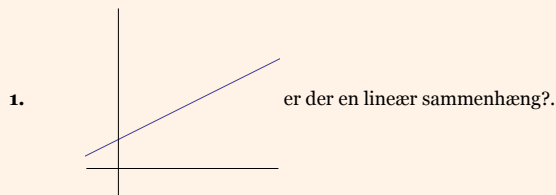


7: Du får givet en **graf** og skal afgøre, om der er en lineær sammenhæng mellem størrelserne.

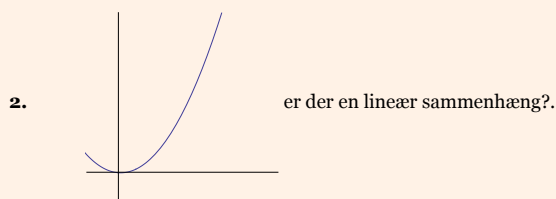
Løsning:

Vi kan genkende lineære sammenhænge på, at deres graf er en ret linje.

Eksempel:



Da grafen er en ret linje, er svaret **ja**.



Da grafen ikke er en ret linje, er svaret **nej**.

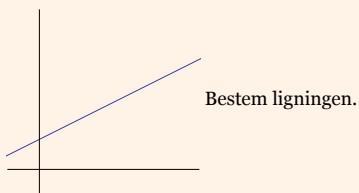
8: Du får givet en **graf** og skal bestemme **formlen** for sammenhængen.

Løsning:

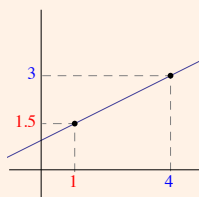
Vi har to muligheder:

1. Aflæse to punkter og bruge topunktsformlerne.
2. Bruge vores grafiske forståelse af a og b til at aflæse dem.

Eksempel:



Vi bruger metode 1 og aflæser derfor to punkter:



Og bruger topunktsformlerne:

$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3 - 1.5}{4 - 1} = 0.5$$

$$b = y_1 - ax_1 = 1.5 - 0.5 \cdot 1 = 1$$

Formlen er derfor $y = 0.5x + 1$.

9: Du får givet en **formel** og skal tegne **graf**en for sammenhængen.

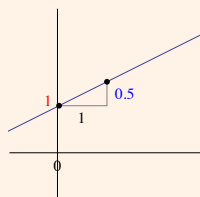
Løsning:

Brug den grafiske forståelse af hældningen (a) og begyndelsesværdien (b).

Eksempel:

$y = 0.5x + 1$. Tegn grafen.

Vi tegner punkterne $(0, 1)$ og $(1, 1 + 0.5)$ i et koordinatsystem og tegner en ret linje gennem dem.



Opgaver om vækstegenskaben

6

Hvis du i en opgave får at vide, at der er en lineær sammenhæng mellem to størrelser og skal finde ud af, hvor meget en af størrelserne ændres, når den anden ændres med et eller andet, så kan du bruge vækstegenskaben:

$$\Delta y = a \cdot \Delta x$$

Strategien er som med alle andre formler: Indsæt dine kendte værdier og løs den ligning, der fremkommer.

Eksempel

Vi skal finde tilvæksten i y , når vi får oplyst, at x vokser med 3 og at der er en lineær sammenhæng med hældning 2 mellem x og y .

Vi konstaterer, at oplysningerne fortæller os, at $\Delta x = 3$ og at $a = 2$. Det indsætter vi i formelen:

$$\Delta y = a \cdot \Delta x = 2 \cdot 3 = 6$$

y vokser altså med 6.

Træning

6.1

Med denne figur kan du øve dig i at bruge vækstegenskaben:

Antal rigtige: 0/0

Sproglig
Formel
Grafisk

**Hvis x stiger med 3
og hældningen er -4 ,
så stiger y med Δy .**

Δy

0

Check
Ny
Nulstil

Funktioner

I første del så vi på, hvordan vi kunne beskrive sammenhængen mellem prisen for en pose med vingummibamser og antallet af bamser i den. I anden del udvidede vi vores forståelse til at omfatte alle situationer af typen “når x vokser med 1, så vokser y med a ” - de såkaldte lineære sammenhænge. I dette afsnit er det vores mål at udvide vores forståelse yderligere. Vi vil gå et skridt dybere og undersøge det system, der ligger under alle former for sammenhænge: **Funktioner**.

Maskinforståelse

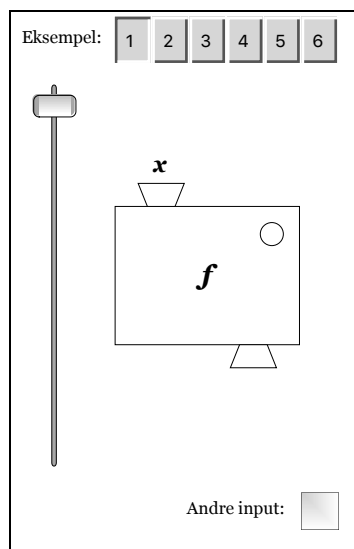


1

Du bør tænke på funktioner på denne måde:

En funktion er en maskine, der laver ting om til andre ting.

Bemærk, at funktioner altså ikke i sig selv har noget med x eller y at gøre! Men man bruger ofte x til at vise, hvad en funktion gør. Det fremgår af følgende billede på, hvordan du skal forestille dig funktioner:



Selvom funktioner i princippet kan arbejde med alle mulige forskellige ting som input og output, fokuserer vi i grundforløbet på funktioner, der **laver tal om til andre tal**.

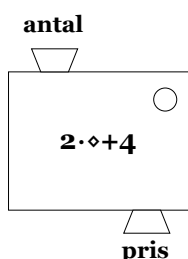
Kobling til sammenhænge

1.1

Vi siger, at der er en sammenhæng mellem to størrelser, hvis man ud fra den ene kan bestemme den anden. Pointen med funktioner er, at de beskriver processen, der laver værdier af den ene størrelse om til værdier af den anden. Hvis vi fx ser på vores første sammenhæng:

$$\text{pris} = 2 \cdot \text{antal} + 4,$$

så ser vi, at vi for at bestemme prisen **ganger antallet med 2, og så lægger vi 4 til**. Det er altså funktionen, der først ganger med 2 og så lægger 4 til, der sørger for at lave antal om til priser:



Bemærk at funktionen er helt ligeglad med, at det er antal vi putter ind, og at vi fortolker dens output som priser; den ganger bare det den får med 2, hvorefter den lægger 4 til. Vi kan fx sagtens give funktionen negative tal som input, selvom det ikke giver mening at have en pose med et negativt antal bamsere.

En funktion er altså ikke en sammenhæng, men den kan bruges til at **beskrive** en sammenhæng.

Bemærk desuden, at **samme funktion kan bruges til at beskrive flere forskellige sammenhænge**. Vi kunne fx bruge ovenstående til at beskrive sammenhængen mellem temperatur og tid, hvis temperaturen starter på 4°C og stiger med 2°C per minut.

Hvis der er en sammenhæng mellem to størrelser, så findes der altså en funktion, der laver værdier af den ene om til værdier af den anden. Derfor indfører vi følgende sprogbrug, som du vil møde ofte i de naturvidenskabelige fag:

Hvis der er en sammenhæng mellem to størrelser, siger man, at den ene størrelse er **en funktion af** den anden.

Funktioner, der beskriver de lineære sammenhænge, ganger altid med et tal og lægger så et tal til. Den slags funktioner kaldes lineære:

Definition

En funktion, der først ganger med et tal for derefter at lægge et tal til, kaldes **lineær**.

En lineær funktion har en forskrift på formen

$$f(x) = a \cdot x + b$$

Sprogbrug

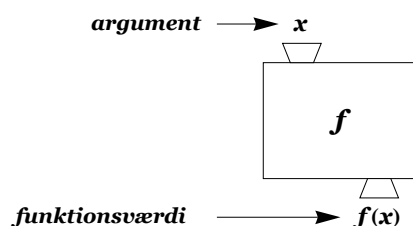
1.2

Når man arbejder med funktioner, giver man dem oftest navne eller symboler. Vi kalder for eksempel funktionen, der lægger to tal sammen, for '+'. Det er dog langt fra alle funktioner, der har et standardnavn på den måde. Når vi arbejder med funktioner, der ikke har et standardnavn, bruger vi oftest små bogstaver til at angive dem og aller oftest f , g eller h .

De ting vi sætter ind i funktioner kalder vi **argumenter** og de ting, der kommer ud af funktioner, kalder vi **funktionsværdier**. Hvis funktionen og argumentet har navne, fx f og x , bruger vi følgende skrivemåde:

$$f(x) = f\text{'s funktionsværdi i } x.$$

' $f(x)$ ' læses ' **f af x** '.



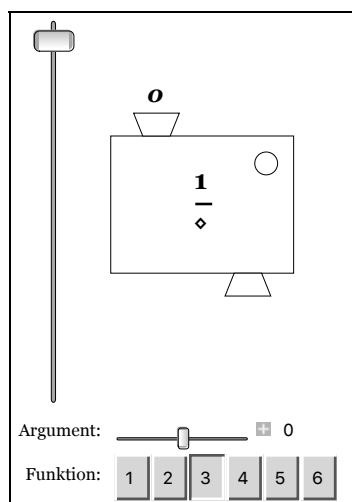
Definitionsmængde

1.3

Somme tider støder man på funktioner, som ikke kan tage alle tal som input. Derfor indfører vi følgende:

Definition

For en funktion f består **definitionsmængden**, $Dm(f)$, af alle de ting, som man kan sætte ind i maskinen uden den melder fejl.



Øvelse

Prøv at undersøge maskinen på figuren ovenfor. Hvornår (og hvorfor) melder den fejl?

Eksempler

Definitionsmængden for funktionen, der sætter i anden, $\text{Dm}(\diamond^2)$, består af alle tal.

Definitionsmængden for funktionen, der deler 1 med argumentet, $\text{Dm}\left(\frac{1}{\diamond}\right)$, består af alle tal undtagen 0.

Definitionsmængden for funktionen, der tager kvadratroden, $\text{Dm}(\sqrt{\diamond})$, består af alle de ikke-negative tal.

Forskriftsforståelse $f(x) = \dots$

2

For at beskrive en funktion har vi brug for at forklare, hvad den gør. Det gør vi typisk på en af følgende to måder:

1. Ved at bruge en 'pladsholder', typisk $\diamond$ eller $\cdot$, så man kan se, hvad der sker med argumentet.
2. Ved at kalde funktionen og argumentet noget (ofte ' f ' og ' x ') og så angive funktionsværdien i argumentet.

Eksempel

Vi ser på funktionen, der **sætter i anden**.

Med notation **1.** skrives den sådan: $\diamond^2$

Med notation **2.** kan den skrives sådan: $f(x) = x^2$

En fordel ved den første måde er, at den fokuserer på, hvad funktionen gør, hvilket kan være praktisk i forbindelse med fx ligningsløsning. Den understreger desuden, at funktioner er noget i sig selv, og at de fx **ikke kender til navne** - de tager bare ting (ofte tal) og laver dem om til andre ting.

En anden fordel ved første måde er, at den gør det lettere at genkende funktioner: Hvis vi ser på funktionen $\diamond^2$, så kan den skrives på mange forskellige måder med den anden notation: $f(x) = x^2$, $x(f) = f^2$, $x(x) = x^2$, osv.

Det er dog den anden måde at opskrive funktioner på, der er standard, og som du vil støde på i eksamensopgaver. Vi giver den derfor et navn:

Definition

Når man bruger notation **2.** kalder man udtrykket ' $f(x) = \dots$ ' **funktionsforskriften for f** eller blot forskriften for f .

Definitionsmængde ud fra forskrift

2.1

Når man ser på forskriften for en funktion, er det ofte muligt at bestemme funktionens definitionsmængde direkte. I langt de fleste tilfælde skal man blot undersøge, om der er nogen argumenter, der resulterer i, at man kommer til at **dividere med nul** eller tage **kvadratroden af et negativt tal**.

Eksempler

Vi ser på et par eksempler.

1. $f(x) = \frac{1}{x-2}$.

Vi ser, at der ikke indgår nogen kvadratrødder, så evt. begrænsninger i definitionsmængden må komme fra, at man dividerer med nul. Det sker netop når nævneren $(x-2)$ er 0. Det betyder, at kun når x er 2, kommer vi til at dividere med nul. Definitionsmængden er altså **alle tal undtagen 2**.

2. $g(x) = \sqrt{x-2}$.

Vi ser, at der ikke divideres med noget, så evt. begrænsninger i definitionsmængden må komme fra, at man tager kvadratroden af noget negativt. Det sker netop når, når det under kvadratrodstegnet $(x-2)$ er negativt. Men $x-2$ er negativt netop når x mindre end 2. Definitionsmængden er altså **alle tal, der er større end eller lig med 2**.

Tabelforståelse



I grundskolen har du været vant til at udfylde en tabel med støttepunkter, når du skulle tegne en graf for en funktion. Idéen er at skrive argumenter i den øverste række og deres funktionsværdier i nederste række.

$\mathbf{x}$	1	2	3	4	
$f(\mathbf{x})$	1	3	5	7	

En sådan tabel kan også bruges til at få et indtryk af en funktions opførsel, hvis man ikke har mulighed for at tegne grafen i et CAS, eller hvis man ikke kender forskriften (hvis det fx var målinger).

Grafisk forståelse

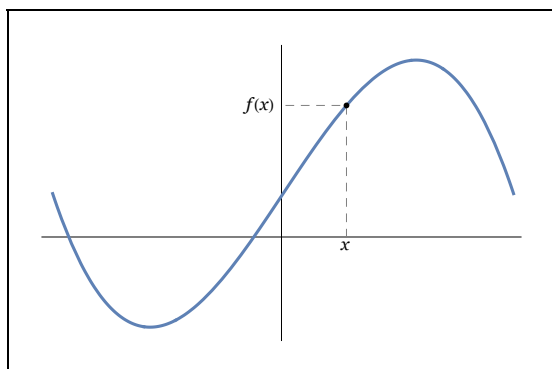


Fra grundskolen er du vant til at tegne grafer. Det er ofte årsagen til, at mange elever tror, at funktioner har noget med “y” og “x” at gøre. Det er vigtigt at skelne mellem funktioner og grafer, da det ellers kan være svært at forstå nogle af de mere avancerede ting, vi gør med funktioner senere i gymnasiet. Tænk derfor på grafer som **billeder af funktioner**. Grafen viser kun en del af, hvordan funktionen opfører sig og er et statisk billede, mens funktionen er en dynamisk maskine.

Følgende slår fast præcis hvad vi mener, når vi taler om grafen for en funktion:

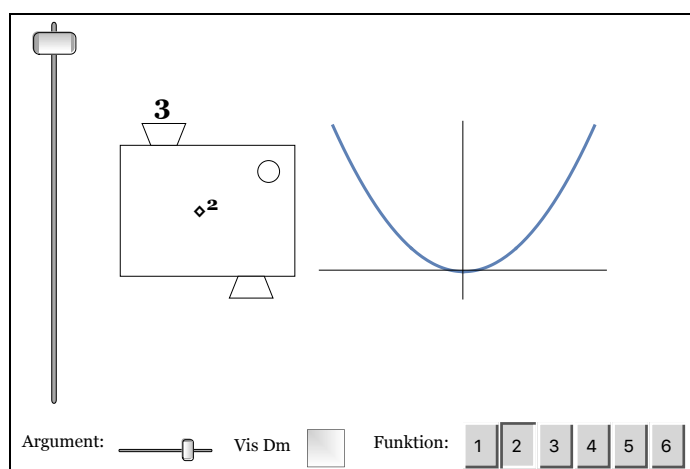
Definition

For en funktion, der laver tal om til tal, består **grafen** for f af de punkter (x, y) , som opfylder, at y er funktionsværdien af x .



Definitions­mængde grafisk

Følgende figur viser koblingen mellem maskiner og grafer og illustrerer, hvordan man på grafen kan aflæse definitions-mængden som den del af x -aksen, som grafen dækker over.



Ekstrema

En af de ting, som grafer er bedst til, er at give et indtryk af, hvor store og små funktionsværdier en funktion kan lave. Det er ofte interessant at se på, når man arbejder med funktioner. Det kalder man med fagsprog for **ekstrema**:

Ekstrema er flertalsformen af ekstremum, som er en fællesbetegnelse for minimum og maksimum, som er defineret på følgende måde:

Definition

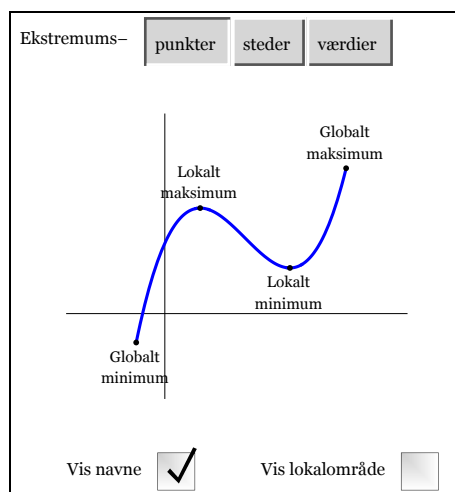
Lad $P = (x_P, y_P)$ være et punkt på grafen for en funktion f .

P kaldes et **lokalt maksimum** for f , hvis alle y -koordinater til punkter på grafen i nærheden er mindre end y_P . Hvis der ikke er nogen punkter på grafen for f , der har større y -koordinat end y_P , kaldes punktet et **globalt maksimum**.

Hvis P er et maksimum, kaldes x_P et **maksimumssted** og y_P en **maksimumsværdi**.

P kaldes et **lokalt minimum** for f , hvis alle y -koordinater til punkter på grafen i nærheden er større end y_P . Hvis der ikke er nogen punkter på grafen for f , der har større y -koordinat end y_P , kaldes punktet et **globalt minimum**.

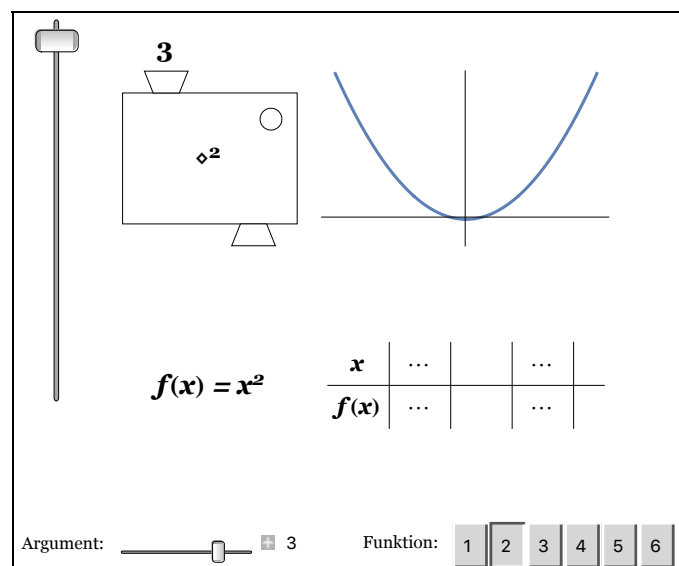
Hvis P er et minimum, kaldes x_P et **minimumssted** og y_P en **minimumsværdi**.



Bestemmelse af funktionsværdier

5

Følgende figur illustrerer, hvordan man bestemmer funktionsværdier med de forskellige repræsentationsformer:



Træning

5.1

Med denne figur kan du øve dig i at bestemme funktionsværdier ud fra argumenter, og baglæns:

Også baglæns ☐ Antal rigtige: 0/0

$$-5$$

$2 \cdot \diamond + 4$

$$?$$

Maskine
Forskrift
Tabel
Grafisk

?
?
0

Check
Ny
Nulstil

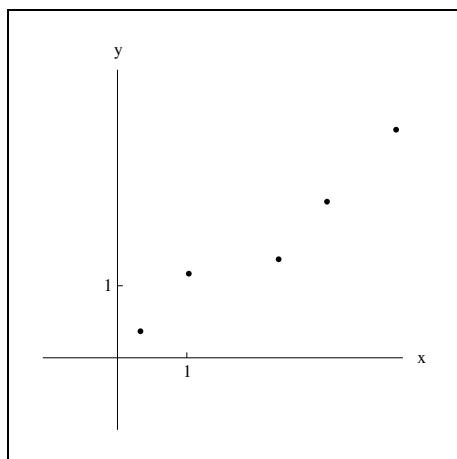
Regression

I denne del ser vi på, hvordan man kan opstille en matematisk model for sammenhængen mellem to størrelser ud fra målinger af dem.

Hvad er regression?

1

Når man i de naturvidenskabelige fag udfører et eksperiment, får man ofte et datasæt bestående af samhörørende målinger af to størrelser. Lad os kalde størrelserne x og y . Så kan vi se vores datasæt som en samling **punkter**, hvor punkternes koordinater svarer til samhörørende målinger. Disse punkter kalder vi **målepunkter**. Vi kan derfor visualisere vores datasæt ved at tegne målepunkterne ind i et koordinatsystem, hvorved vi får noget i stil med følgende figur:



Formålet med eksperimentet er ofte at efterprøve en teoretisk sammenhæng mellem x og y , som stammer fra en matematisk model for det, man undersøger. Denne sammenhæng er meget ofte en lineær sammenhæng.

I praksis ligger målepunkterne ikke præcis på en ret linje. De vil ligesom på figuren ovenfor ligge lidt spredt. Dette skyldes de forskellige fejlkilder, som man bruger en del tid på at diskutere i de naturvidenskabelige fag. Det er altså ikke nødvendigvis et tegn på, at teorien/modellen er forkert.

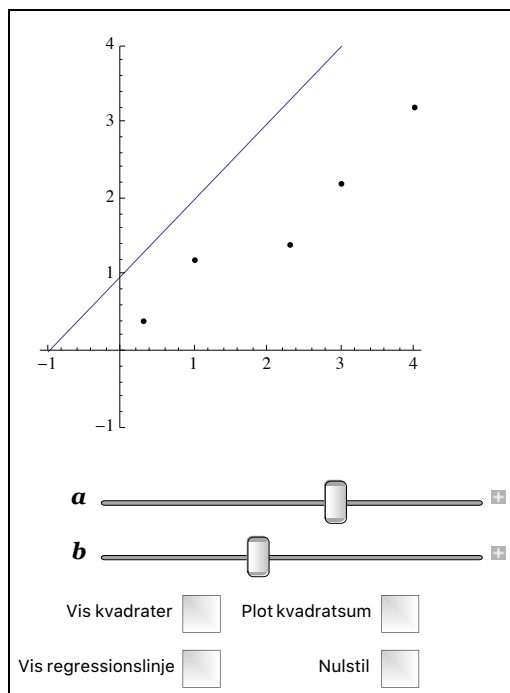
Vores mål i dette kapitel er at bestemme den linje, der passer bedst med målepunkterne. Denne linje kalder man også '**bedste rette linje**', '**tendenslinjen**' eller '**regressionslinjen**'. Vi starter med at definere, hvad vi vil mene med at en linje 'passer bedst'. Det fører til **mindste kvadraters metode**. Vi ønsker desuden at kunne sige noget om, hvor sikre vi er på, at der er en lineær sammenhæng mellem x og y . Til det formål indfører vi **forklaringsgraden** og **residualplots**.

Generelt bruger man ordet **regression**, når man bestemmer den kurve af en given type, som bedst passer med nogle punkter. At udføre regression handler altså om at **tilpasse kurver til punkter**.

Mindste kvadraters metode

2

I dette afsnit ser vi på den mest almindelige form for regression, nemlig lineær regression med **mindste kvadraters metode**. Hele afsnittet tager udgangspunkt i følgende figur:



Hvordan skal jeg bruge figuren?

1. Vælg først dit bud på den bedste rette linje ved at vælge hældning og begyndelsesværdi med skyderne.
2. Begrund dit valg: hvorfor netop den linje? Prøv at formulere din begrundelse på en måde, så du kan være sikker på, at alle vil finde frem til præcis samme linje som dig, hvis de hører din begrundelse.
3. Du fandt sandsynligvis ud af, at det er svært at forklare sin begrundelse særlig præcist i **2**. Den metode som GeoGebra, TI-Nspire, Maple, Excel og alle andre regneprogrammer bruger til at bestemme den bedste rette linje kaldes **mindste kvadraters metode**. Klik på 'Vis kvadrater'. Metoden fungerer ved at minimere det samlede areal af de kvadrater, du nu ser. Kvadraternes samlede areal kaldes **kvadratsummen**. Tænk over, hvorfor det er en fornuftig metode at **minimere kvadratsummen**. Fx ved at overveje følgende spørgsmål:
 - a. Hvad svarer sidelængden af kvadraterne til i forsøget?
 - b. Hvorfor sætte sidelængderne i anden? Hvilken betydning har det for punkter, der ligger langt fra linjen?
4. Forsøg nu at gøre kvadratsummen endnu mindre ved at ændre på skyderne. Husk at du kan holde Alt nede for at finjustere og Alt og Shift tasterne nede for at justere ekstra fint. Når du mener at have fundet den hældning og den begyndelsesværdi, der gør kvadratsummen mindst, så gå videre til næste trin.
5. Klik nu på 'Vis regressionslinje'. Den røde linje er den linje, der har den mindste kvadratsum. Fandt du den samme?
6. Uanset om du fandt regressionslinjen eller ej, så kan du nok godt se at ovenstående er en besværlig og langsommelig proces. I næste afsnit ser vi, hvordan man kan bestemme den optimale hældning og begyndelsesværdi ved brug af formler, så man slipper for at prøve sig frem på denne måde.
7. Vi kan også bruge figuren til at forstå, hvor idéen til bestemmelse af formlerne kommer fra:

Klik først på 'Nulstil' og så på 'Plot kvadratsum'. Denne tredimensionelle graf kan du **rotere** ved at trække i den. Du kan **zoome** ved at holde Alt-tasten nede, mens du trækker, og du kan **flytte kameraet** ved at holde shift-tasten nede mens du trækker.

Det smarte ved denne graf er, at vi kan visualisere kvadratsummen og hurtigt se, hvad der er den optimale hældning og begyndelsesværdi: Det er dem, der svarer til det punkt, som svarer til den laveste kvadratsum. Altså det punkt, der ligger i bunden af 'skålen'.

Ved at flytte på skyderne kan du flytte det blå punkt, der svarer til dit valg af hældning (a) og begyndelsesværdi (b). Punktet flytter sig langs den røde kurve, når du ændrer på a og langs den blå, når du ændrer på b .

Ved at eksperimentere med forskellige kameravinkler og værdier for a og b , kan man overbevise sig om, at det punkt, der svarer til den optimale hældning og begyndelsesværdi er det eneste punkt, der **både ligger i bunden af den røde og den blå kurve**. Det er denne egenskab, man bruger, når man udleder formlerne for regressionslinjens hældning og begyndelsesværdi ved brug af differentialregning.

Vi oversætter altså problemet med at bestemme den bedste rette linje til problemet med at **bestemme minimum for en funktion**. Vi er så heldige, at det at bestemme minimum for en funktion er en af standardteknikkerne i differentialregning.

Formler for a og b

2.0.1

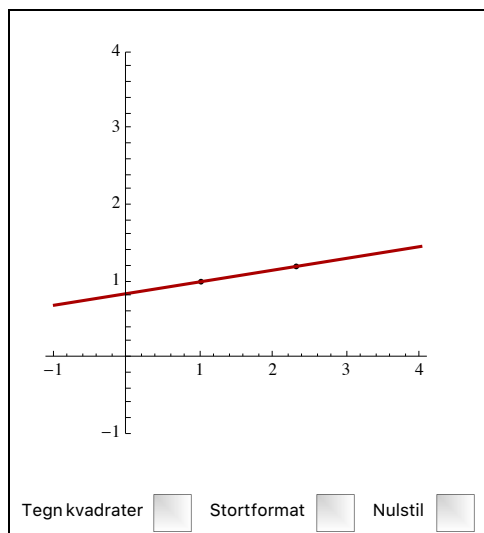
Sætning

Den linje, der bedst tilnærmer et datasæt $\{(x_i, y_i)\}_{i=1}^n$, har en hældning a_{reg} og begyndelsesværdi b_{reg} givet ved:

$$a_{\text{reg}} = \frac{\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum (x_i - \bar{x})^2}, \quad b_{\text{reg}} = \bar{y} - a_{\text{reg}}\bar{x}$$

Illustration

Følgende figur viser regressionslinjen for forskellige datasæt:

**Hvordan skal jeg bruge figuren?**

1. Du kan trække i punkterne for at flytte dem.
2. Klikker du ikke på et punkt, skaber du et nyt punkt (svarende til en ny måling). For at fjerne et punkt skal du holde Alt (PC) eller Cmd (Mac) tasten nede, når du klikker på punktet.
3. Prøv at lave en håndfuld punkter, som ligger nogenlunde på en ret linje.
 - a. Træk et af punkterne rundt for at få en fornemmelse for, hvilken betydning de enkelte punkter har for regressionslinjen.
 - b. Undersøg om der er forskel på at flytte et punkt vandret og lodret. Har den ene retning større betydning for regressionslinjen end den anden? Hvad svarer en vandret/lodret ændring til i et forsøg?
 - c. Har punkterne med stor x -koordinat større betydning end dem med lille x -koordinat?
 - d. Hvis et punkt ligger langt fra den linje, som de andre punkter med god tilnærmelse ligger omkring, hvad sker der så med regressionslinjen? Hvad bør det få af betydning for dine fysik/kemi/biologi-forsøg?
4. Flytter man på et punkt, opdager man typisk, at både hældning og begyndelsesværdi ændrer sig. Er det altid tilfældet? Prøv at eksperimentere dig frem til en ændring af et punkt, der kun resulterer i en ændring af begyndelsesværdien. Er det muligt kun at ændre på hældningen?

Vurdering af model

3

I dette afsnit vil vi se på to værktøjer til at vurdere kvaliteten af en model, man har opstillet ved regression.

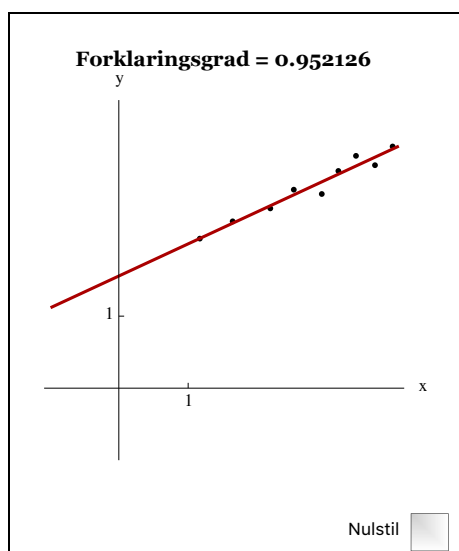
Forklaringsgrad

3.1

Forklaringsgraden er en indikator på, hvor sikre vi kan være på, at der er en lineær sammenhæng mellem de målte størrelser x og y . Generelt gælder følgende:

Jo tættere forklaringsgraden er på 1, jo mere tillid har vi til modellen.

Følgende figur kan bruges til at undersøge forklaringsgraden for forskellige datasæt:

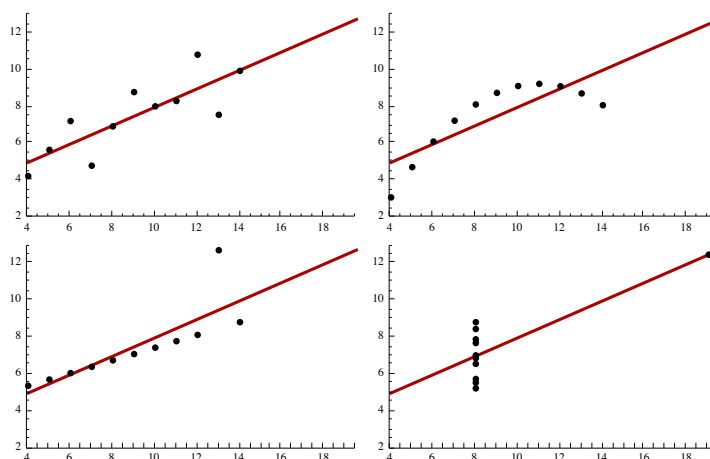


Hvordan skal jeg bruge figuren?

1. Du kan flytte på punkterne, tilføje punkter eller fjerne punkter. For at fjerne et punkt skal du holde Alt (PC) eller Cmd (Mac) tasten nede, når du klikker på punktet.
2. Undersøg om det passer, at forklaringsgraden er 0, når regressionslinjen er vandret, og 1, når den er skrå og punkterne ligger præcis på den.
3. Eksperimentér dig frem til en grænse for, hvor stor du mener, forklaringsgraden skal være, før man med rimelighed kan sige, at der er tale om en lineær sammenhæng.

Det er meget vigtigt at bemærke, at forklaringsgraden **intet siger om, om der virkelig er en lineær sammenhæng mellem de målte størrelser**. Den udtaler sig alene om, hvor godt linjen passer med punkterne. Vi kan altså ikke håbe på at kunne sige noget om en årsagssammenhæng mellem de to størrelser; blot fordi der er en linje, der passer godt med målepunkterne, behøver der slet ikke være nogen sammenhæng mellem de målte størrelser.

Følgende fire figurer skulle gerne give et indtryk af, at forklaringsgraden ikke siger ret meget i sig selv, da alle fire sæt af målepunkter har **samme regressionslinje og samme forklaringsgrad!**



Forklaringsgraden kan altså ikke stå alene, når vi skal vurdere, om det er fornuftigt at bruge en lineær model. I næste afsnit ser vi på residualplots, der er et værktøj, der kan supplere forklaringsgraden, når vi skal vurdere modeller.

Øvelse

<http://guessthecorrelation.com>

Hvor kommer forklaringsgraden fra?

3.1.1

Vi har følgende yderligheder:

På den ene side: Regressionslinjen er en vandret linje. I så fald tyder det på, at der ingen sammenhæng er mellem x og y , fordi vores bedste bud på en sammenhæng er en vandret linje, svarende til at y slet ikke afhænger af x .

På den anden side: Regressionslinjen er skrå og punkterne ligger præcis på den. I så fald er vi helt overbeviste om, at en lineær sammenhæng er en god model for sammenhængen.

I det første tilfælde vil vi altså være 0% sikre på, at der er en lineær sammenhæng mellem målepunkterne og i det andet ville vi være 100% sikre. Det kan vi opnå med følgende definition:

Definition

$$r^2 = \text{forklaringsgrad} = 1 - \frac{\text{kvadratsum for regressionslinje}}{\text{kvadratsum for vandret linje } (y = \text{gns}(y))}$$

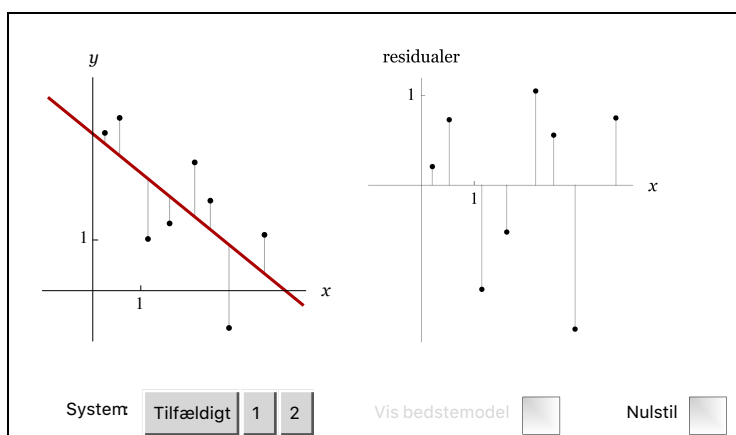
Residualplot

3.2

Når vi udfører regression på et datasæt, er computeren ligeglad med, om punkterne ligger fordelt omkring en ret linje. Metoden virker fint, selvom punkterne måske ligger perfekt på en parabel eller grafen for en anden type funktion. For at vurdere, om det er fornuftigt at bruge en lineær model, er det en god idé at se på det såkaldte **residualplot**. Plottet viser de lodrette afstande (residualer) mellem målepunkterne og regressionslinjen.

Idéen er, at hvis der er en lineær sammenhæng mellem størrelserne og evt. afvigelser skyldes måleusikkerhed, så bør punkterne ligge **tilfældigt spredt** omkring linjen, da det bør være lige sandsynligt at måle for store og for små værdier. Derfor vil man forvente at residualplottet ser tilfældigt ud.

Et system i residualplottet indikerer, at den lineære model ikke er optimal.



Matematisk modellering

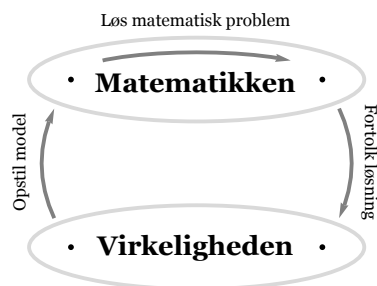
4

Den græske filosof Platon foreslog følgende verdensbillede: Verden er delt i to. Fænomenernes verden og idéernes verden. Fænomenernes verden, som er den vi sanser og oplever, består af foranderlige og uklare objekter (fænomener). Idéernes verden består af uforanderlige og perfekte objekter (idéer). Platon forestillede sig de ting, vi observerer i vores verden som en slags skygger af de perfekte idéer i idéernes verden. Når vi fx ser to heste, så bliver vi hurtigt enige om, at det er heste, selvom de måske har forskellig farve eller den ene er halt. Platon forklarede dette med, at vi med vores forstand havde forbindelse til idéernes verden og derfor kunne se at begge heste var skygger af 'idéen hest' (den ideelle hest).

Dette verdensbillede kan bruges til at forklare forskellen mellem matematik og de naturvidenskabelige fag: De naturvidenskabelige fag beskæftiger sig med fænomenernes verden og forsøger via undersøgelser af den at forstå, hvordan den fungerer. Matematikken beskæftiger sig kun idéernes verden: Matematikken er skabt i menneskehjernen og arbejder med abstrakte, perfekte begreber.

Da fagene på denne måde arbejder med forskellige verdener, er det overraskende, at matematik kan bruges til noget i de naturvidenskabelige fag. Men det er en af de nok mest fascinerende aspekter ved matematikken, at den er et så formidabelt værktøj til at beskrive den naturlige verden. Denne beskrivelse foregår ved såkaldt **matematisk modellering**, som er hele årsagen til, at der undervises i matematik på alle grundskoler og gymnasier i hele verden. Man kan sige at matematisk modellering **bygger bro** mellem fænomenernes verden (virkeligheden) og idéernes verden.

Matematisk modellering kan beskrives ud fra følgende figur:



Idéen er, at man starter med et problem i den virkelige verden. Herefter **opstiller** man en matematisk model for problemstillingen. På den måde laver man problemet om til et matematisk problem, som man **løser** med det matematik, man har lært. Løsningen af det matematiske problem **fortolker** man til sidst ved brug af modellen til en løsning på det oprindelige problem.

Af: Helle Thyregod Hansen,

Jan Agentoft Nielsen og

Rikke Sønderby

- Rødkilde gymnasium

