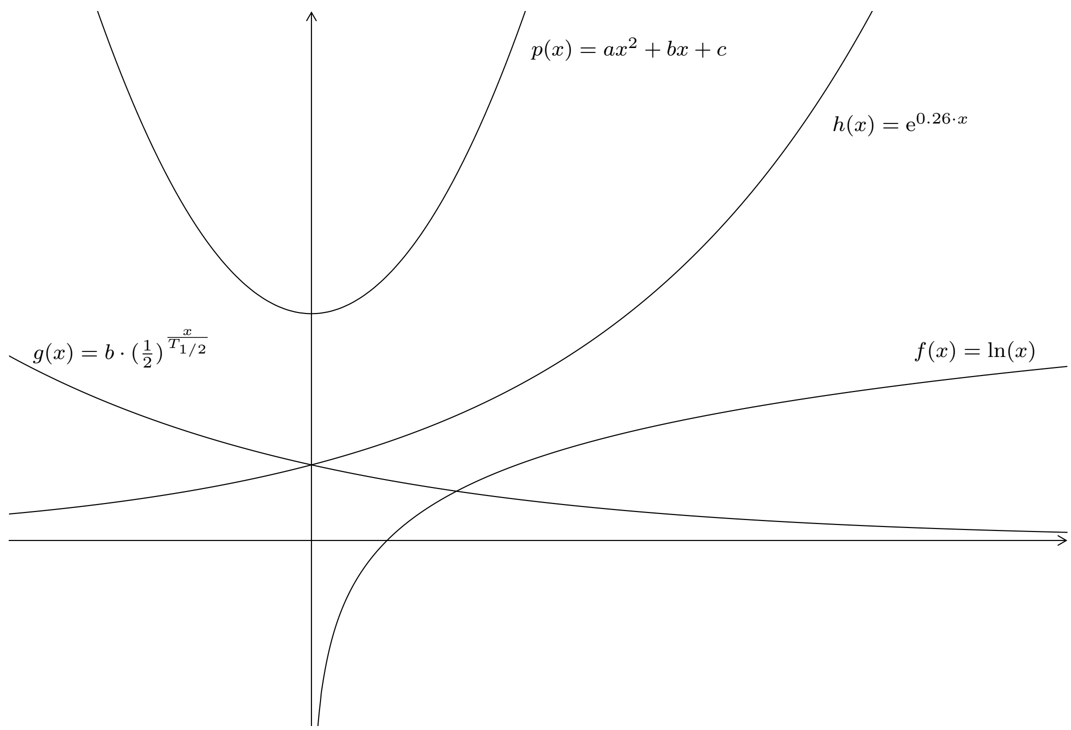
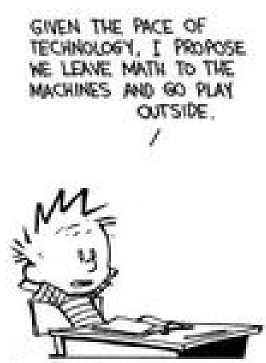
Funktioner og ligninger

Thomas Heide-Jørgensen, Rosborg Gymnasium & HF





Indhold

Indledning **3**

1 Funktioner **4**

1.1 Hvad er en funktion? 4

1.1.1 Repræsentationsformer 4

1.1.2 Definitions- og værdimængde 6

1.1.3 Hvad er en funktion ikke? 6

1.1.4 Opgaver 7

1.2 Lineære funktioner 8

1.2.1 Hældningskoefficient ud fra to punkter 9

1.2.2 Skæring mellem to linjer 11

1.2.3 Regression 12

1.2.4 Opgaver 16

1.3 Proportionalitet 20

1.3.1 Ligefrem proportionalitet 20

1.3.2 Omvendt proportionalitet 21

1.3.3 Opgaver 23

1.4 Sammensatte og inverse funktioner 25

1.4.1 Sammensatte funktioner 25

1.4.2 Inverse funktioner 25

1.4.3 Opgaver 28

1.5 Eksponential- og logaritmefunktioner 31

1.5.1 Det udvidede potensbegreb 31

1.5.2 Eksponentialfunktioner 35

1.5.3 Logaritmefunktionerne 38

1.5.4 Halverings- og fordoblingskonstant for eksponentialfunktioner 41

1.5.5 Alternative forskrifter for eksponentialfunktioner 43

1.5.6 Ligninger med eksponentielle eller logaritmiske udtryk 44

1.5.7 Opgaver 47
1.6 Potensfunktioner 53
1.6.1 Forskrift 53
1.6.2 Graf 53
1.6.3 Bestemmelse af forskrift ud fra to punkter 54
1.6.4 *Procent-procent*-vækst 55
1.6.5 Opgaver 57
1.7 Trigonometriske funktioner 61
1.7.1 Radian 61
1.7.2 Definition af de trigonometriske funktioner 62
1.7.3 Grafer 63
1.7.4 Trigonometriske ligninger 64
1.7.5 Harmoniske svingninger 65
1.7.6 Opgaver 68

2 Polynomier og andengradsligninger **73**
2.1 Andengradspolynomier 74
2.1.1 Forskrift 74
2.1.2 Graf og betydning af koefficienterne a,b og c 74
2.1.3 Rødder 78
2.2 Løsning af andengradsligninger 79
2.2.1 Andengradsligninger med $c = 0$ og nulreglen: 79
2.2.2 Andengradsligninger med $b = 0$: 80
2.2.3 Generelle andengradsligninger: 82
2.3 Faktorisering 88
2.3.1 Faktorisering af et andengradspolynomium 88
2.4 Opgaver 90

3 Lidt om parallelforskydning **96**
3.1 Parallelforskydning af grafer 96
3.1.1 Opgaver 98

Indledning

Dette kompendium er beregnet til brug i undervisningen i matematik på A-niveau i gymnasiet. Det dækker forløb om alle de funktionstyper, der typisk optræder (kapitel 1), samt metoder til løsning af ligninger, hvori der indgår eksponentielle eller logaritmiske udtryk (kapitel 1), andengradsligninger (kapitel 2) og trigonometriske ligninger (primært med CAS – dvs. Nspire) (kapitel 1). Desuden er der et lille afsnit om parallelforskydning, som man kan gennemgå, når det passer ind (kapitel 3).

Thomas Heide-Jørgensen

Rosborg Gymnasium, 24. september 2020.

Kapitel 1

Funktioner

1.1 Hvad er en funktion?

Det er muligt at definere funktioner på en ganske abstrakt måde, hvilket vi ikke vil gøre her. I stedet vil vi fokusere på eksempler, der illustrerer, hvad en funktion er, og hvad en funktion *ikke* er.

1.1.1 Repræsentationsformer

Vi tænker typisk på en funktion, f, som en ***forskrift***:

$$f(x) = \frac{1}{2}x - 1,$$

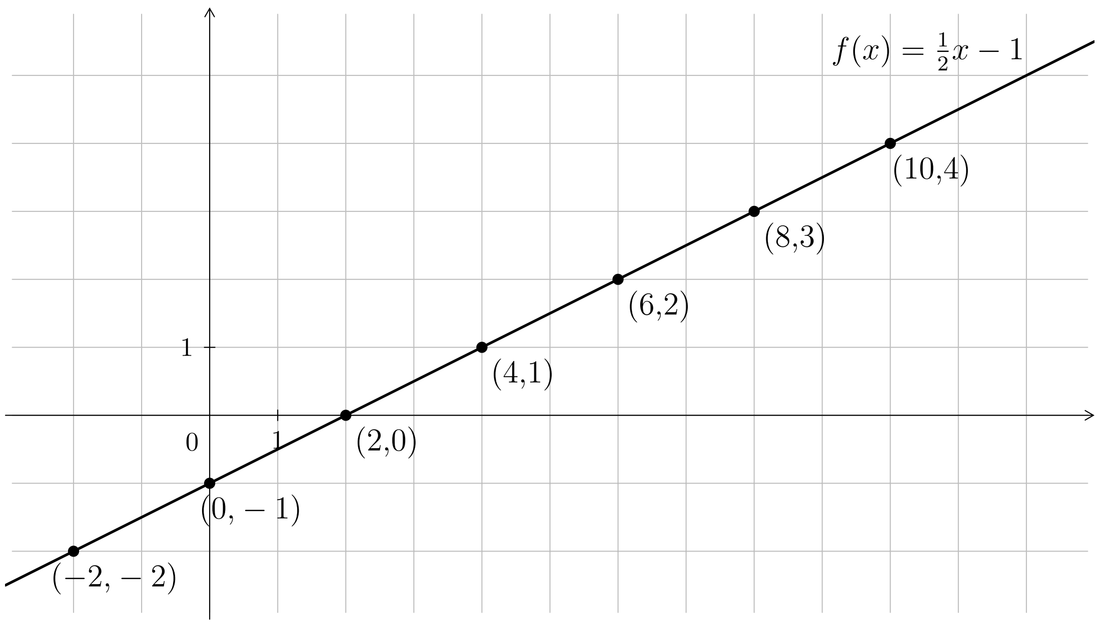
hvor vi altså til ethvert x-værdi, kan udregne en tilhørende y-værdi, nemlig funktionsværdien $f(x)$. Hvis f.eks. vi har x-værdien $x = 10$, så vil den tilhørende y-værdi være $y = f(10) = \frac{1}{2} \cdot 10 - 1 = 4$. Dette (altså forskriften) kaldes en repræsentationsform for en funktion f.

Vi kan dermed lave en hel ***tabel*** over punkter, der via funktionen f knytter x-værdier til de tilhørende y-værdier. En tabel er en anden mulig repræsentationsform for en funktion f. Fra grundskolen kender vi et andet navn på sådan en tabel, nemlig *sildeben*.

x	-2	0	2	4	6	8	10
$f(x)$	-2	-1	0	1	2	3	4

Dette betyder at punkterne $(-2, -2), (0, -1), (2, 0), (4, 1), (6, 2), (8, 3)$ og $(10, 4)$ ligger på ***grafen*** for f. En anden repræsentationsform for en funktion f, er dens graf.

Altså mængden af punkter i koordinatsystemet, der opfylder at $(x,y) = (x,f(x))$, dvs. punkter, hvor y-værdierne lige præcis er de funktionsværdier, der hører til $x-$værdierne. Grafen tegnes, som vi ved, i et koordinatsystem:



Den sidste repræsentationsform er den ***sproglige***. I denne sammenhæng vil vi sige, at funktionen f, tager et tal x, ganger tallet med en halv, og trækker ét fra.

Det er ikke så ofte man selv skal eksplicit skriver den sproglige repræsentationsform for en funktion ned, men man bruger den ofte underforstået i den mundtlige del af matematikken, ligesom det er vigtigt at kunne oversætte en sproglig repræsentation til f.eks. en forskrift.

Et andet eksempel på en sproglig repræsentation for en funktion kan være en beskrivelse af en virkelig problemstilling, f.eks.

Antallet biler i et land var i år 2010 på 573050. I den efterfølgende periode steg antallet af biler med 2350 om året.

Dette giver anledning til en forskrift på formen

$$f(x) = 2350x + 573050$$

hvor x er antal år efter 2010 og $f(x)$ er det samlede antal biler i det pågældende land.

1.1.2 Definitions- og værdimængde

Definition 1.1. Hvis f er en funktion, så vil mængden af x-værdier for hvilke $f(x)$ giver mening, altså for hvilke vi kan udregne den tilhørende funktionsværdi $f(x)$, kaldes definitionsmængden for f, $\mathrm{Dm}(f)$.

Definition 1.2. Hvis f er en funktion, så kalder vi mængden af funktionværdier, der fremkommer ved at finde funktionsværdierne for alle $x \in \mathrm{Dm}(f)$ for værdimængden for f, $\mathrm{Vm}(f)$.

Eksempel 1.1. Lad $f(x) = \sqrt{x}$. Så vil definitionsmængden for f være $\mathrm{Dm}(f) = [0,\infty[$, idet alle tal større end eller lig med nul kan indsættes i f, og fordi vi ved, at det ikke er tilladt at tage kvadratroden af tal, der er mindre end nul.

Værdimængden vil svare til alle funktionsværdierne. Den mindste værdi er nul (svarende til $x = 0$), og der er ikke nogen største værdi, da $\sqrt{x} \to \infty$ for $x \to \infty$. Det vil altså sige at alle værdier i intervallet $[0,\infty[$ kan opnås ved f, så $\mathrm{Vm}(f) = [0,\infty[$.

$\diamondsuit$

Bemærkning 1.1. At $\mathrm{Vm}(f) = \mathrm{Dm}(f)$ i ovenstående eksempel er et tilfælde. Det gælder nogen gange, men ikke altid.

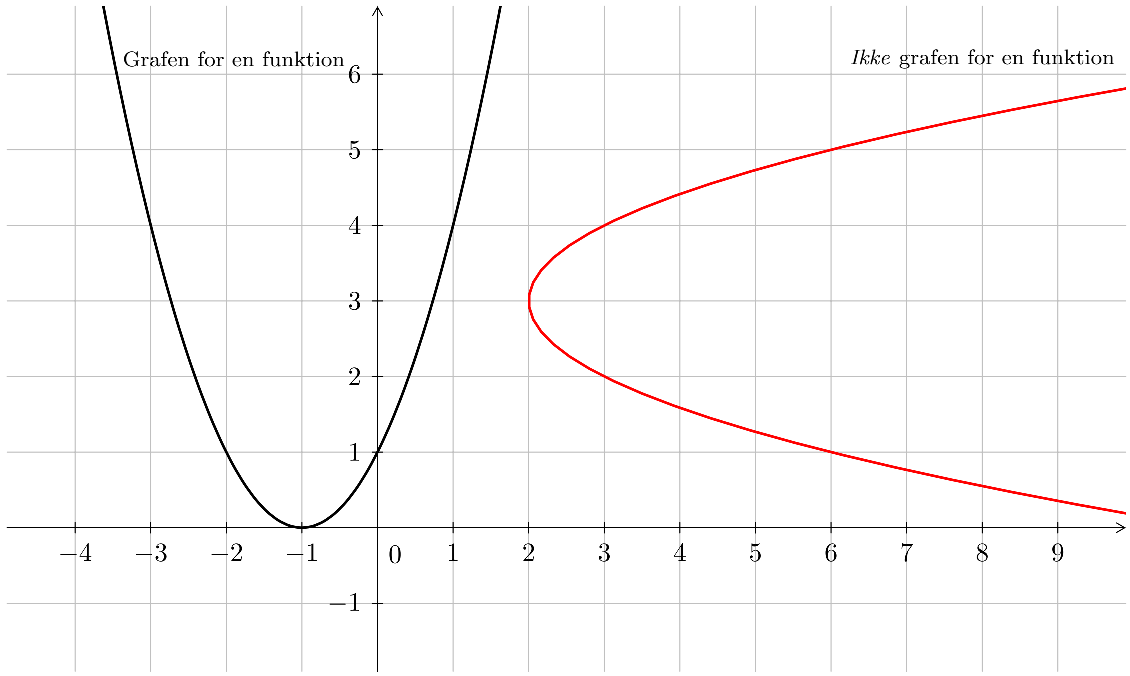
$\diamondsuit$

1.1.3 Hvad er en funktion ikke?

Der er selvfølgelig mange ting, der ikke er en funktion, men i denne sammenhæng er der én vigtig ting at bide mærke i. Der står i forrige afsnit, at en funktion knytter *netop én* y-værdi til hver x-værdi. Det betyder, at udtryk, som f.eks. $f(x) = \pm\sqrt{x}$ *ikke* definerer en funktion. Grafisk kan dette forstås, som at grafen for en funktion f *aldrig* kan have to eller flere punkter, der ligger lodret over hinanden.

Omvendt kan en funktion godt have to x-værdier, der giver samme y-værdi, så grafen for en funktion, kan godt have punkter, der ligger vandret ved siden af hinanden.

I nedenstående koordinatsystem er der tegnet to kurver. Den ene (den sorte) er grafen for en funktion. Bemærk, at der er mange y-værdier, der har to tilhørende x-værdier. Dette er tilladt. Den anden (den røde) er *ikke* grafen for en funktion, da der er mange x-værdier, som har to tilhørende y-værdier. Dette er ikke tilladt.



1.1.4 Opgaver

Opgave 1 Bestem *forskriften*, lav en *funktionstabel* og tegn *grafen* for følgende sproglige repræsentationer af en funktion f:

a) Funktionen f tager et tal, x, ganger det med tre, og lægger syv til.

b) Funktionen f tager et tal, x, ganger det med minus fire, og trækker to fra.

Opgave 2 Bestem *forskriften*, lav en *funktionstabel* og tegn *grafen* for følgende sproglige repræsentationer af en funktion f:

a) Funktionen f tager et tal, x, sætter det i anden, og trækker to fra.

b) Funktionen f tager et tal, x, lægger to til, og tager kvadratroden.

Opgave 3 Find $\mathrm{Dm}(f)$ og $\mathrm{Vm}(f)$ for følgende funktioner:

a) $f(x) = \dfrac{1}{x}$

b) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$

c) $f(x) = \sqrt{-x}$

d) (svær) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 4}$

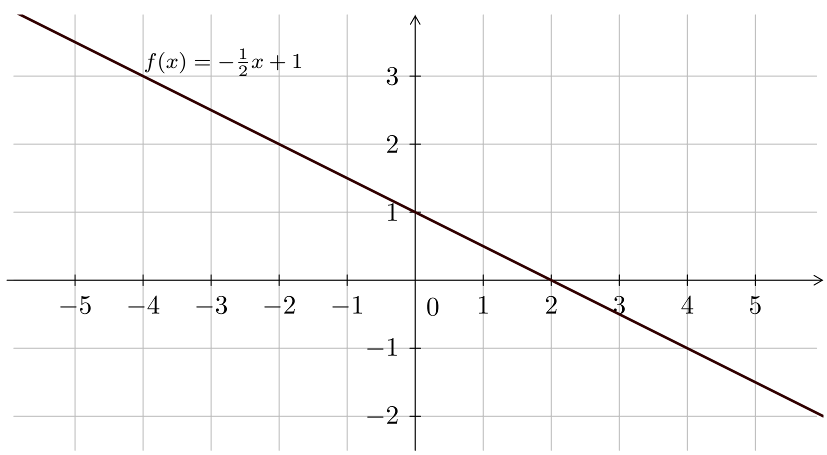
1.2 Lineære funktioner

En lineær funktion har forskriften

$$f(x) = ax + b, \tag{1.1}$$

hvor a er hældningskoefficienten og b er skæring med y-aksen.

Som eksempel kan grafen for den lineære funktion $f(x) = -\frac{1}{2}x + 1$ ses nedenfor. Vi ser på grafen, at $f(x)$ aftager med en halv, hver gang x forøges med én, da hældningskoefficienten er $a = -\frac{1}{2}$. Desuden ser vi at grafen skærer y-aksen i punktet (0,1), da $b = 1$.



Lineære funktioner er karakteriseret ved, at hver gang den uafhængige variabel x vokser med én, så vil den afhængige variabel $f(x)$ vokse med hældningskoefficienten a. Hvis a er negativ er der tale om negativ vækst, altså at f aftager.

Det er vigtigt at kunne opstille lineære modeller ud fra en sproglig kontekst, og fortolke konstanterne i en lineær model. Dette gives to eksempler på herunder:

Eksempel 1.2. *I 2005 betalte hver elforbruger i Roskilde 382,50 kr. i fast årligt abonnement til Roskilde Elforsyning. Derudover betales der 1,5697 kr. pr. kWh for elforbruget.*

Opstil en model, der beskriver sammenhængen mellem den samlede udgift (i kr.) til el i 2005 og elforbruget (målt i kWh).

Vi ser at modellen er lineær, da udgiften vokser med et fast tal (1,5697 kr) pr. brugt kWh. Heraf ses også, at hældningskoefficienten er $a = 1{,}5697$. Den faste abonnementspris på 382.50 kr. er vores startværdi, så $b = 382{,}50$.

Modellen er altså

$$f(x) = 1{,}5697x + 382{,}50$$

hvor x angiver elforbruget målt i kWh, og $f(x)$ den samlede udgift i kroner.

◊

Eksempel 1.3. *Statens samlede indtægter fra boligejerne kan for de seneste år med god tilnærmelse beskrives ved følgende model:*

$$S(x) = 1{,}82x + 0{,}5$$

hvor x betegner antal år efter 2000, og S betegner statens boligindtægter, målt i mia. kr.

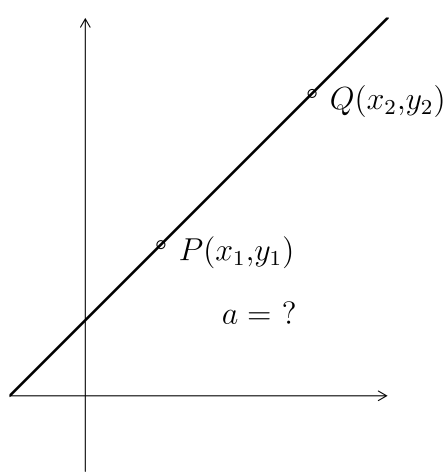
Hvad fortæller tallene 1,82 og 0,5 om udviklingen i statens boligindtægter?

Vi kan se at modellen er lineær, og at hældningskoefficienten $a = 1{,}82$ fortæller, at statens samlede indtægter fra boligejerne vokser med 1,82 mia. kr. per år efter 2000. Skæring med y-aksen $b = 0{,}5$ er startværdien, der siger at statens indtægter fra boligejerne i basisåret 2000 var på 0,5 mia kr.

◊

1.2.1 Hældningskoefficient ud fra to punkter

Hvis vi kender to punkter P og Q på en ret linje så kan vi bestemme linjens hældningskoefficient.



Dette gøres ved hjælp af følgende sætning:

Sætning 1.1. *Hvis $P(x_1,y_1)$ og $Q(x_2,y_2)$ er to forskellige punkter på en ret linje, med funktionsforskriften $f(x) = ax + b$, så er hældningskoefficienten a givet ved*
$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Bevis. Fordi både P og Q ligger på linjen med forskriften $f(x) = ax + b$, så må vi indsætte punkterne i forskriften, så vi får to ligninger:

$$y_1 = ax_1 + b \quad \text{og} \quad y_2 = ax_2 + b.$$

Tager vi nu den anden ligning og trækker y_1 fra på begge sider får vi

$$y_2 - y_1 = ax_2 + b - y_1.$$

Nu indsættes $ax_1 + b$ i stedet for y_1 på højresiden (husk at $y_1 = ax_1 + b$). Derved får vi

$$y_2 - y_1 = ax_2 + b - (ax_1 + b) = ax_2 + b - ax_1 - b = ax_2 - ax_1.$$

Så trækker vi a udenfor en parentes på højresiden, hvilket giver

$$y_2 - y_1 = a(x_2 - x_1).$$

Division[1] med $x_2 - x_1$ på begge sider af lighedstegnet giver så

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{a(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1} = a,$$

med andre ord

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

hvilket var det, vi skulle bevise. □

Hvis vi kender hældningen samt et punkt på en linje, kan vi også bestemme skæringen med y-aksen ved at indsætte punkt of hældning i forskriften og derefter isolere b.

Eksempel 1.4. Vi vil finde forskriften for den linje, der går gennem punkterne $(-3,4)$ og $(1,-8)$ (uden at tegne den!). Først findes hældningskoefficienten. Fra Sætning 1.1 har vi en formel, hvor vi kan indsætte punkterne. I vores tilfælde er $(x_1,y_1) = (-3,4)$ og $(x_2,y_2) = (1,-8)$. Dette giver os, at hældningen er

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-8 - 4}{1 - (-3)} = \frac{-12}{4} = -3.$$

[1] Vi ved at $x_2 - x_1$ ikke er nul (man må ALDRIG dividere med nul), da linjen ikke er lodret, for så er f ikke en funktion.

Så findes skæring med y-aksen (altså konstanten b) ved at sætte det ene af punkterne på linjen, samt hældningskoefficienten $a = -3$ ind i forskriften $f(x) = ax + b$ (vi bruger punktet $(1, -8)$):

$$-8 = -3 \cdot 1 + b,$$

hvilket ved isolering af b giver

$$b = -8 + 3 = -5$$

Altså er forskriften givet ved

$$f(x) = -3x - 5.$$

$\diamondsuit$

1.2.2 Skæring mellem to linjer

I dette afsnit skal vi se et eksempel, der viser hvordan man finder to linjers skæringspunkt (såfremt de ikke er parallelle!). Givet to linjer

$$f(x) = 2x + 3 \quad \text{og} \quad g(x) = -x + 1,$$

skal vi altså finde deres skæringspunkt. Bemærk at linjerne *ikke* er parallelle (de har ikke samme hældning). Der hvor linjerne skærer hinanden, må der specielt gælde, at y-værdierne er ens. Det vil sige, at $f(x) = g(x)$[2]. Vi skal altså løse ligningen:

$$2x + 3 = -x + 1.$$

Hvis vi lægger x til og trækker 3 fra på hver side af lighedstegnet får vi

$$2x - 3 + x - 3 = -x + 1 + x - 3,$$

hvilket reduceres til

$$3x = -2.$$

Division med 3 giver så

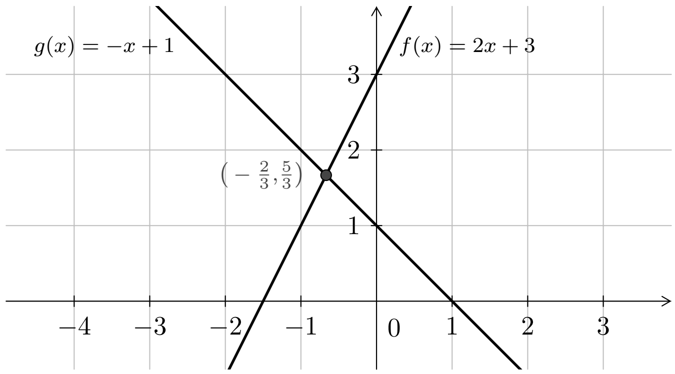
$$x = -\frac{2}{3}.$$

Dette indsættes nu i en forskrifterne (det er lige meget hvilken), så vi kan finde y-værdien (vi indsætter f):

$$f(-\tfrac{2}{3}) = 2 \cdot (-\tfrac{2}{3}) + 3 = -\frac{4}{3} + 3 = \frac{5}{3}.$$

Altså er skæringspunktet $\left(-\frac{2}{3}, \frac{5}{3}\right)$.

[2] Der gælder *altid*, at hvis man skal finde skæringspunkter for grafer, så skal man løse den ligning, der fremkommer ved at sætte forskrifterne lig med hinanden, for at finde x-værdien (eller værdierne) til skæringspunktet (eller skæringspunkterne)



1.2.3 Regression

I gymnasiet skal vi kunne lave fire typer af regression, nemlig lineær, eksponentiel, potens og polynomiel regression. At lave regression betyder:

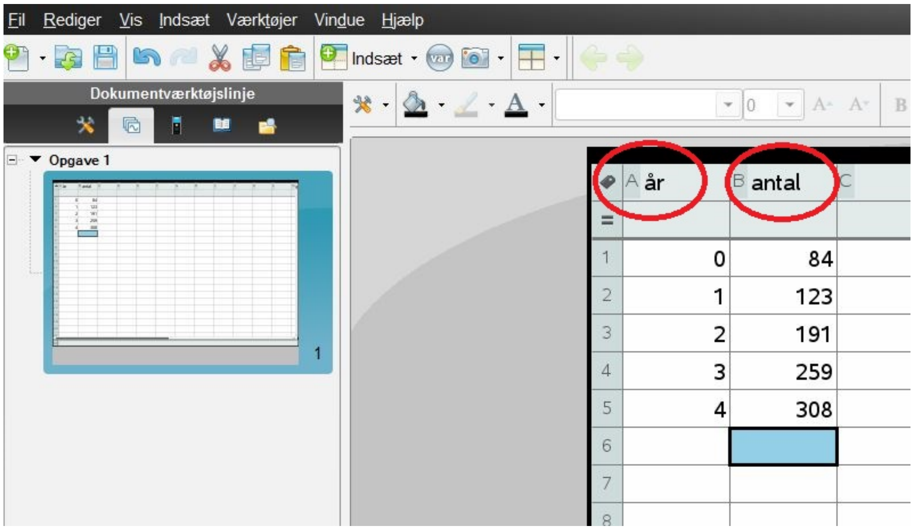
> *Givet et datasæt bestående af et antal punkter (dvs. x- og y-værdier der hører sammen i par), der kan tegnes i et koordinatsystem, så skal vi finde forskriften for den lineære funktion, den eksponentialfunktion, den potensfunktion eller det polynimium, der bedst tilnærmer punkterne.*

I gamle dage (dvs. før IT-værktøjer vandt sit indpas i matematikken) var dette en nøjsommelig opgave på millimeter-, enkeltlogaritmisk- eller dobbeltlogaritmisk papir. Nu gøres det på computer, f.eks. i Nspire.

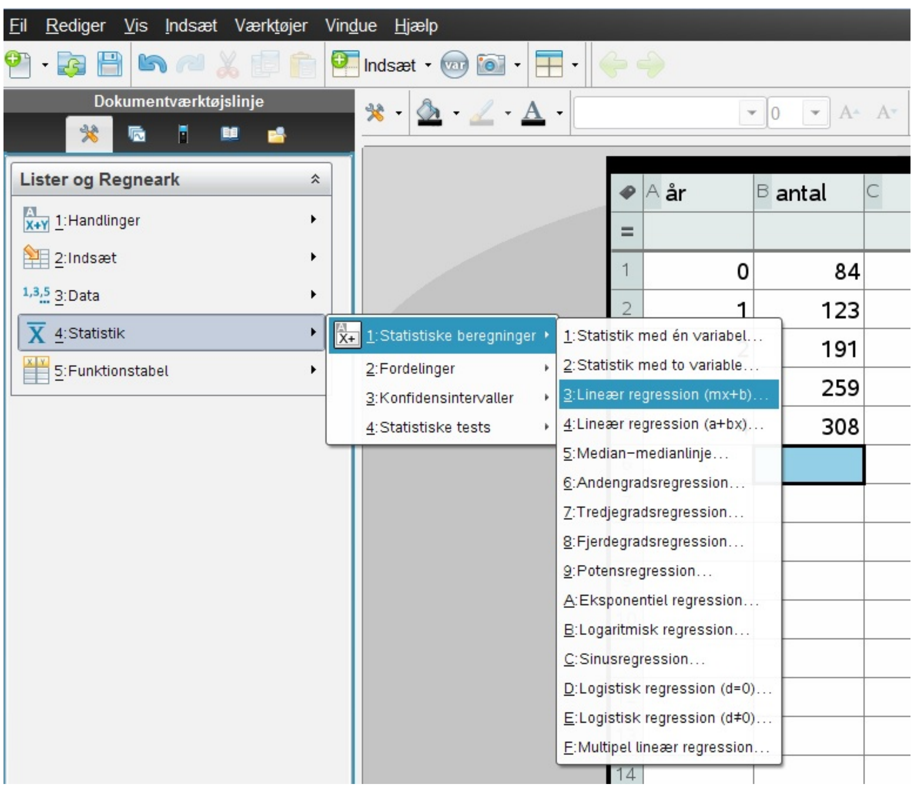
Herunder følger en lille opskrift på hvordan man udfører selve regressionen i Nspire. Vi tager udgangspunkt i følgende opgavetekst:

> Nedenstående tabel viser det antal laks, der årligt blev fanget i Skjern Å i perioden 2002-2006.
>
> | År | 2002 | 2003 | 2004 | 2005 | 2006 |
> |---|---|---|---|---|---|
> | Antal | 84 | 123 | 191 | 259 | 308 |
>
> Antallet af fangede laks kan med god tilnærmelse beskrives ved en lineær model
> $$f(x) = ax + b,$$
> hvor x er antal år efter 2002, og $f(x)$ er det antal laks, der blev fanget. Bestem tallene a og b.

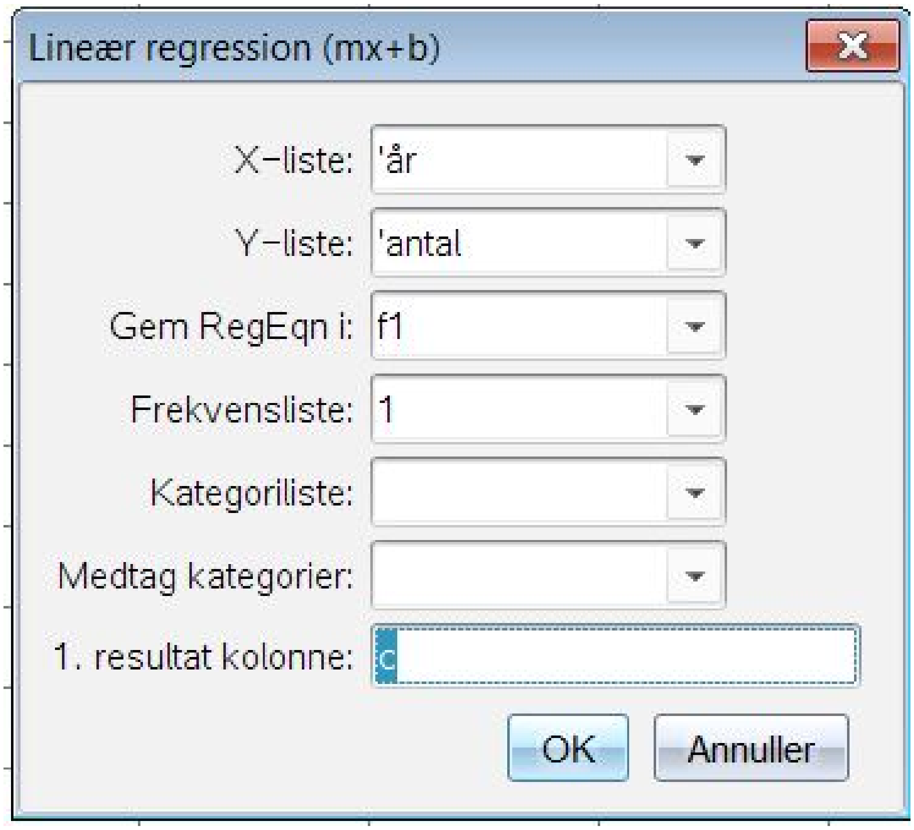
Allerførst bemærkes det *vigtige*, at i modellen angiver x antal år *efter* 2002, hvilket betyder at når vi indtaster tallene i Nspire, så skal 2002 skrives som 0, 2003 som 1, 2004 som 2 osv. Dette ses nedenfor i applikationen `Lister og Regneark`. Husk at navngive kolonnerne (i nedenstående `år` og `antal`, markeret med rødt).



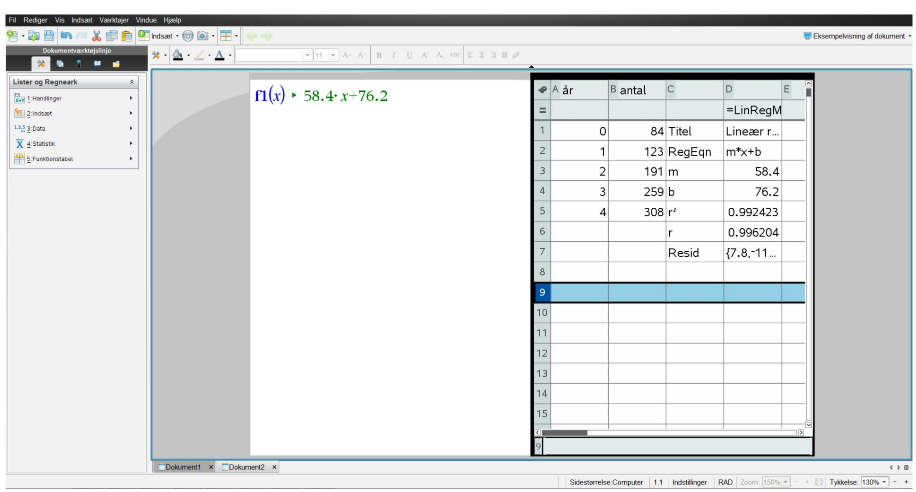
Nu skal regressionen laves. I dette tilfælde er det naturligvis *lineær* regression, men man vælger selvfølgelig den type der passer til opgaven. Vi arbejder stadig i `Lister og Regneark`, og trykker på følgende:



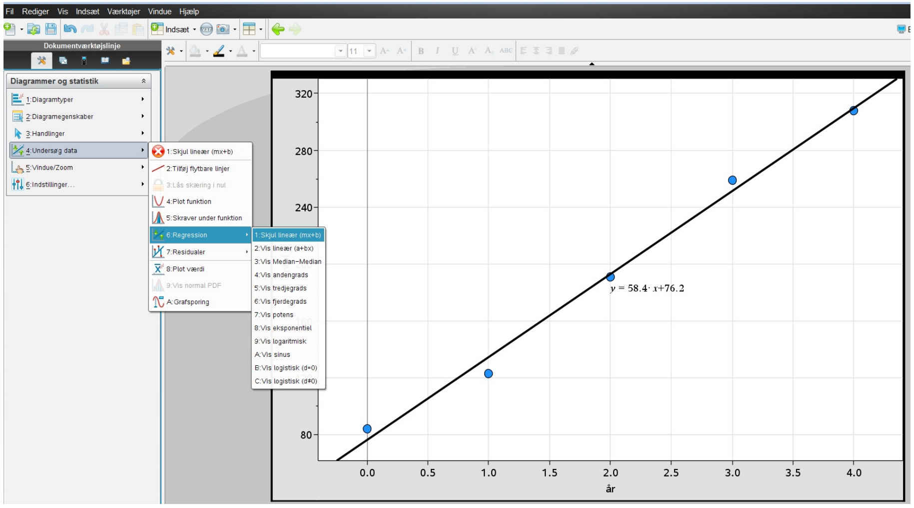
Dette giver følgende menu, der udfyldes med relevante informationer. Husk at bemærke hvad der står i `Gem RegEqn i:`, for det er navnet på den funktion, som Nspire gemmer forskriften for den fundne regressionsligning i (her altså `f1`).



Dette giver de relevante informationer i regnearket til højre, og til venstre i applikationen `Noter`, kan vi bruge regressionsfunktionen, der kaldes frem i et matematikfelt ved `f1(x)` efterfulgt af `enter`. Vi bemærker i øvrigt, vi har fundet ud af, at $a = 58{,}4$ og $b = 76{,}2$.



Ønsker man desuden at afbilde regressionsfunktionen sammen med punkterne i et koordinatsystem, så kan dette eksempelvis gøre i applikationen `Diagrammer og statistik`, hvor man tilføjer variablen `år` på x-aksen og variablen `antal` på y-aksen. Herefter tilføjes grafen gennem menuen til venstre.


Fil Rediger Vis Indsæt Værktøjer Vindue Hjælp
Dokumentværktøjslinje
Diagrammer og statistik
1:Diagramtyper
2:Diagramegenskaber
3:Handlinger
4:Undersøg data
5:Vindue/Zoom
6:Indstillinger...
1:Skjul lineær (mx+b)
2:Tilføj flytbare linjer
3:Lås skæring i nul
4:Plot funktion
5:Skraver under funktion
6:Regression
7:Residualer
8:Plot værdi
9:Vis normal PDF
A:Grafsporing
1:Skjul lineær (mx+b)
2:Vis lineær (a+bx)
3:Vis Median-Median
4:Vis andengrads
5:Vis tredjegrads
6:Vis fjerdegrads
7:Vis potens
8:Vis eksponentiel
9:Vis logaritmisk
A:Vis sinus
B:Vis logistisk (d=0)
C:Vis logistisk (d≠0)
y = 58.4· x+76.2
320
280
240
80
0.0
0.5
1.0
1.5
2.0
2.5
3.0
3.5
4.0
år

1.2.4 Opgaver

Opgave 1 (Uden hjælpemidler) En lineæer funktion er givet ved forskriften

$$f(x) = -3x + 7.$$

a) Udfyld nedenstående tabel for f.

x	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$						

b) Hvilke af følgende punkter $P_1(-4{,}17)$, $P_2(-3{,}16)$ og $P_3(4,-4)$ ligger på grafen for f?

c) Angiv hældningskoefficienten og skæringspunktet med y-aksen for grafen for f.

d) Hvad er x når $f(x) = -10$?

Opgave 2 (Uden hjælpemidler) Om en lineæer funktion vides at hældningkoefficienten er -2 og at den skærer y-aksen i punktet $(0{,}1)$. Hvad er denne linjes ligning?

Opgave 3 (Uden hjælpemidler) Undersøg om punktet $(-2{,}5)$ ligger på grafen for:

a) $f(x) = -x + 3$

b) $g(x) = 3x + 11$

c) $h(x) = -4x - 2$

Opgave 4 (Uden hjælpemidler) Lad $f(x) = -3x + 8$.

a) Bestem to punkter der ligger på grafen for f (begrund dit svar).

b) Bestem to punkter der *ikke* ligger på grafen for f (begrund dit svar).

Opgave 5 (Uden hjælpemidler) Grafen for en lineær funktion går gennem punkterne $(-1,-4)$ og $(2{,}5)$. Hvad er hældningskoefficienten for f?

Opgave 6 (Uden hjælpemidler) Bestem forskriften for $f(x) = ax + b$, når

a) Punkterne $P(2{,}8)$ og $Q(9{,}15)$ ligger på grafen for f.

b) Punkterne $P(-2{,}6)$ og $Q(9,-15)$ ligger på grafen for f.

c) Punkterne $P(4{,}2)$ og $Q(0,-6)$ ligger på grafen for f.

d) Punkterne $P(1{,}2)$ og $Q(-3,-4)$ ligger på grafen for f.

Opgave 7 (Uden hjælpemidler) Bestem en forskrift for den lineære funktion, hvis graf går gennem punkterne $P(3{,}1)$ og $Q(7{,}9)$.

Opgave 8 (Uden hjælpemidler) Grafen for en lineær funktion $f(x)$ går gennem punkterne $A(3{,}7)$ og $B(9{,}25)$.

Bestem en forskrift for $f(x)$.

Opgave 9 (Uden hjælpemidler) En funktion f har forskriften

$$f(x) = 7x + b,$$

hvor b er et tal. Punktet $P(3{,}31)$ ligger på grafen for f.

Bestem tallet b.

Opgave 10 (Uden hjælpemidler) I perioden 2004-2008 er det årlige offentlige forbrug steget med 18,5 mia. kr. pr. år. I 2004 var det årlige offentlige forbrug 388 mia. kr.

Indfør passende variable, og opstil et udtryk, der beskriver udviklingen i det årlige offentlige forbrug som funktion af tiden.

Opgave 11 (Uden hjælpemidler) I perioden 1987-1997 har Transportrådet hvert år opgjort det samlede antal biler, der er sendt til ophugning siden 1987. Opgørelsen viser, at det samlede antal biler, der er sendt til ophugning siden 1987, med god tilnærmelse kan beskrives ved funktionen

$$f(x) = 87880 \cdot x + 69550$$

hvor x er antal år efter 1987, og $f(x)$ er det samlede antal biler, der er sendt til ophugning i løbet af de x år siden 1987.

a) Beskriv, hvilken information funktionen giver om udviklingen i det samlede antal biler, der er sendt til ophugning siden 1987, og inddrag i beskrivelsen en fortolkning af de konstanter, der indgår i forskriften for f.

Opgave 12 I år 2000 var der 7600 danskere med en årlig indkomst på mindst 1 million kr. I de følgende år voksede antallet af danskere, der havde en årlig indkomst på mindst 1 million kr., med god tilnærmelse med 1300 om året.

a) Opstil en model, der beskriver udviklingen i antallet af danskere med en årlig indkomst på mindst 1 million kr.

Opgave 13 (Uden hjælpemidler) Af Folkesundhedsrapporten fra 2007, udgivet af Statens Institut for Folkesundhed, fremgår det, at udviklingen i forbruget af antal sengedage for børn under 16 år på danske hospitaler kan beskrives ved funktionen

$$f(x) = -9959x + 650584,$$

hvor x betegner antal år efter 1978.

a) Beskriv, hvilken information funktionen giver om udviklingen i antal sengedage for børn under 16 år på danske hospitaler.

Opgave 14 I en model antages det, at længden L (målt i mm) af en gedde er en lineær funktion af længden s (målt i mm) af geddens øresten.

a) Bestem en forskrift for L, når det oplyses, at grafen for L går gennem punkterne $P(3{,}155)$ og $Q(10{,}791)$, og benyt forskriften til at bestemme længden af ørestenen hos en gedde, som har længden 500 mm.

Opgave 15 Tabellen viser sammenhørende værdier af alder og længde for en population af spækhuggere.

Alder (år)	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Længde (cm)	310	348	386	424	462	500	536	572	610

I en model er sammenhængen mellem længden L (målt i cm) og alderen t (målt i år) en funktion af typen $L(t) = at + b$.

a) Bestem tallene a og b ved hjælp af tabellens data.

b) Giv en fortolkning af tallene a og b, og benyt modellen til at bestemme alderen af en 700 cm lang spækhugger.

Opgave 16 Nedenstående tabel viser vejdirektoratets opgørelse over antal trafikdræbte personer i det 1. halvår for hvert af årene 2007-2012.

År	2007	2008	2009	2010	2011	2012
Antal trafikdræbte	195	190	161	110	107	82

I en model antages det, at udviklingen i antal trafikdræbte personer kan beskrives ved en funktion af typen

$$y = ax + b,$$

hvor y betegner antal trafikdræbte personer i det 1. halvår, og x betegner tiden (målt i år efter 2007).

a) Benyt tabellens data til at bestemme konstanterne a og b.

b) Benyt modellen til at bestemme antal trafikdræbte i det 1. halvår af 2013.

c) Bestem det år, hvor antal trafikdræbte i det 1. halvår ifølge modellen er nede på 50 personer.

1.3 Proportionalitet

1.3.1 Ligefrem proportionalitet

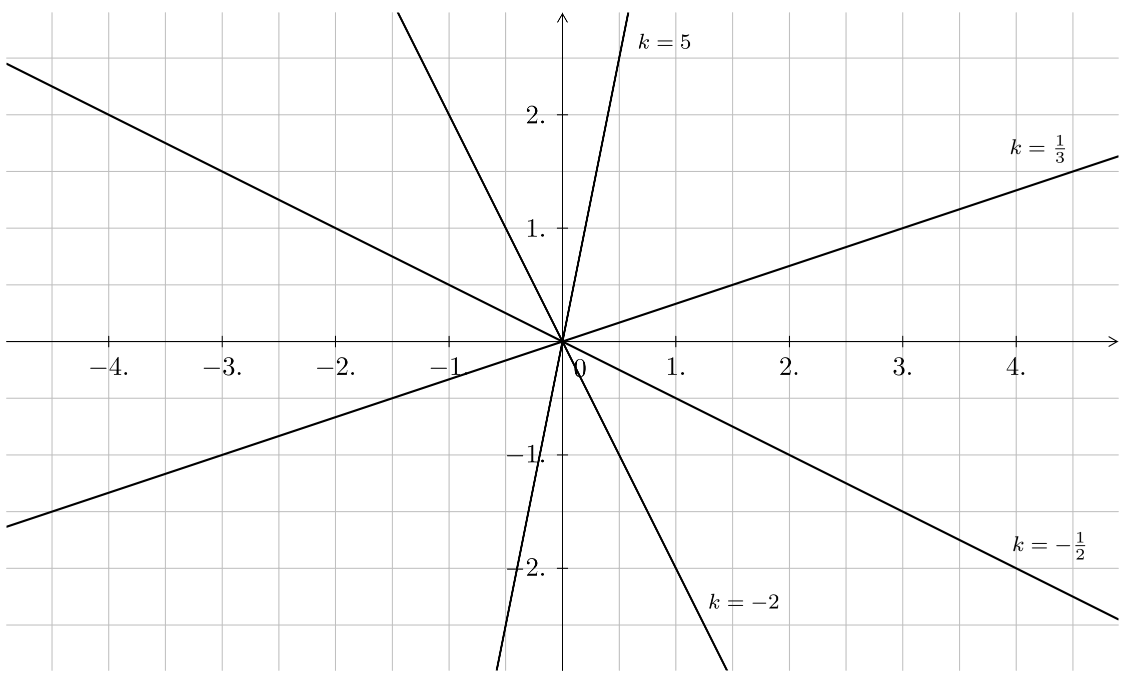
I den særlige situation, hvor $b = 0$ i $f(x) = ax + b$, er x og $f(x)$ proportionale. I denne situation undlades det ofte at bruge funktionsbegrebet, som det ses i følgende definition:

Definition 1.3. Hvis der om to variable x og y gælder, at

$$y = k \cdot x$$

så siges x og y at være (ligefremt) *proportionale*. Vi kalder desuden k for proportionalitetskonstanten.

Det er klart at skal man tegne grafen for sammenhængen mellem x og y, hvis disse er proportionale, så bliver det rette linjer gennem (0,0). Herunder ses eksempler på proportionaliteter for forskellige værdier af k:



Det er ligeledes klart, at en anden måde at udtrykke proportionalitet mellem x og y på, er at sige, at forholdet mellem x og y er konstant, dvs.:

$$\frac{y}{x} = k.$$

Vi vil i det følgende komme med et par simple eksempler på proportionaliteter fra forskellige fagområder.

Eksempel 1.5. I et elektrisk kredsløb med en modstand, er spændingen U proportional med strømstyrken I, med en proportionalitetsfaktor, der kaldes *modstanden* eller *resistansen*, R:

$$U = R \cdot I.$$

♢

Eksempel 1.6. For et stof i kemi, er stofmængden n proportional med massen af stoffet, m. Proportionalitetskonstanten er stoffets molare masse M:

$$m = M \cdot n.$$

♢

Eksempel 1.7. I samfundsfag antager man ofte at udbudsmængden u og prisen p er proportionale. Proportionalitetskonstanten k fortæller hvor meget større udbudsmængden bliver når prisen stiger.

$$u = k \cdot p$$

♢

1.3.2 Omvendt proportionalitet

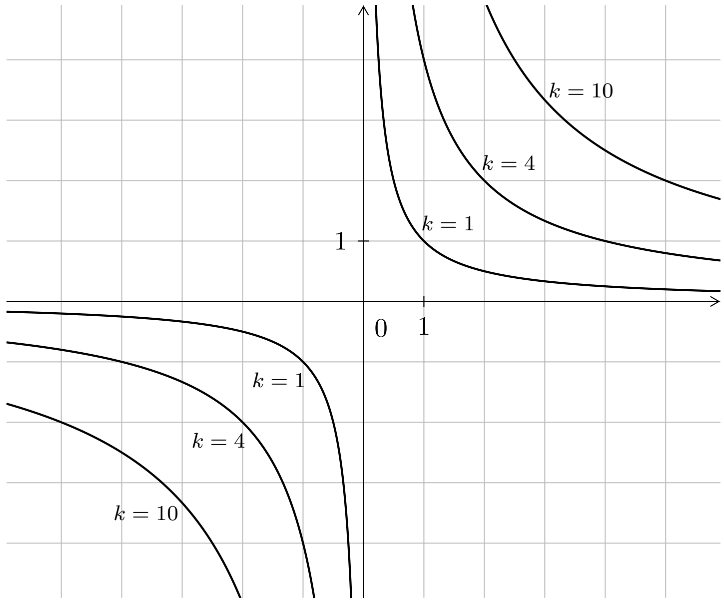
Definition 1.4. Hvis y er proportional med $\frac{1}{x}$, så siger vi at x og y er *omvendt proportionale*:

$$y = k \cdot \frac{1}{x}$$

I denne situation gælder der at produktet af x og y skal være konstant:

$$x \cdot y = k.$$

Grafen for omvendt proportionale sammenhænge kaldes hyperbler:



Eksempel 1.8. I en (ideal)gas, hvor temperaturen og stofmængden holdes konstant, er trykket, P, og volumen, V, omvendt proportionale. Proportionalitetskonstanten afhænger af temperaturen og stofmængden.

$$P = k \cdot \frac{1}{V} \qquad \text{eller} \qquad P \cdot V = k.$$

$\diamondsuit$

1.3.3 Opgaver

Opgave 1 To størrelser x og y er proportionale.

x	2	10	
y		40	100

Udfyld resten af tabellen.

Opgave 2 To størrelser x og y er proportionale.

x	3	5	
y	12		60

Udfyld resten af tabellen.

Opgave 3 To størrelser x og y er omvendt proportionale.

x	5	10	
y		4	2

Udfyld resten af tabellen.

Opgave 4 To størrelser x og y er omvendt proportionale.

x	2	3	
y		8	6

Udfyld resten af tabellen.

Opgave 5 Vis, at hvis x og y er proportionale, så fordobles y, når x fordobles.

Opgave 6 Størrelserne x og y er proportionale og der gælder at når x vokser med 3, så vokser y med 12. Bestem en forskrift for sammenhængen.

Opgave 7 To størrelser x og y er proportionale. Når $x = 8$, så er $y = 4$. Bestem en forskrift for sammenhængen.

Opgave 8 To størrelser x og y er omvendt proportionale. Når $x = 3$, så er $y = 11$. Bestem en forskrift for sammenhængen.

Opgave 9 To størrelser x og y er omvendt proportionale. Når $x = 21$, så er $y = 7$. Bestem en forskrift for sammenhængen.

Opgave 10 (KEPLERS 3. LOV) Keplers tredje lov om planetbevægelse siger at: *kvadratet på omløbstiden i banen er proportional med den halve storakse i tredje potens.*

Opskriv en sammenhæng mellem omløbstid og den halve storakse, når det oplyses at den halve storakse for Jorden er 149.6 mio km.

Opgave 11 (AFSTANDSKVADRATLOVEN) I fysik siger afstandskvadratloven at intensiteten af f.eks. en radioaktiv kilde er omvendt proportional med kvadratet på afstanden til kilden.

a) Opskriv et udtryk der beskriver sammenhængen.

b) (Svær) Kan du argumentere for at afstandskvadratloven er korrekt?

1.4 Sammensatte og inverse funktioner

1.4.1 Sammensatte funktioner

Det hænder, at man i matematikken støder på funktioner, der er lidt mere komplicerede end dem vi har haft brug for indtil nu. Et eksempel kunne være

$$h(x) = \sqrt{x^2 + 4}.$$

Dette er en såkaldt sammensat funktion på formen $h(x) = f(g(x))$, hvor $f(x) = \sqrt{x}$ kaldes den *ydre* funktion, og $g(x) = x^2 + 4$ kaldes den *indre* funktion.

Vi kan omvendt også få den idé at tage to funktioner og sammensætte dem:

Definition 1.5. Hvis f og g er funktioner, så defineres sammensætningen $f \circ g$, som

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)).$$

Definitionsmængden for $f \circ g$ er alle de x, hvorom det gælder at $g(x) \in \mathrm{Dm}(f)$.

Eksempel 1.9. Hvis vi lader $f(x) = \frac{1}{x}$ og $g(x) = x^4 + 2$. Så er sammensætningen $f \circ g$ givet ved

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \frac{1}{x^4 + 2},$$

hvor vi bemærker at $\mathrm{Dm}(f \circ g) = \mathbb{R}$, da $x^4 + 2 > 0$ for alle x. Værdimængden er i øvrigt $\mathrm{Vm}(f \circ g) =]0,\frac{1}{2}]$ (overvej hvofor!).

Den omvendte sammensætning giver et andet resultat! For hvis g er den ydre og f den indre funktion, så er

$$(g \circ f)(x) = \left(\frac{1}{x}\right)^4 + 2 = \frac{1}{x^4} + 2,$$

hvor vi nu ser at $\mathrm{Dm}(g \circ f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Nu er værdimængden $\mathrm{Vm}(g \circ f) =]2,\infty[$ (overvej hvorfor!).

$\diamondsuit$

1.4.2 Inverse funktioner

Det viser sig, at visse sammensætninger har bemærkelsesværdige egenskaber. Lad os prøve at lave en sammensætning af funktionerne $f(x) = x^3 + 9$ og $g(x) = \sqrt[3]{x - 9}$:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \left(\sqrt[3]{x - 9}\right)^3 + 9 = x - 9 + 9 = x$$

og

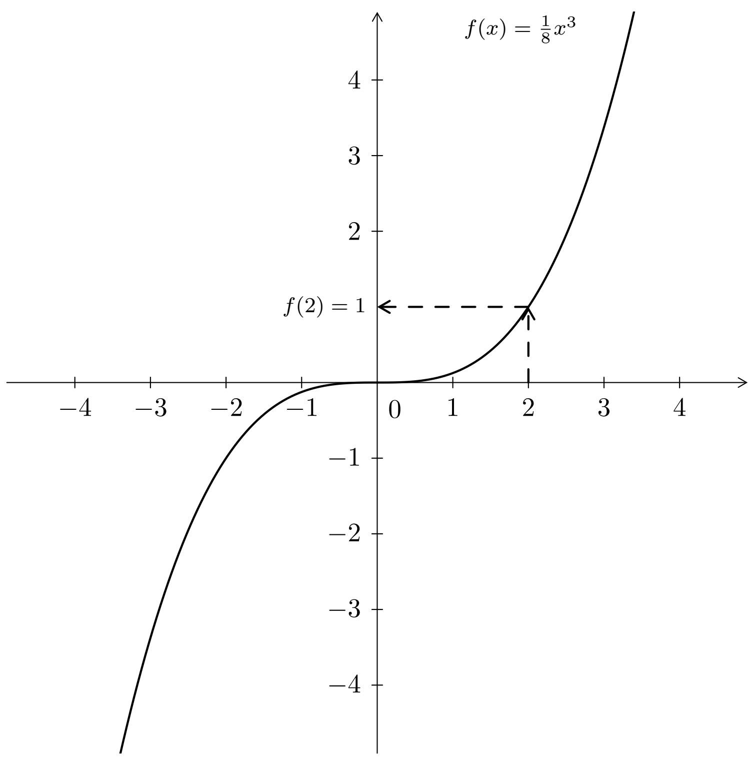
$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \sqrt[3]{(x^3 + 9) - 9} = x$$

Vi har altså her et eksempel på to funktioner, hvorom der gælder, at

$$(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x) = x.$$

Med andre ord har vi fundet et par af funktioner, der har den egenskab, at hvis man først bruger f og bagefter g (eller omvendt), så er man kommet tilbage til udgangspunktet. De to funktioner ophæver altså hinanden.

Vi vil prøve at forfølge denne tanke lidt yderligere. I det følgende vil vi betragte en funktion $f(x) = \frac{1}{8}x^3$. Grafen for f ses herunder:



Figur 1.1: Det er velkendt, at vi kan aflæse en funktionsværdi, ved at finde x på førsteaksen. Gå lodret op til grafen og derefter vandret ud til andenaksen og aflæse funktionsværdien, som y-værdien.

Vi er vant til at finde funktionsværdier ved at indsætte en x-værdi i forskriften, og udregne den tilhørende funktionsværdi. Dette kan også gøres grafisk ved at finde den pågældende x-værdi på x-aksen og gå lodret op til grafen for derefter at gå vandret hen til y-aksen og aflæse funktionsværdien her.

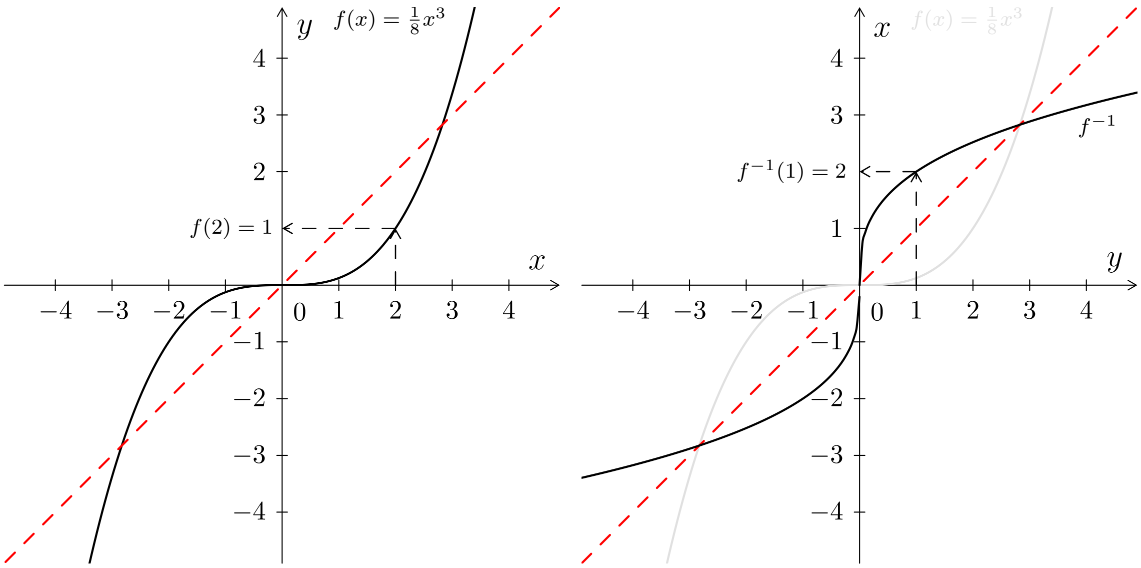
Eksempelvis er funktionsværdien for $x = 2$ givet ved

$$f(2) = \frac{1}{8} \cdot 2^3 = \frac{1}{8} \cdot 8 = 1$$

Dette ses også på grafen ovenfor.

Da f er en funktion, der er voksende, må det betyde, at der til alle x-værdier hører netop én funktionsværdi. Det må på den anden side også betyde, at der til hver eneste funktionsværdi hører præcist én x-værdi. Derfor kan vi lave (definere) en funktion, der tager en funktionsværdi fra f og sender den tilbage til den tilhørende x-værdi. Vi kalder denne funktion for f^{-1}.

Der gælder altså, at hvis $y = f(x)$, så er $f^{-1}(y) = x$. Man kan altså finde grafen for f^{-1} ved at spejle koordinatsystemet i linjen $y = x$ som vist på nedenstående figur:



Figur 1.2: Til hver funktionsværdi hører netop én x-værdi. Skal vi gå den modsatte vej på grafen til venstre, altså finde det x, der hører til en given funktionsværdi, så svarer det præcist til at spejle hele koordinatsystemet og grafen i linjen $y = x$, og aflæse som vi er vant til på grafen til højre.

Vi kan se, at hvis man 'går baglæns' via pilene på grafen til venstre, så svarer det præcist til at 'gå forlæns' via pilene på grafen til højre. Dermed er grafen til højre præcist grafen for f^{-1}. Dette gælder generelt:

Man kan altid finde grafen for f^{-1}, ved at spejle grafen for f i linjen $y = x$.

Vil kalder funktionen f^{-1} for *den inverse funktion* til f. Nogen gange kaldes den for den *omvendte funktion*. Da vi har fundet f^{-1} ved egenskaben, at hvis $f(x) = y$ så er $f^{-1}(y) = x$, kan vi altså slutte, at

$$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = x \qquad \text{og} \qquad (f \circ f^{-1})(y) = f(f^{-1}(y)) = y$$

Hvis man sammensætter en funktion med dens inverse vil de altså ophæve hinanden.

Det kunne være interessant at finde en regneforskrift for f^{-1} fra ovenstående. Dette gøres lettest ved at løse ligningen

$$y = \frac{1}{8}x^3$$

med hensyn til x. Gøres dette opnås

$$x = 2 \cdot \sqrt[3]{y}$$

og det konkluderes dermed at forskriften er $f^{-1}(y) = 2 \cdot \sqrt[3]{y}$ eller hvis vi kalder variablen for x, som vanligt: $f^{-1}(x) = 2 \cdot \sqrt[3]{x}$. Vi kan dobbelttjekke ved at indse, at $(f^{-1} \circ f)(x) = x$ og $(f \circ f^{-1})(x) = x$ (gør det!).

Bemærkning 1.2. Det er ikke alle funktioner, der har en invers. Hvis betingelsen om at der til hvert $y \in \mathrm{Vm}(f)$ hører præcist ét $x \in \mathrm{Dm}(f)$ er opfyldt, så har f en invers. Dette kaldes *injektivitet*. Monotone funktioner er injektive, dvs. at funktioner der enten er (strengt) *voksende* eller (strengt) *aftagende* har inverse funktioner (men det kan være meget svært at finde deres regneforskrifter).

$\diamondsuit$

Bemærkning 1.3. Man skal være en lille smule forsigtig med hensyn til definitionsmængderne for funktioner og deres inverse. Det er dog ikke noget vi skal forfølge yderligere her. Vi skal blot bemærke, at man nogen gange skal gøre sig ekstra overvejelser i den retning. F.eks. er $f(x) = x^2$ og $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$ hinandens inverse, men kun for $x \geq 0$. Set i lyset af forrige bemærkning er det også klart, da $f(x) = x^2$ er voksende på intervallet $[0,\infty[$.

$\diamondsuit$

1.4.3 Opgaver

Opgave 1 Lad $f(x) = x^2$ og $g(x) = 7x + 10$.

a) Bestem $(f \circ g)(x)$

b) Bestem $(g \circ f)(x)$

Opgave 2 Lad $f(x) = \frac{1}{x}$ og $g(x) = \sqrt{x}$.

a) Bestem $(f \circ g)(x)$

b) Bestem $(g \circ f)(x)$

Opgave 3 Find den ydre og den indre funktion, når

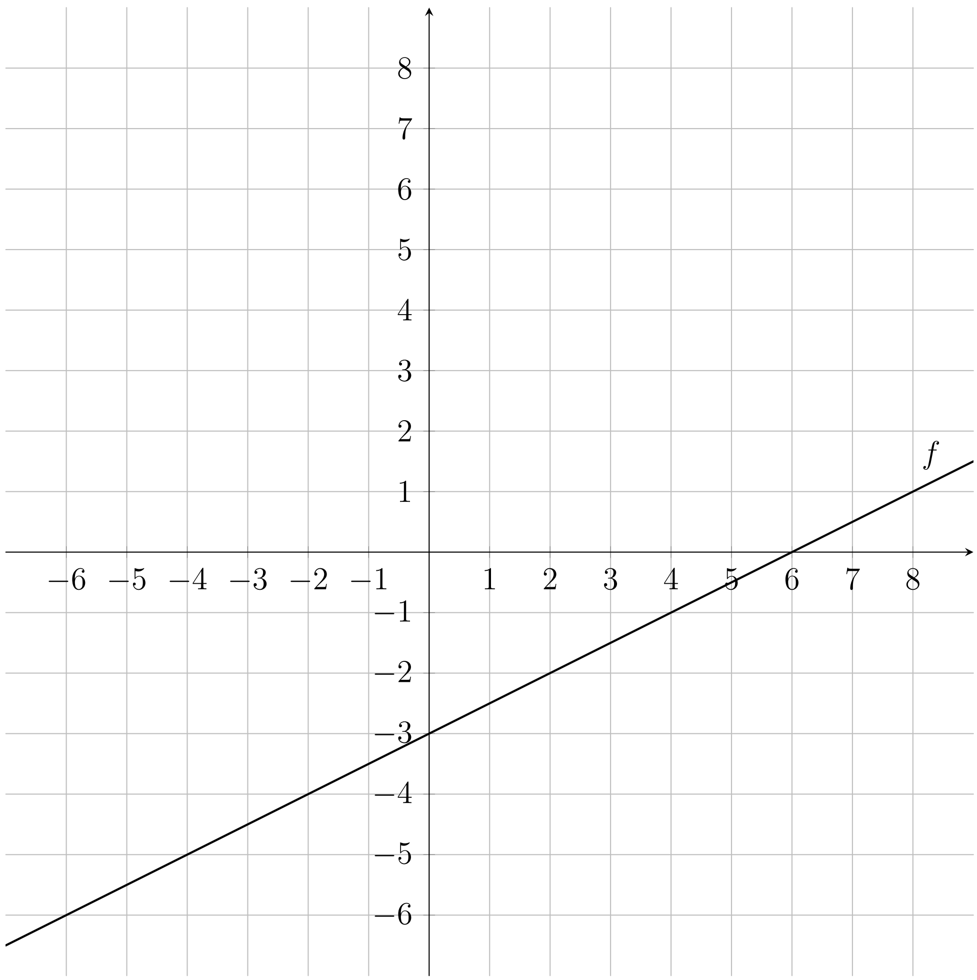
a) $f(x) = \sqrt{x^4 + x + 10}$

b) $f(x) = (3x+2)^7$

c) $f(x) = \dfrac{1}{x^2+4}$

d) $f(x) = 3(6x-2)^2 - 4(6x-2) + 10$

Opgave 4 Herunder ses grafen for en lineær funktion f.



a) Bestem ved aflæsning $f(-4)$ og $f^{-1}(-2)$.

b) Bestem forskrifterne for f og for f^{-1}.

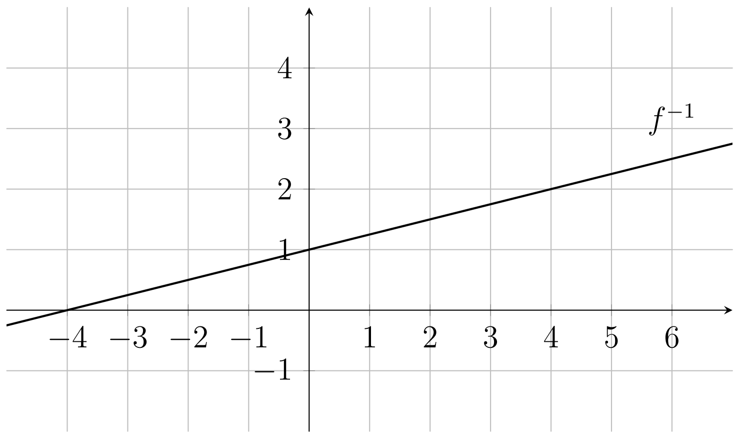
c) Tegn graferne i samme koordinatsystem.

Opgave 5 En funktion f er givet ved $f(x) = -3x + 6$.

a) Tegn graferne for f og f^{-1} i samme koordinatsystem.

b) Bestem forskriften for f^{-1}.

Opgave 6 Herunder ses grafen for den omvendte funktion, f^{-1}, til en funktion f.



a) Bestem $f(2)$.

b) Bestem skæringspunktet med x-aksen for grafen for f.

c) Bestem en forskrift for f.

Opgave 7 Find den inverse funktion f^{-1} og tegn f og f^{-1} i samme koordinatsystem, når:

a) $f(x) = x^3$

b) $f(x) = 4x + 8$

c) $f(x) = x^2 + 2$ for $x \geq 0$

1.5 Eksponential- og logaritmefunktioner

1.5.1 Det udvidede potensbegreb

Når vi i det følgende afsnit vil se på funktioner, hvori der indgår udtryk som a^x, for $a > 0$ og $x \in \mathbb{R}$, så er det ikke helt ligetil at retfærdiggøre, at man kan opføfte et positivt tal a i en hvilken som helst potens x. Hvad vil man f.eks. forstå ved udtrykket $3^{2.93}$ eller endnu værre 3^π? At gange '3' sammen med sig selv 'π gange' er meningsløst.

Det kræver ikke så lidt matematisk snilde og teknik, at finde meningen med den sidste del, altså 3^π, så det vil vi undlade. Vi vil blot bemærke, at man faktisk *kan* gøre det og trøste os med at både Nspire og lommeregnere ikke har problemer med at beregne f.eks. 3^π.

At give mening til $3^{2,93}$ er til gengæld muligt, og det er formålet med dette afsnit om det udvidede potensbegreb.

Potensregneregler

For et vilkårligt tal $a \in \mathbb{R}$, og en naturligt tal $n \in \mathbb{N}$, defineres potensopløftning, som det er kendt fra grundskolen ved

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a \cdot a}_{n \text{ gange}}$$

Fra dette udleder man let *potensregnereglerne* (vi udleder dem ikke, men læseren opfordres til at overveje rigtigheden af reglerne), der for $n,m \in \mathbb{N}$ og $a,b \in \mathbb{R}$ siger:

1. $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$
2. $\dfrac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$ (her skal $n > m$, da negative potenser endnu ikke er defineret, og $a \neq 0$)
3. $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$
4. $\dfrac{a^n}{b^n} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^n$ (for $b \neq 0$)
5. $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$

Vi ønsker nu at udvide begrebet potensopløftning, så det kommer til at omfatte eksponenter, der kan være nul, negative tal og til sidst brøker. Disse udvidelser skal stadig opfylde ovenstående regler. Det er helt afgørende, ellers bliver det noget rod at regne med potenser.

Første udvidelse: eksponenten er nul

Vi analyserer situationen og ser, at hvis regel 1) skal gælde, så må:

$$a^n = a^{n+0} = a^n \cdot a^0$$

hvor vi konkluderer, at den eneste mulige måde at definere potenser med eksponent nul, er at sætte $a^0 = 1$. Dette bliver således næste regel:

6. $a^0 = 1$

Man kan tjekke, at denne definition ikke er i modstrid med nogen af de fem grundlæggende potensregneregler fra forrige side, men det overlades til den interesserede læser at gøre.

Anden udvidelse: eksponenten er et negativt helt tal

Igen laves en lille analyse. Vi bruger regneregel 1), som *skal* gælde, og ser på

$$a^n \cdot a^{-n} = a^{n+(-n)} = a^{n-n} = a^0 = 1,$$

altså $a^n \cdot a^{-n} = 1$. Heraf konkluderes at der nødvendigvis *må* gælde, at

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n},$$

hvis det skal være muligt at definere potenser med negativ eksponent.

Reglen for negative eksponenter bliver da:

7. $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$

Man kan igen tjekke, at denne regel ikke er i modstrid med nogen af de seks foregående, og vi kan således indføre denne udvidelse, og bruge alle de kendte regler stadigvæk.

Tredje udvidelse: rationale eksponenter

Vi minder lige om, at et rationalt tal $p \in \mathbb{Q}$, er et tal, der kan skrives som en brøk $p = \frac{m}{n}$, hvor $n,m \in \mathbb{Z}$ er hele tal. Vi ønsker altså at give mening til udtryk som $a^{\frac{m}{n}}$.

Vi analyserer igen. I første omgang undersøger vi udtrykket $a^{\frac{1}{n}}$, ved hjælp af regel 5):

$$a = a^{\frac{1}{n} \cdot n} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n.$$

Da det tal, som skal opløftes i n'te for at give a, netop er den n'te rod af a, så gælder der altså

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}.$$

Med dette i baghovedet prøver at nu at undersøge $a^{\frac{m}{n}}$:

$$a^{\frac{m}{n}} = a^{m\cdot\frac{1}{n}} = (a^m)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a^m},$$

hvor vi til sidst brugte første del af denne analyse.

Dermed bliver sidste regel

8. $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

Nok en gange skal det nævnes at man kan tjekke at denne regel ikke er i modstrid med nogen af de foregående, så vi har nu altså lavet en udvidelse af potensbegrebet, så det omfatter potenser med rationale eksponenter.

Det skal dog lige bemærkes, at denne sidste regel ikke gælder for alle værdier af a. Den gælder kun generelt for $a > 0$.

Potensregnereglerne bliver altså, for alle n,$m \in \mathbb{Z}$ og $a \in \mathbb{R}$:

1. $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$
2. $\dfrac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$ (for $a \neq 0$)
3. $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$
4. $\dfrac{a^n}{b^n} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^n$ (for $b \neq 0$)
5. $(a^n)^m = a^{n\cdot m}$
6. $a^0 = 1$
7. $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$ (for $a \neq 0$)
8. $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ (for $a > 0$)

Regel 7) kan egentligt udelades fordi den nu er indeholdt i regel 2).

Bemærkning 1.4. Vi kan nu finde $3^{2,93}$, idet $2{,}93 = \frac{293}{100}$, så er

$$3^{2,93} = 3^{\frac{293}{100}} = \sqrt[100]{3^{293}} = 25{,}0015$$

◊

Bemærkning 1.5. Af den sidste analyse fremgik det specielt, at man altid kan udregne rødder som potenser:

$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$$

Det kan være smart, da det ofte er hurtigere at indtaste en potens end en rod på en lommeregner eller en computer. I det hele taget kan det ofte være lettere at have med potenser at gøre end med rødder.

I særdeleshed er det værd at notere sig, at dette betyder, at

$$\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}},$$

hvilket er ganske anvendeligt i flere sammenhænge.

$\diamondsuit$

Bemærkning 1.6. Til sidst er det også værd at bemærke at regnereglerne for kvadratrødder:

i. $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$

ii. $\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

følger af potensregnereglerne, thi for $a,b > 0$ er

$$\sqrt{a \cdot b} = (a \cdot b)^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}} \cdot b^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$$

Det er stillet som en opgave at bevise den anden kvadratrodsregel.

$\diamondsuit$

Den manglende udvidelse – lidt talnørderi

Som nævnt i starten af dette afsnit, så mangler vi i princippet at udvide potensbegrebet til også at omfatte irrationale tal, altså tal, der ikke kan skrives som en brøk, f.eks. $\pi, \mathrm{e}, \sqrt{2}$ osv. Det er en betydeligt større og sværere opgave at gøre dette, så vi undlader det her. Men vi er faktisk allerede kommet ret langt.

Der gælder nemlig, at de rationale tal *ligger tæt* i de reelle. Det betyder, at der til ethvert tal x uanset om det kan skrives som brøk eller ej, findes brøker (altså rationale tal), der kommer vilkårligt tæt på vores x. Det vi mangler, er altså blot hullerne i tallinjen (der hvor der ikke er rationale tal). At der så er ret mangle huller (faktisk overtælleligt uendeligt mange) vælger vi ikke at tage så tungt.

At forstå forskellen på de rationale tal og de reelle tal, at de rationale tal ligger tæt i de reelle, og de irrationale tal udfylder hullerne 'mellem' de rationale tal, er en meget spændende opgave, men det vil stjæle fokus fra resten af denne note, så det udforsker vi ikke mere her. Den interesserede læser opfordres til at spørge sin lærer, eller opsøge litteratur selv.

1.5.2 Eksponentialfunktioner

Forskrift

Forskriften for en eksponentialfunktion er

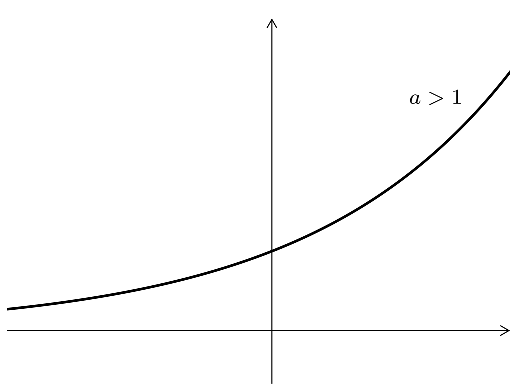
$$f(x) = b \cdot a^x,$$

hvor $a > 0$ og $b > 0$. Vi kalder konstanten a for **fremskrivningsfaktoren** og konstanten b for **begyndelsesværdien**, da b angiver grafens skæring med y-aksen.

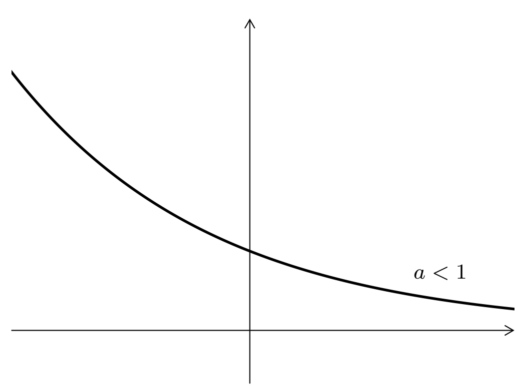
Det bemærkes, at vi i forrige afsnit om det udvidede potensbegreb (Afsnit 1.5.1), har gjort det klart at udtrykket a^x giver mening for alle $x \in \mathbb{Q}$, altså alle rationale tal x (tal der kan skrives som brøker af heltal). Vi forklarede ikke, hvordan man kan give mening til f.eks. a^π, men i det følgende afsnit regner vi det for givet, at det giver mening at se på et udtryk som a^x for $a > 0$ og alle $x \in \mathbb{R}$.

Graf

En eksponentialfunktion er enten voksende eller aftagende. Dette afhænger af fremskrivningsfaktoren a, som det ses på graferne nedenfor.



Her er $a > 1$, så eksponentialfunktionen er voksende.



Her er $a < 1$, så eksponentialfunktionen er aftagende.

Der gælder desuden at x-aksen er vandret asymptote, dvs. at grafen for en eksponetialfunktion vil komme tættere og tættere på x-aksen uden nogensinde at ramme den. For en voksende eksponentialfunktion gælder dette ud mod minus uendelig og for en aftagende ud mod plus uendelig (som det kan anes på graferne ovenfor).

Grafen skærer altid y-aksen i punktet (0,b) fordi $f(0) = b \cdot a^0 = b \cdot 1 = b$.

Fremskrivningsfaktor og vækstrate

Fremskrivningsfaktoren skrives ofte som

$$a = 1 + r$$

hvor r kaldes **vækstraten**. Hvis $r > 0$ er $a > 1$ og dermed er f voksende. Der er altså tale om positiv vækst. Hvis $r < 0$ bliver $a < 1$, hvormed f aftager. Her er der så tale om negativ vækst.

Vi tager lige et taleksempel som forklaring.

Eksempel 1.10. Vi ser først på en voksende eksponentialfunktion

$$f(x) = 3 \cdot 1{,}12^x$$

Vi ved at $a = 1 + r$, dvs. at $1{,}12 = 1 + r$, så $r = 0{,}12 = 12\%$. Vækstraten er altså 12%, hvilket betyder at $f(x)$ vokser med 12% hver gang x vokser med 1. Dette kan naturligvis også indses bare ved at se på forskriften. Bemærk, at hvis vi *fremskriver* x med 1, så gælder følgende

$$f(x + 1) = b \cdot a^{x+1} = b \cdot a^x \cdot a = f(x) \cdot a,$$

hvoraf det ses, at når x fremskrives med 1 (der lægges 1 til x), så ganges $f(x)$ med faktoren a; deraf navnet fremskrivningsfaktor. At gange med 1,12 svarer jo til at forøge med 12%, hvilket passer med det ovenstående.

Hvis vi har en aftagende eksponentialfunktion, er tankegangen helt den samme. For

$$f(x) = 2 \cdot 0.86^x$$

er vækstraten $r = -0{,}14 = -14\%$, hvilket betyder at f aftager med 14%, når x forøges med 1. At gange med 0,86 svarer jo også netop til at formindske en størrelse med 14%.

$\diamondsuit$

Bestemmelse af forskrift ud fra to punkter

Kender vi to punkter på grafen for en eksponentialfunktion, så kan vi bestemme forskriften (meget i stil med metoden fra lineære funktioner). Vi kan bruge formlerne fra følgende sætning:

Sætning 1.2. *Hvis $P(x_1,y_1)$ og $Q(x_2,y_2)$ er to forskellige punkter på grafen for eksponentialfunktionen $f(x) = b \cdot a^x$, så kan a og b findes ved formlerne*

$$a = \sqrt[x_2-x_1]{\frac{y_2}{y_1}} \quad \text{og} \quad b = \frac{y_1}{a^{x_1}}$$

Bevis. Hvis $P(x_1,y_1)$ og $Q(x_2,y_2)$ er punkter på grafen for $f(x) = b \cdot a^x$, så kan vi indsætte punkternes koordinater i forskriften og danne to ligninger:

$$y_1 = b \cdot a^{x_1} \quad \text{og} \quad y_2 = b \cdot a^{x_2}$$

Vi dividerer nu venstre side med venstre side og højre side med højre side i ligningerne

$$\frac{y_2}{y_1} = \frac{b \cdot a^{x_2}}{b \cdot a^{x_1}}$$

Først ser vi at b'erne går ud med hinanden

$$\frac{y_2}{y_1} = \frac{a^{x_2}}{a^{x_1}}$$

Nu bruger vi potensregnereglen $\frac{a^{x_2}}{a^{x_1}} = a^{x_2-x_1}$

$$\frac{y_2}{y_1} = a^{x_2-x_1}$$

Og til sidst tager vi den $x_2 - x_1$'ende rod:

$$\sqrt[x_2-x_1]{\frac{y_2}{y_1}} = a$$

hvilket var det første vi skulle bevise.

For at finde b isolerer vi bare i ligningen $y_1 = b \cdot a^{x_1}$ og får ved division med a^{x_1} på begge sider af lighedstegnet, at

$$\frac{y_1}{a^{x_1}} = \frac{b \cdot a^{x_1}}{a^{x_1}},$$

hvilket giver det ønskede, nemlig

$$b = \frac{y_1}{a^{x_1}}.$$

□

Den naturlige eksponentialfunktion

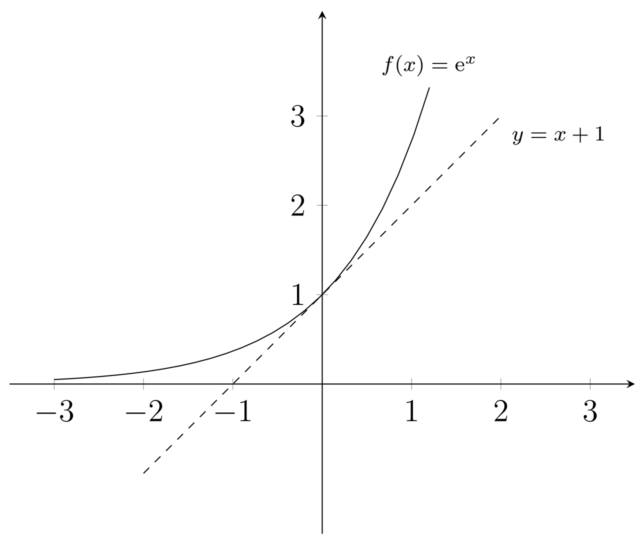
Hvis vi i forskriften $f(x) = b \cdot a^x$ sætter $b = 1$ og hvis a har en ganske bestemt værdi, nemlig *Eulers tal*, $\mathrm{e} = 2{,}718281828\ldots$, så kalder vi funktionen

$$f(x) = \mathrm{e}^x$$

for **den naturlige eksponentialfunktion**. I videregående matematik (og fysik) er denne funktion enormt vigtig.

Der er mange måder, hvorpå man kan definere den naturlige eksponentialfunktion. Vi gør det ved hjælp af en tangent:

Definition 1.6. Den naturlige eksponentialfunktion, e^x, er dén eksponentialfunktion, der har en tangent med hældning 1 i (0,1).



Figur 1.3: Per definition har den naturlige eksponentialfunktionn $f(x) = \mathrm{e}^x$ en tangent med hældning 1 i (0,1).

Bemærk, at den naturlige eksponentielfunktion er voksende (e er jo større end 1) og at den skærer y-aksen i (0,1).

1.5.3 Logaritmefunktionerne

Nu skal vi definere to funktioner, der har nogle meget brugbare egenskaber, nemlig 10-talslogaritmen, $\log(x)$, og den naturlige logaritme, $\ln(x)$.

Definition 1.7 (10-TALSLOGARITMEN)**.** Vi definerer **10-talslogaritmen**, $\log(x)$, som den *inverse funktion* til eksponentialfunktionen $f(x) = 10^x$. Altså den funktion som opfylder

$$\log(10^x) = x \quad \text{og} \quad 10^{\log(x)} = x.$$

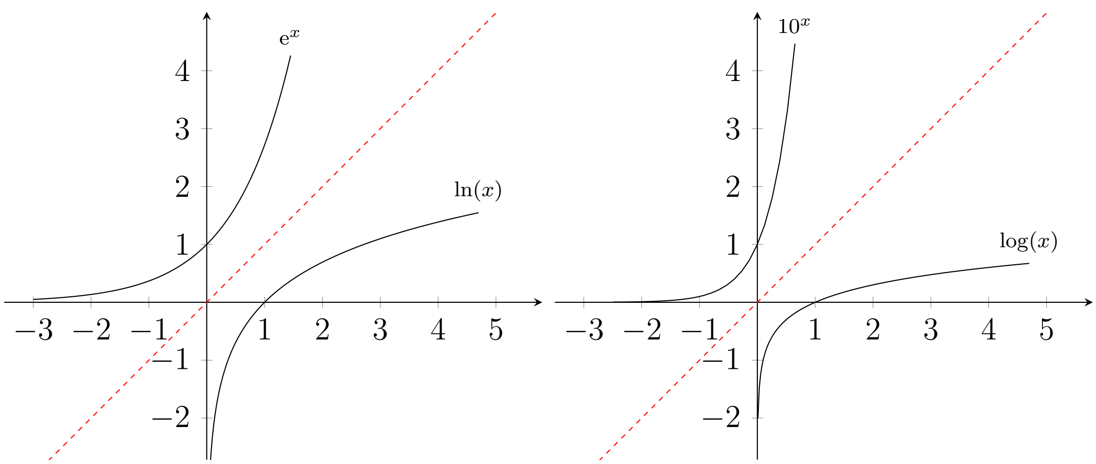
Definition 1.8 (Den naturlige logaritme). Vi definerer **den naturlige logaritme**, $\ln(x)$, som den *inverse funktion* til den naturlige eksponentialfunktion $f(x) = \mathrm{e}^x$. Altså den funktion som opfylder

$$\ln(\mathrm{e}^x) = x \quad \text{og} \quad \mathrm{e}^{\ln(x)} = x.$$

Følgende specielle funktionsværdier er værd at bemærke:

$$\begin{array}{ll} \ln(\mathrm{e}) = 1 & \text{fordi } \ln(\mathrm{e}) = \ln(\mathrm{e}^1) = 1 \text{ ifølge definitionen.} \\ \ln(1) = 0 & \text{fordi } \ln(1) = \ln(\mathrm{e}^0) = 0 \text{ ifølge definitionen.} \\ \log(10) = 1 & \text{fordi } \log(10) = \log(10^1) = 1 \text{ ifølge definitionen.} \\ \log(1) = 0 & \text{fordi } \log(1) = \log(10^0) = 0 \text{ ifølge definitionen.} \end{array}$$

Graferne for de to logaritmefunktioner, samt deres inverse funktioner e^x og 10^x, er tegnet i figuren herunder. Bemærk at y-aksen er lodret asymptote og at funktionerne *kun* er definerede for $x > 0$.



Figur 1.4: Da e^x og $\ln(x)$ er hinandens inverse, er deres grafer spejlet i linjen $y = x$. Det samme gælder for $\log(x)$ og 10^x.

Hvis man med ord skal forklare, hvad $\log(x)$ og $\ln(x)$ er, så kan man sige:

> *Resultatet af* $\log(x)$ *er det tal man skal opløfte 10 i for at få* x. *Altså at* $y = \log(x)$, *netop hvis* $10^y = x$.

Tilsvarende for den naturlige logaritmefunktion kan man sige:

> *Resultatet af* $\ln(x)$ *er det tal man skal opløfte* e *i for at få* x. *Altså at* $y = \ln(x)$, *netop hvis* $\mathrm{e}^y = x$.

Logaritmeregneregler

Der findes følgende regneregler for logaritmer, som er meget vigtige. Dels til ligningsløsning, og dels som redskab i beviser. Logaritmeregnereglerne er formuleret i følgende sætning:

Sætning 1.3. *Hvis $a > 0$, $b > 0$ og $x \in \mathbb{R}$ er et vilkårligt tal, så gælder det at:*

1. $\log(a \cdot b) = \log(a) + \log(b)$
2. $\log\left(\frac{a}{b}\right) = \log(a) - \log(b)$
3. $\log\left(a^x\right) = x \cdot \log(a)$

Samme regler gælder for den naturlige logaritme.

Bevis. Vi starter med 1). Her sætter vi $a = 10^{\log(a)}$ (husk at 10^x og $\log(x)$ er hinandens inverse) og $b = 10^{\log(b)}$. Så er

$$\log(a \cdot b) = \log\left(10^{\log(a)} \cdot 10^{\log(b)}\right) = \log\left(10^{\log(a)+\log(b)}\right) = \log(a) + \log(b),$$

hvilket viser det ønskede. Undervejs benyttede vi potesregnereglern $x^y \cdot x^z = x^{y+z}$ og ved sidste lighedstegn udnyttede vi igen at $\log(x)$ og 10^x er hinandens inverse.

Regel 2) kan vises på tilsvarende måde, men for adspredelsens skyld gør vi noget andet, nemlig bruger regel 1). Først indser vi at $a = \frac{a}{b} \cdot b$. Derfor er

$$\log(a) = \log\left(\frac{a}{b} \cdot b\right) = \log\left(\frac{a}{b}\right) + \log(b).$$

Trækker vi $\log(b)$ fra på begge sider af denne ligning opnås

$$\log\left(\frac{a}{b}\right) = \log(a) - \log(b),$$

hvilket var det der skulle vises.

For regel 3) gør vi som i del 1) og sætter $a = 10^{\log(a)}$, så er

$$\log\left(a^x\right) = \log\left(\left(10^{\log(a)}\right)^x\right) = \log\left(10^{\log(a) \cdot x}\right) = \log(a) \cdot x,$$

hvilket var det der skulle vises. Vi benyttede undervejs potensregnereglen $(x^y)^z = x^{y \cdot z}$, samt til sidst at $\log(x)$ og 10^x er hinandens ionverse.

I alle ovenstående argumenter kan $\log(x)$ erstattes af $\ln(x)$ og 10^x af e^x, hvilket viser reglerne for den naturlige logaritme, $\ln(x)$ også. $\square$

1.5.4 Halverings- og fordoblingskonstant for eksponentialfunktioner

En meget vigtig egenskab for eksponentialfunktioner er, at de aftager eller vokser med den samme procentsats, når den ufhængige variabel, x, vokser med en bestemt værdi. Det vil altså sige, at for en voksende eksponentialfunktion, kan vi finde en bestemt x-tilvækst, som vi kalder T_2, således at hvis x vokser med værdien T_2, så bliver $f(x)$ fordoblet. Dette kaldes **fordoblingskonstanten** eller **fordoblingstiden**.

Tilsvarende findes der for aftagende eksponentialfunktioner en **halveringskonstant** også kaldet **halveringstiden**, og den betegnes $T_{\frac{1}{2}}$.

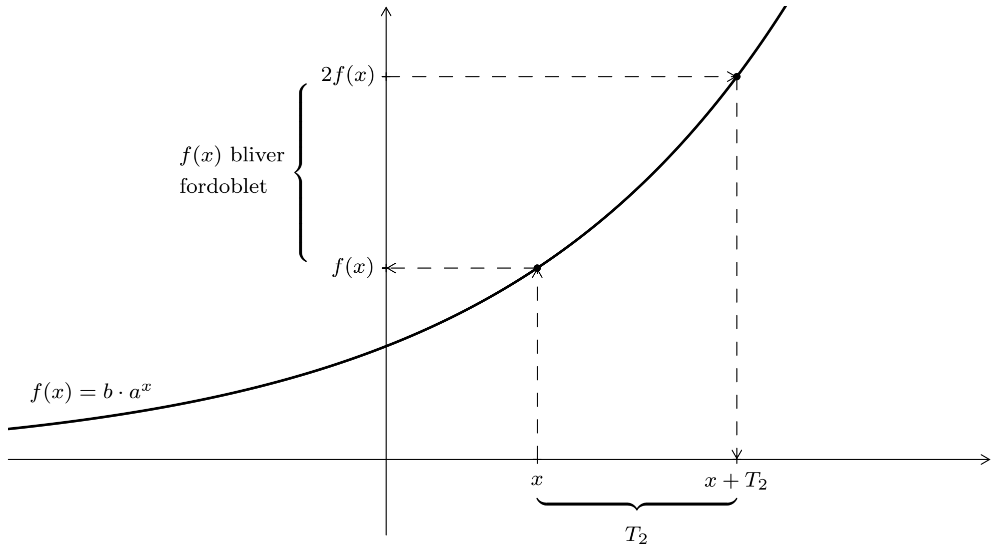
Fordoblingskonstanten kan findes vha. følgende sætning:

Sætning 1.4. *Hvis $f(x) = b \cdot a^x$ er en voksende eksponentialfunktion, så findes fordoblingskonstanten ved følgende formel:*

$$T_2 = \frac{\log(2)}{\log(a)}$$

Bevis. Vi ser på funktionen $f(x) = b \cdot a^x$, hvor $a > 1$, så funktionen er voksende. Betragt nu grafen (nedenfor), og gør følgende:

1. Vælg et x.
2. Gå lodret op til grafen og derefter vandret hen til y-aksen, hvor værdien for $f(x)$ markeres.
3. Værdien af $f(x)$ fordobles ved at gange med 2, til $2f(x)$, der markeres på y-aksen.
4. Gå vandret hen til grafen, og lodret ned til x-aksen og markér værdien. Afstanden mellem de to markeringer på x-aksen svarer til fordoblingskonstanten T_2.



På grafen kan vi se, der må gælde at

$$2f(x) = f(x + T_2).$$

Indsættes dette i forskriften $f(x) = b \cdot a^x$, så får vi

$$2 \cdot b \cdot a^x = b \cdot a^{x+T_2}$$

Ved division med b på begge sider af lighedstegnet går disse ud med hinanden, og vi får

$$2 \cdot a^x = a^{x+T_2}$$

Vi bruger nu en potensregneregel, der siger $a^{x+T_2} = a^x \cdot a^{T_2}$, således vi får

$$2 \cdot a^x = a^x \cdot a^{T_2}$$

Nu divideres med a^x på begge sider af lighedtegnet, så disse går ud med hinanden:

$$2 = a^{T_2}$$

Nu tager vi logaritmen på begge sider af lighedstegnet og får

$$\log(2) = \log\left(a^{T_2}\right)$$

Så bruger vi logaritmeregneregel nummer 3 på højresiden

$$\log(2) = T_2 \cdot \log(a)$$

og til sidst dividerer vi med $\log(a)$ på begge sider af lighedstegnet, så vi opnår det ønskede:

$$\frac{\log(2)}{\log(a)} = T_2.$$

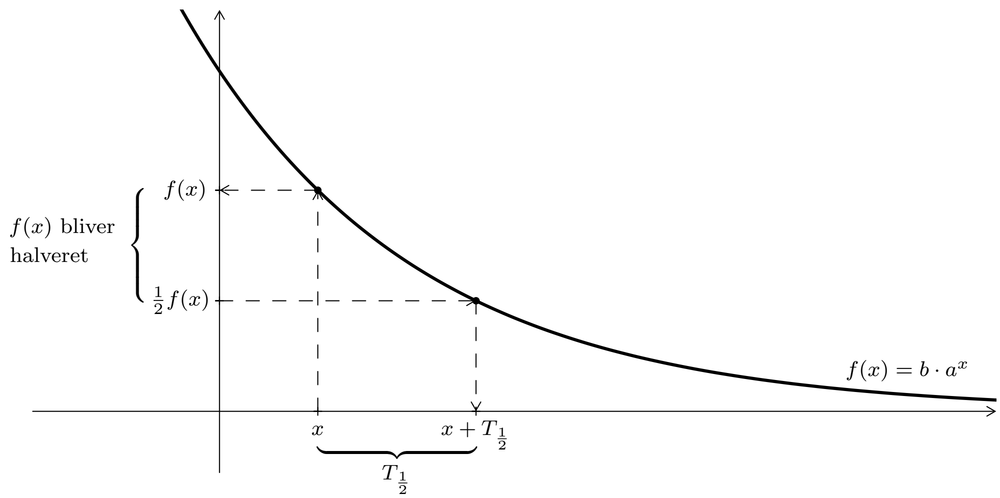
□

Der gælder naturligvis en lignende sætning for aftagende eksponentialfunktioner og halveringskonstant:

Sætning 1.5. *Hvis $f(x) = b \cdot a^x$ er en aftagende eksponentialfunktion, så findes halveringskonstanten ved følgende formel:*

$$T_{\frac{1}{2}} = \frac{\log(\frac{1}{2})}{\log(a)}$$

Bevis. Beviset er stort set identisk med forrige bevis, når man blot bruger nedenstående tegning i stedet:



□

Bemærkning 1.7. Vi kunne have brugt ln i stedet for log i beviset. Dette ville give de helt samme udregninger. Dermed gælder følgende formler også:

$$T_2 = \frac{\ln(2)}{\ln(a)} \quad \text{og} \quad T_{\frac{1}{2}} = \frac{\ln(\frac{1}{2})}{\ln(a)}$$

◊

1.5.5 Alternative forskrifter for eksponentialfunktioner

Vil vil uden bevis anføre, at hvis en voksende eksponentialfunktion har forskriften $f(x) = b \cdot a^x$, så kan forskriften laves om til

$$f(x) = b \cdot 2^{\frac{x}{T_2}}.$$

hvor T_2 er fordoblingskonstanten. Er eksponentialfunktionen aftagende bliver forskriften selvfølgelig

$$f(x) = b \cdot \left(\tfrac{1}{2}\right)^{\frac{x}{T_{1/2}}}.$$

Vi har desuden mulighed for at omskrive enhver eksponentialfunktion $f(x) = b \cdot a^x$ til en hvor Eulers tal indgår (dette bruges meget i videregående matematik). Forskiften er

$$f(x) = b \cdot \mathrm{e}^{k \cdot x}$$

hvor $k = \ln(a)$. Dette gælder både for voksende og aftagende eksponentialfunktioner.

1.5.6 Ligninger med eksponentielle eller logaritmiske udtryk

Som vi skal se i dette afsnit, så giver logaritmefunktionerne en ny mulighed, også i ligningsløsning. Skal vi eksempelvis løse en ligning, med x som eksponent kommer man (ofte) til kort, hvis ikke man kender logaritmerne.

Lad os tage et eksempel:

Eksempel 1.11. Vi skal løse ligningen $10 \cdot 3^x = 50$.

Første trin er at dividere med 10:

$$3^x = 5$$

næste trin er at tage ln på begge sider af lighedstegnet

$$\ln(3^x) = \ln(5)$$

Nu bruger vi logaritmeregneregel 3:

$$x \ln(3) = \ln(5)$$

hvor vi nu let isolerer x:

$$x = \frac{\ln(5)}{\ln(3)}$$

Dette er løsningen til ligningen. Man kan ikke i hovedet udregne talværdien for $x = \frac{\ln(5)}{\ln(3)}$, men det er også helt ok. Man kalder dette for den *eksakte* løsning. Med en lommeregner eller computer kan vi beregne, at $x \approx 1{,}465$.

$\diamondsuit$

Bemærkning 1.8. Det ville være lige så godt, at benytte 10-talslogaritmen i ovenstående eksempel. Resultatet er det samme. Der gælder faktisk, at $\frac{\ln(5)}{\ln(3)} = \frac{\log(5)}{\log(3)}$.

$\diamondsuit$

Vi laver lige et enkelt eksempel mere, med en lidt mere avanceret ligning:

Eksempel 1.12. Vi skal løse ligningen $2 \cdot 5^{3x+8} = 8 \cdot 5^x$.

Første trin er at dividere med 2:

$$5^{3x+8} = 4 \cdot 5^x$$

Dernæst dividerer vi med 5^x

$$\frac{5^{3x+8}}{5^x} = 4$$

Nu bruger vi potensregnereglen $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$

$$5^{3x+8-x} = 4$$

næste trin er at tage ln på begge sider af lighedstegnet

$$\ln(5^{2x+8}) = \ln(4)$$

Nu bruger vi logaritmeregneregel 3:

$$(2x + 8)\ln(5) = \ln(4)$$

hvor vi nu isolerer x (tænk selv over mellemregningerne):

$$x = \frac{\ln(4)}{2\ln(5)} - 4$$

Dette er i øvrigt $x \approx -3{,}569$. Igen vil brug af log give samme resultat.

$\diamondsuit$

Vi har i ligningerne udnyttet, at vi med ln kan 'hive potensen ned foran'. Det ekstremt vigtigt i denne type af ligninger.

Omvendt kunne man også forestille sig en ligning, hvor der optræder en logaritme:

Eksempel 1.13. Lad os løse ligningen $3\log(4x + 8) = 9$.

Vi starter med at dividere med 3:

$$\log(4x + 8) = 3$$

Derefter tager vi '10 i x'te' på hver side af lighedstegnet

$$10^{\log(4x+8)} = 10^3$$

Husk nu på at 10^x og $\log(x)$ er hinandens omvendte funktioner, så de ophæver hinanden. Derfor bliver ligningen

$$4x + 8 = 1000,$$

hvor vi hurtigt kan isolere x (udfør selv mellemregningerne):

$$x = 248.$$

$\diamondsuit$

Bemærkning 1.9. Man bør i denne type ligninger på forhånd overveje, hvilke x-værdier det giver mening at finde løsninger i blandt. Dette kaldes ligningens *grundmængde*. I ovenstående eksempel er grundmængden $]-2,\infty]$, da vi kræver at $4x+8 > 0$. Man bør for så vidt gøre dette i alle typer af ligninger, men det er dog ikke noget vi vil gøre mere ud af her.

$\diamondsuit$

1.5.7 Opgaver

Opgave 1 (Uden hjælpemidler) Bestem forsriften for den eksponentialfunktion, der går gennem punkterne (1,8) og (3,32)

Opgave 2 (Uden hjælpemidler) Bestem forsriften for den eksponentialfunktion, der går gennem punkterne $(-1,1)$ og $(2,64)$

Opgave 3 (Uden hjælpemidler) Beregn tallene

a) $3\log(2) + \log(25) + \log(5)$

b) $\log(2) + \log(20) + 2\log(5) - \log(10)$

c) $2\log(4) + 4\log(5)$

Opgave 4 Bestem forskriften for eksponentialfunktionen gennem punkterne

a) $(-2,10)$ og $(3,1)$

b) $(0,7)$ og $(10,49)$

c) $(1,1)$ og $(2,2)$

Opgave 5 En eksponentialfunktion f går gennem punkterne $P(10,4)$ og $Q(2,62)$.

a) Bestem en forskrift for f.

b) Hvor mange procent aftager $f(x)$ med når x vokser med én?

c) Bestem halveringskonstanten.

Opgave 6 En eksponentialfunktion f går gennem punkterne $P(8,20)$ og $Q(12,62)$.

a) Bestem en forskrift for f.

b) Hvor mange vokser $f(x)$ med når x vokser med én?

c) Bestem fordoblingskonstanten.

Opgave 7 Bestem forskriften for eksponentialfunktionen f, når der oplyses at:

a) $T_2 = 10$ og $(3,9)$ ligger på grafen.

b) $T_{\frac{1}{2}} = 5$ og $(0,45)$ ligger på grafen.

c) $f(1) = 3$ og $f(38) = 273$

Opgave 8 Dette er en teoretisk opgaver om fordobling og halvering. Vi betragter $f(x) = b \cdot \mathrm{e}^{kx}$.

a) Vis, at for voksende eksponentialfunktioner er

$$T_2 = \frac{\ln(2)}{k}$$

b) Vis, at $\ln(2) = -\ln(\frac{1}{2})$

c) Vis, at for aftagende eksponentialfuntioner er

$$T_{1/2} = \frac{\ln(2)}{-k}$$

Opgave 9 Bestem halverings/fordoblingskonstamt, samt fremskrivningsfaktor og vækstrate for følgende funktioner:

a) $f(x) = 10 \cdot 2^{0,25x}$

b) $f(x) = 45 \cdot 2^{\frac{x}{25}}$

c) $f(x) = 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{0.125x}$

d) $f(x) = 34 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{0.0625x}$

e) $f(x) = 10 \cdot \mathrm{e}^{0,12x}$

f) $f(x) = 13 \cdot \mathrm{e}^{1.09x}$

g) $f(x) = 32 \cdot \mathrm{e}^{-0,25x}$

h) $f(x) = 54 \cdot \mathrm{e}^{-0,00023x}$

Opgave 10 Antallet af kerner i en klump bestående af det radioaktive stof plutonium-239, kan beskrives ved formlen:

$$N(t) = 1.23 \cdot 10^{21} \cdot \mathrm{e}^{-0.000029t}$$

hvor t er målt i år og $N(t)$ er de tilbageværende plutonium-239 kerner.

a) Bestem halveringstiden for plutonium-239.

b) Hvor mange kerner er der tilbage efter 100000 år?

c) Hvor lang tid skal der gå, for antallet af kerner er reduceret til 1%?

Opgave 11 I 2006 opgjorde man Danmarks skovareal til 6000 km^2.

a) Opstil en model for udviklingen i skovarealet, når det antages, at det vokser med 0,3 % om året.
Bestem skovarealet i 2089 ifølge denne model.

Folketinget satte i 1989 som mål, at skovarealet i 2089 skulle være 8600 km^2.

b) Hvad skal den gennemsnitlige årlige procentvise stigning være i perioden 2006- 2089, hvis skovarealet i 2089 skal nå op på 8600 km^2?

Opgave 12 I en epidemis begyndelse spredes en sygdom således, at antallet af smittede forøges med 21%, for hver uge der går efter tidspunktet, hvor sygdommen blev registreret. Da sygdommen blev registreret var der 153 smittede.

a) Indfør passende variable og opstil et udtryk, der beskriver antallet af smittede som funktion af antal uger efter sygdommen blev registreret.

b) Hvad er fordoblingkonstanten og hvad betyder dette tal?

Opgave 13 Løs ligningerne:

a) $10^x = 500$

b) $7\mathrm{e}^x = 21$

c) $4^{2x} = 70$

d) $3 \cdot 9^x = 6 \cdot 9^{2x}$

e) $21^{-x} = 10$

f) $6 \cdot 2^{3x-4} = 24$

Opgave 14 (Udfordring) Løs ligningen $9^x + 9^x + 9^x = 3^{4035}$.

Opgave 15 Løs ligningerne:

a) $\log(20x) = 5$

b) $\ln(2x+1) = 10$

c) $6\log(x) = 9$

d) $\log(x^2 + 19) = 2$

Opgave 16 Tabellen viser udviklingen i antallet af unge, der har problemer med at betale deres SU-gæld.

År	2005	2006	2007	2008	2009	2010
Antal	43 000	45 900	48 700	51 600	54 700	57 800

Det oplyses, at antallet $f(x)$ af unge med SU-gældsproblemer med god tilnærmelse kan beskrives ved funktionen

$$f(x) = b \cdot a^{x},$$

hvor x er antal år efter 2005.

a) Bestem tallene a og b.

b) Forklar betydningen af tallene a og b.

c) Bestem fordoblingstiden, og forklar betydningen af dette tal.

Opgave 17 Hvert år opgøres de danske bankers samlede nettogebyrindtægt for 1. halvår, her kaldet DHN. Tabellen viser DHN for hvert af årene i perioden 2002-2006.

Årstal	2002	2003	2004	2005	2006
DHN (mia. kr.)	6,697	7,160	8,137	8,408	10,538

I en model antages det, at DHN (mia. kr.) som funktion af tiden x (antal år efter 2002) med god tilnærmelse kan beskrives ved en eksponentiel udvikling f.

a) Benyt tabellens data til at bestemme en forskrift for f.

b) Benyt modellen til at bestemme DHN for 2007 og til at bestemme fordoblingskonstanten for DHN.

Opgave 18 I tabellen ses indbyggertallene for staten New York og staten Florida i år 2000.

	Indbyggertal i år 2000 (mio.)	Årlig vækstrate i perioden 1990-2000
Staten New York	18,98	0,54%
Staten Florida	15,98	2,13%

Endvidere ses de årlige vækstrater for de to stater i perioden 1990-2000.

a) Bestem, hvor mange procent indbyggertallet i alt voksede i Florida i perioden 1990-2000, og bestem indbyggertallet i Florida i 2007, hvis det forudsættes, at væksten efter år 2000 fortsætter på samme måde som i perioden 1990-2000.

b) Bestem, hvornår de to stater vil have lige mange indbyggere, hvis det forudsættes, at væksten i de to stater efter år 2000 fortsætter på samme måde som i perioden 1990-2000.

c) Bestem fordoblingstiden for indbyggertallet i de to stater.

Opgave 19 Begrund, hvilke af funktionerne

$$g(x) = 0{,}34 \cdot 1{,}27^x, \quad h(x) = 3{,}41 \cdot 0{,}72^x \quad \text{og} \quad k(x) = 7{,}2 \cdot 4{,}2^x$$

der er voksende, og bestem en forskrift for den eksponentielt voksende funktion f, der har vækstrate 20%, og for hvilken $f(0) = 10$.

Opgave 20 I 2005 var bevillingerne til forskning og uddannelse i et bestemt land 20 mia. kr. Det bliver besluttet, at disse bevillinger skal stige med en fast årlig procent, så de i 2020 når op på 60 mia. kr.

a) Bestem den årlige procentvise stigning i bevillingerne.

Opgave 21 I perioden 1980-2000 kan antallet af retspsykiatriske patienter under tilsyn beskrives ved modellen

$$f(t) = 297 \cdot 1{,}0679^t, \quad 0 \leq t \leq 20,$$

hvor $f(t)$ er antallet af retspsykiatriske patienter under tilsyn til tidspunktet t (målt i år efter 1980).

a) Bestem en fordoblingstiden for $f(t)$ og forklar hvad dette tal betyder.

b) Gør rede for, hvad konstanterne i modellen fortæller om udviklingen i antallet af retspsykiatriske patienter under tilsyn i perioden 1980-2000.

Opgave 22 Bevis regel nummer 2 for kvadratrødder:

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

Opgave 23 Bevis, at hvis $f = b \cdot a^x$, så er $f(x) = b \cdot \mathrm{e}^{kx}$, hvor $k = \ln(a)$.

Opgave 24 Nedenstående er mellemregningerne i et bevis for at, hvis f er en voksende eksponentialfunktion, $f(x) = b \cdot a^x$ med $a > 1$, så kan f skrives som

$$f(x) = b \cdot 2^{\frac{x}{T_2}}$$

Opgaven er at forklare alle detaljer, dvs. især forklare hvilke regneregler der er brugt, udfylde eventuelle manglende mellemregninger og gøre det klart, hvorfor beviset faktisk beviser det ønskede.

Bevis.

$$\begin{aligned}
b \cdot a^x &= b \cdot 2^{\frac{x}{T_2}} \\
a^x &= 2^{\frac{x}{T_2}} \\
x \cdot \ln(a) &= \frac{x}{T_2} \cdot \ln(2) \\
T_2 \cdot \ln(a) &= \ln(2) \\
T_2 &= \frac{\ln(2)}{\ln(a)} \\
T_2 &= T_2
\end{aligned}$$

□

Opgave 25 Bevis, at hvis $a < 1$, så er

$$f(x) = b \cdot a^x = b \cdot \left(\tfrac{1}{2}\right)^{\frac{x}{T_{1/2}}}$$

Opgave 26 Bevis, at $\ln(x)$ og $\log(x)$ er proportionale. Bevis mere specifikt, at

a) $\ln(x) = \ln(10) \cdot \log(x)$

b) $\log(x) = \log(\mathrm{e}) \cdot \ln(x)$

1.6 Potensfunktioner

1.6.1 Forskrift

Forskriften for en potensfunktion er

$$f(x) = b \cdot x^a$$

Her skal $b > 0$ og $x > 0$, mens $a \in \mathbb{R}$ kan være et vilkårligt tal.

Vi husker på, at der gælder

$$p^{-n} = \frac{1}{p^n}$$

således er det klart at hvis $a < 0$, f.eks. -3, i forskriften ovenfor, så kan forskriften også skrives således:

$$f(x) = b \cdot x^{-3} = b \cdot \frac{1}{x^3}$$

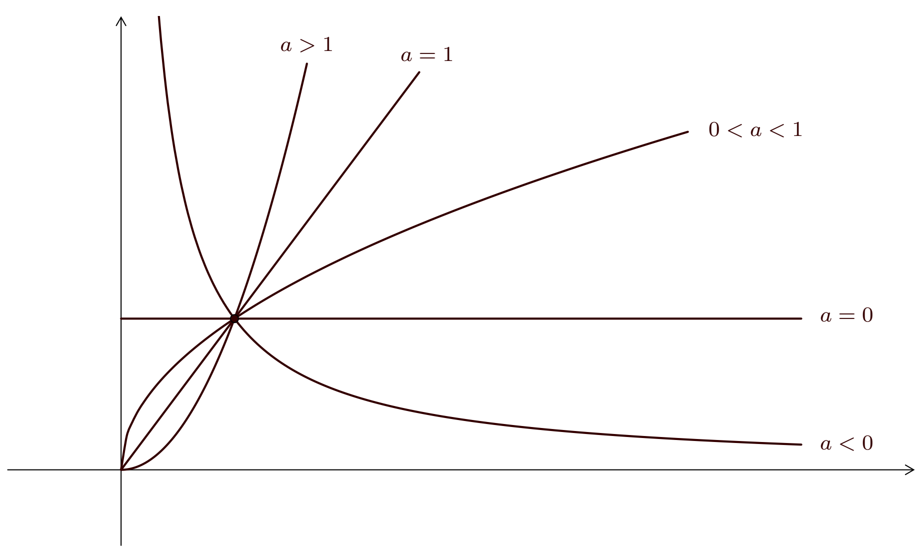
hvoraf det kan ses at når x vokser så bliver brøken mindre og mindre, og dermed bliver funktionsværdien mindre og mindre. Dette betyder at en potensfunktion er aftagende, når $a < 0$. Er $a = 0$, så er

$$f(x) = b \cdot x^a = b \cdot x^0 = b \cdot 1 = b,$$

hvorfor funktionen er konstant lig med b og dermed er grafen en vandret linje. Hvis $a > 0$ er funktionen voksende. Dette er illustreret nedenfor.

1.6.2 Graf

Der er fem mulige graftyper for potensfunktioner afhængigt af værdien af a. Disse ses her:



Bemærk, at alle grafer går gennem punktet $(1,b)$, fordi

$$f(1) = b \cdot 1^a = b \cdot 1 = b.$$

1.6.3 Bestemmelse af forskrift ud fra to punkter

Kender vi to punkter på grafen for en potensfunktion, så kan vi bestemme forskriften (helt i stil med metoden fra lineære og eksponentielle funktioner). Vi kan bruge formlerne fra følgende sætning:

Sætning 1.6. *Hvis $P(x_1,y_1)$ og $Q(x_2,y_2)$ er to forskellige punkter på grafen for potensfunktionen $f(x) = b \cdot x^a$, så kan a og b findes ved formlerne*

$$a = \frac{\log(y_2) - \log(y_1)}{\log(x_2) - \log(x_1)} \quad \text{og} \quad b = \frac{y_1}{(x_1)^a}$$

Bevis. Hvis $P(x_1,y_1)$ og $Q(x_2,y_2)$ er punkter på grafen for $f(x) = b \cdot x^a$, så kan vi indsætte punkternes koordinater i forskriften og danne to ligninger:

$$y_1 = b \cdot (x_1)^a \quad \text{og} \quad y_2 = b \cdot (x_2)^a$$

Vi dividerer nu venstre side med venstre side og højre side med højre side i ligningerne

$$\frac{y_2}{y_1} = \frac{b \cdot (x_2)^a}{b \cdot (x_1)^a}$$

Først ser vi at b'erne går ud med hinanden

$$\frac{y_2}{y_1} = \frac{(x_2)^a}{(x_1)^a}$$

Nu bruger vi potensregnereglen $\frac{(x_2)^a}{(x_1)^a} = \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^a$ på højresiden og får

$$\frac{y_2}{y_1} = \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^a$$

Nu tages logaritmen på begge sider af lighedstegnet

$$\log\left(\frac{y_2}{y_1}\right) = \log\left(\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^a\right)$$

Logaritmeregneregel 3 bruges på højresiden

$$\log\left(\frac{y_2}{y_1}\right) = a \cdot \log\left(\frac{x_2}{x_1}\right)$$

og vi dividerer med $\log\left(\frac{x_2}{x_1}\right)$ på begge sider af lighedstegnet

$$\frac{\log\left(\frac{y_2}{y_1}\right)}{\log\left(\frac{x_2}{x_1}\right)} = a$$

og til sidst bruges logaritmeregneregel nummer 2 både i tæller og nævner

$$a = \frac{\log(y_2) - \log(y_1)}{\log(x_2) - \log(x_1)}$$

hvilket var det første vi skulle bevise.

For at finde b isolerer vi bare i ligningen $y_1 = b \cdot (x_1)^a$ og får ved division med $(x_1)^a$ på begge sider af lighedstegnet, at

$$b = \frac{y_1}{(x_1)^a}$$

hvilket færdiggør beviset. □

Bemærkning 1.10. Havde vi i beviset ovenfor valgt at bruge ln i stedet for log, så var udregningerne blevet helt de samme. Formlen er således også gyldig med ln:

$$a = \frac{\ln(y_2) - \ln(y_1)}{\ln(x_2) - \ln(x_1)}$$

◊

1.6.4 *Procent-procent*-vækst

En speciel egenskab for potensfunktioner er, at hvis den uafhængige variabel x vokser med en bestemt procentsats, r_x, (uanset udgangspunktet for x), så vil den afhængige variabel $f(x)$ også vokse med en bestemt procentsats, r_y. Dette kaldes nogen gange for *procent-procent*-vækst.

Husk på, at hvis x skal vokse med en bestemt procentsats, f.eks. 73%, så kan man udregne dette ved at gange med 1,73. Hvis x skal aftage med 42%, så kan man gange med 0,58 osv. Vi vil nu se på, hvad der sker med $f(x)$, når vi ganger x med en konstant k, som er større end nul (dette k svarer f.eks. til de 1,73 eller 0,52 ovenfor).

Vi lader nu $k > 0$ og udregner $f(k \cdot x)$

$$f(k \cdot x) = b \cdot (k \cdot x)^a = b \cdot x^a \cdot k^a = f(x) \cdot k^a$$

hvor vi i udregningen først satte ind i forskriften og dernæst brugte potensregneregelen $(p \cdot q)^n = p^n \cdot q^n$. Af dette kan vi konkludere følgende om potensfunktioner:

Hvis x ganges med et tal k (som er større end nul), så vil det medføre at $f(x)$ ganges med tallet k^a.

Dette kan også formuleres lidt anderledes, hvilket vi vil gøre nu. Hvis vi skriver $k = 1 + r_x$, hvor altså r_x er den procentsats (skrevet som decimaltal) som x skal vokse eller aftage med. Så vil (ifølge det ovenstående) $f(x)$ vokse/aftage med en procentsats, der svarer til at gange med k^a. Vi kan derfor skrive $1 + r_y = k^a$, hvor altså r_y er den procentsats (skrevet som decimaltal), hvormed $f(x)$ vokser/aftager. Kombineres dette opnår vi formlen

$$1 + r_y = (1 + r_x)^a.$$

Eksempel 1.14. Vi tager lige et eksempel. Vi ser på potensfunktionen

$$f(x) = 2 \cdot x^{1.62}$$

a) Beregn hvor mange procent $f(x)$ vokser med når x vokser med 34%:

Vi ser at $r_x = 0{,}34$ fordi det svarer til 34%. Vi vil finde r_y i ovenstående formel:

$$1 + r_y = (1 + r_x)^a = (1 + 0{,}34)^{1{,}62} = 1{,}34^{1{,}62} = 1{,}60661$$

hvoraf det ses at $r_y = 0{,}60661 = 60{,}661\%$. Og dermed vil $f(x)$ vokse med cirka 60,7%, når x vokser med 34%.

b): Beregn hvor mange procent x skal vokset med, hvis $f(x)$ skal vokse med 29%:

Her skal vi finde r_x, når $r_y = 0{,}29$. Dette gøres ved at løse ligningen

$$1 + 0{,}29 = (1 + r_x)^{1{,}62}$$

dette kan gøres i hånden eller i Nspire. Resultatet er $r_x = 0.17021 = 17{,}021\%$, hvilket betyder at x skal vokse med cirka 17%, hvis $f(x)$ skal vokse med 29%.

c): Beregn hvor mange procent x skal aftage, hvis $f(x)$ skal aftage med 47%. Vi skal igen finde r_x, i tilfældet hvor $r_y = -47\% = -0{,}47$. Vi løser ligningen

$$1 - 0{,}47 = (1 + r_x)^{1{,}62}$$

Resultatet er $r_x = -0{,}324228 = -32{,}4228\%$. Altså skal x aftage med cirka 32,4% for at $f(x)$ aftager med 47%.

$\diamondsuit$

1.6.5 Opgaver

Opgave 1 Bestem forskriften for den potensfunktion, der går gennem punkterne

a) $P(2{,}2)$ og $Q(10{,}6)$
b) $P(1{,}3)$ og $Q(4{,}1)$
c) $P(3{,}1)$ og $Q(5{,}15)$

Opgave 2 En potensfunktion f går gennem punkterne $P(3{,}4)$ og $Q(6{,}22)$.

a) Bestem en forskrift for f.
b) For hvilket x er $f(x) = 100$
c) Hvor mange procent vokser $f(x)$ med når x vokser med 25%?
d) Hvor mange procent skal x vokse med for at $f(x)$ vokser med 56%.

Opgave 3 Lad $f(x) = 3 \cdot x^{1.7}$.

a) Hvor mange procent vokser $f(x)$ med når x vokser med 15%?
b) Hvor mange procent skal x vokse med for at $f(x)$ vokser med 39%?

Opgave 4 Lad $f(x) = 3 \cdot x^{0.2}$.

a) Hvor mange procent vokser $f(x)$ med når x vokser med 54%?
b) Hvor mange procent skal x vokse med for at $f(x)$ vokser med 20%?

Opgave 5 Lad $f(x) = 2 \cdot x^{-1.23}$.

a) Hvor mange procent aftager $f(x)$ med når x vokser med 85%?
b) Hvor mange procent skal x vokse med for at $f(x)$ aftager med 45%?

Opgave 6 Tabellen viser verdensrekorderne i vægtløftning for kvinder i forskellige vægtklasser.

Vægtklasse (kg)	48	53	58	63	69
Verdensrekord (kg)	217	230	251	257	286

Sammenhængen kan beskrives ved modellen

$$f(x) = b \cdot x^a,$$

hvor x er vægtklassen, målt i kg, og $f(x)$ er verdensrekorden, målt i kg.

a) Bestem tallene a og b ved at bruge alle tabellens oplysninger.

b) Bestem verdensrekorden for kvinder i vægtklassen 75 kg ifølge modellen.
Kommentér dette resultat, når det oplyses, at den faktiske verdensrekord i denne vægtklasse er 296 kg.

Opgave 7 For kaffedåser med en bestemt højde kan rumfanget V, målt i cm^3, beregnes ved hjælp af formlen

$$V = 37{,}5 \cdot r^2,$$

hvor r er dåsens radius, målt i cm.

En dåse med denne højde har en radius på 4,0 cm.

a) Bestem rumfanget af denne dåse.

Producenten ønsker en dåse med samme højde, men med det dobbelte rumfang.

b) Hvor mange procent større skal radius så være?

Opgave 8 Undersøgelser har vist, at det årlige antal bilulykker med personskade på en bestemt vejstrækning kan beregnes af formlen

$$f(x) = 0{,}0025 \cdot x^2.$$

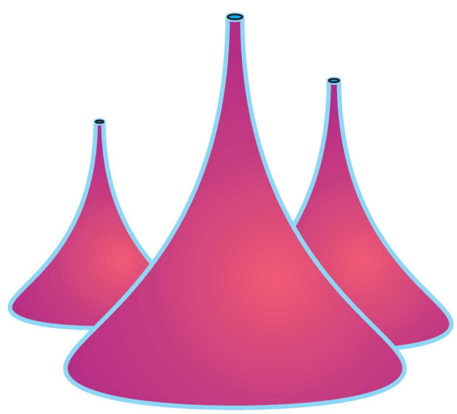
Her betyder x den tilladte hastighed (målt i km/t), og $f(x)$ betyder det årlige antal bilulykker med personskade på vejstrækningen.

a) Bestem det årlige antal bilulykker med personskade på vejstrækningen, hvis den tilladte hastighed er 80 km/t.

Man overvejer at tillade en højere hastighed på vejstrækningen.

b) Hvor mange procent vil antallet af bilulykker med personskade stige, hvis man sætter den tilladte hastighed op med 12,5 %?

Opgave 9



Tabellen viser sammenhørende værdier af højde og rumfang for en bestemt serie af karafler.

Højde (cm)	5	10	15	20	25	30
Rumfang (cm^3)	20	157	530	1256	2453	4239

I en model antages det, at sammenhængen mellem højde og rumfang kan beskrives ved en funktion af typen $V(x) = b \cdot x^a$, hvor $V(x)$ betegner rumfanget (målt i cm^3), og x betegner højden (målt i cm).

a) Benyt tabellens data til at bestemme en forskrift for V.

b) Bestem højden af en karaffel, der skal kunne rumme 2000 cm^3.

c) Bestem hvor mange procent rumfanget af en karaffel i denne serie ændres med, når højden øges med 10%.

Opgave 10

Når en kvægavler skal bestemme vægten af en kvie, kan han måle omkredsen af dyrets bryst (bringemålet) og derefter finde vægten i en tabel. Tabellen viser sammenhængen mellem bringemål og vægt for kvier af Jersey-racen.

Bringemål (cm)	62,0	75,0	82,5	97,0	113,0	148,5	162,5
Vægt (kg)	25,4	32,6	46,3	82,1	126	236	335

Denne sammenhæng kan med god tilnærmelse beskrives ved

$$y = b \cdot x^a,$$

hvor x er bringemålet (cm) og y er vægten (kg).

a) Bestem tallene a og b.

b) Bestem vægten af en kvie med bringemål 130 cm i følge modellen.

c) Bestem bringemålet af en kvie der vejer 350 kg i følge modellen.

Opgave 11 Nogle floder forgrener sig over områder med flere flodløb. Derved dannes et flodbassin. Der gælder med god tilnærmelse en sammenhæng af formen (Hack's lov)

$$\log(y) = 0{,}59 \cdot \log(x) + 0{,}18\,,$$

hvor x er arealet (målt i km^2) af flodbassinet, og y er det længste flodløb (målt i km) i bassinet.

a) Bestem arealet af flodbassinet Big Creek, hvor det længste flodløb er 21,5 km.

Sammenhængen mellem x og y kan også skrives på formen $y = b \cdot x^{\,a}$.

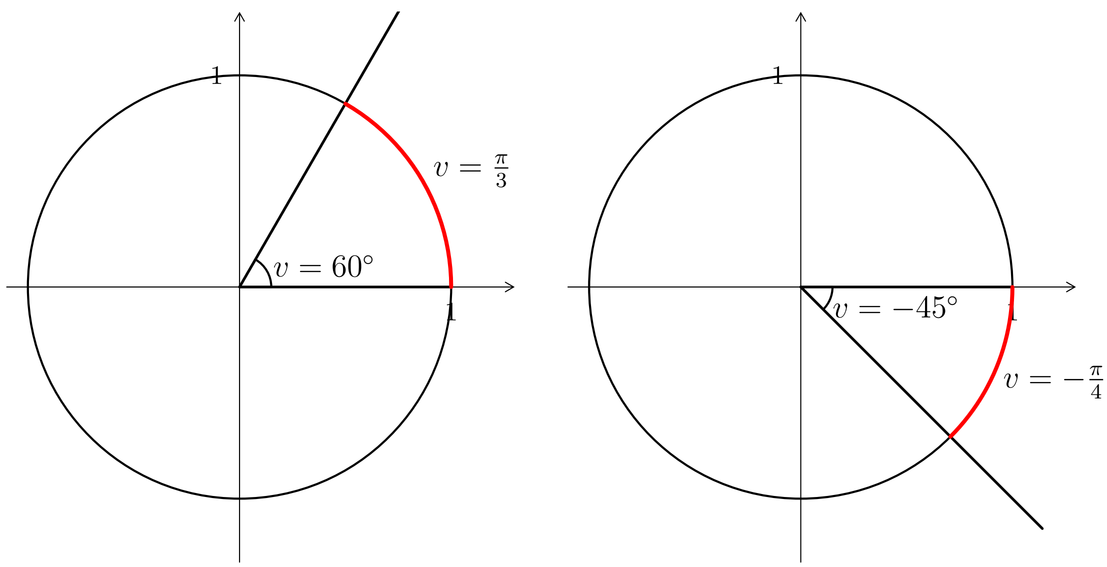
b) Bestem tallene a og b.

1.7 Trigonometriske funktioner

1.7.1 Radian

Vi er vant til at måle vinkler i grader, men i visse sammenhænge er det mere hensigtsmæssigt, at finde et nyt vinkelmål. Lidt ligesom det i nogen sammenhænge kan være smart at måle vægten af noget i gram, og i andre sammenhænge i tons. Vores nye vinkelmål kaldes *radian*, og er defineret her:

Definition 1.9. Radiantallet for en vinkel v er defineret som længden af den cirkelbue i enhedscirklen, som vinklen spænder over. Radianmålet regnes positivt i positiv omløbsretning, og negativt i negativ omløbsretning.



Figur 1.5: På figuren kan vi se to vinkler med deres sædvanlige vinkelmål i grader. Ligeledes er der vinkelbuer, som vinklerne spænder over på enhedscirklen indtegnet (med rødt), og det tilhørende radiantal er angivet.

Da enhedscirklens omkreds er 2π, så er det klart, at der gælder

$$360° = 2\pi.$$

Vi kan derfor omregne fra radian til grader eller omvendt ved følgende formler:

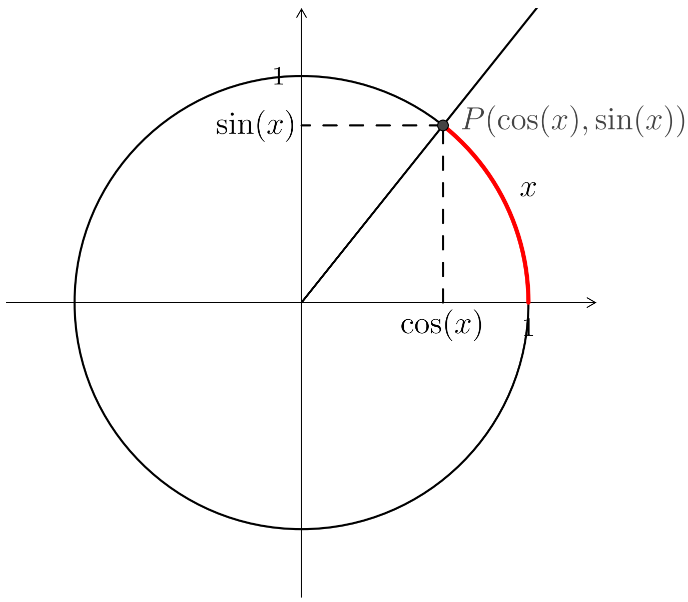
$$v_{\text{rad}} = v_{\text{grader}} \cdot \frac{2\pi}{360°} \quad \text{og} \quad v_{\text{grader}} = v_{\text{rad}} \cdot \frac{360°}{2\pi}$$

Af disse formler fremgår det også, som det også ses på figuren ovenfor, at en vinkel på $60°$ svarer til $\frac{\pi}{3}$ målt i radian (en sjettedel af 2π), og at en vinkel på $-45°$ svarer til $-\frac{\pi}{4}$ målt i radian (en ottendedel af 2π, med minus foran).

1.7.2 Definition af de trigonometriske funktioner

Med radianmålet på plads kan vi definere de trogonometriske funktioner **sinus** og **cosinus**:

Definition 1.10. Funktionen $\cos(x)$ defineres som førstekoordinaten til retningspunktet P for vinklen x målt i radian. Tilsvarende defineres funktionen $\sin(x)$ som andenkoordinaten til retningspunktet P for vinklen x målt i radian.



Figur 1.6: På figuren er P retningspunktet for vinklen x målt i radian. De trigonometriske funktioner $\cos(x)$ og $\sin(x)$ er henholdsvis første- og andenkoordinaten til P.

Funktionerne $\cos(x)$ og $\sin(x)$ er definerede for alle $x \in \mathbb{R}$, mens deres værdimængde er intervallet $[-1{,}1]$.

Vi kan nu også definere **tangens**:

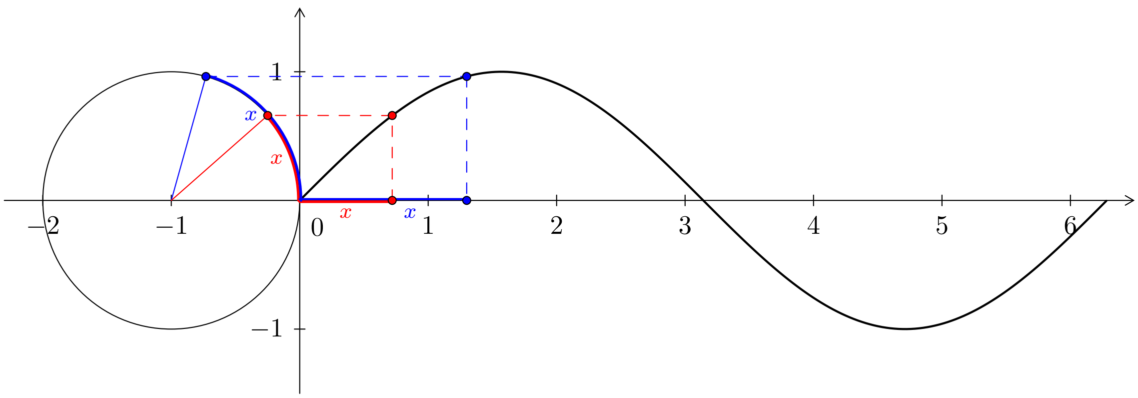
Definition 1.11. Funktionen $\tan(x)$ defineres som brøken:

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}.$$

Dette giver kun mening, når $\cos(x) \neq 0$, det vil sige, at tangens ikke er defineret for $x = \frac{\pi}{2} + p \cdot \pi$, hvor $p \in \mathbb{Z}$.

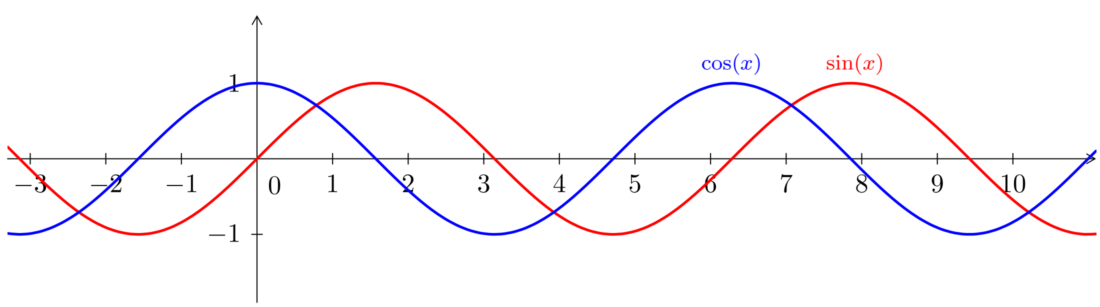
1.7.3 Grafer

Graferne for $\sin(x)$ og $\cos(x)$ er meget bemærkelsesværdige. Herunder kommer et geometrisk argument for forløbet for grafen for $\sin(x)$. Vi tager udgangspunkt i figuren:



Da $\sin(x)$ er andenkoordinaten for retningspunktet, så kan vi tegne grafen for $\sin(x)$, ved til hver værdi x (målt i radian) på enhedscirklen, at gå et tilsvarende stykke ud på x-aksen, for derefter at afsætte et punkt på grafen i samme højde (dvs. samme andenkoordinat), som retningspunktet på enhedscirklen. Dette er illustreret i to tilfælde ovenfor (rødt og blåt). For hvert $x \in [0{,}2\pi]$ kan noget tilsvarende gøres, og så opnår man grafen dom ses ovenfor. Fortsætter vi rundt og rundt på enhedscirklen, så fortsætter grafen med at gentage sig selv.

Man kan lave noget helt tilsvarende for $\cos(x)$, her bliver det hele bare forskudt med $\frac{\pi}{2}$. Dette betyder at graferne for $\cos(x)$ og $\sin(x)$ er identiske, bare forskudt af hinanden. Dette ses herunder:



Det er klart fra definitionen, at $\cos(x) = \cos(x + p \cdot 2\pi)$ og at $\sin(x) = \sin(x + p \cdot 2\pi)$ for $p \in \mathbb{Z}$, idet man ikke kan se forskel på, om man har roteret et antal gange rundt på enhedscirklen. Man siger at $\cos(x)$ og $\sin(x)$ er ***2π-periodiske***, altså at de gentager sig selv i perioder på 2π. Dette ses også på graferne.

Grafen for $\tan(x)$ vil ikke komme nærmere ind på. Den interesserede læser opfordres til at tegne den selv, gerne i Nspire.

1.7.4 Trigonometriske ligninger

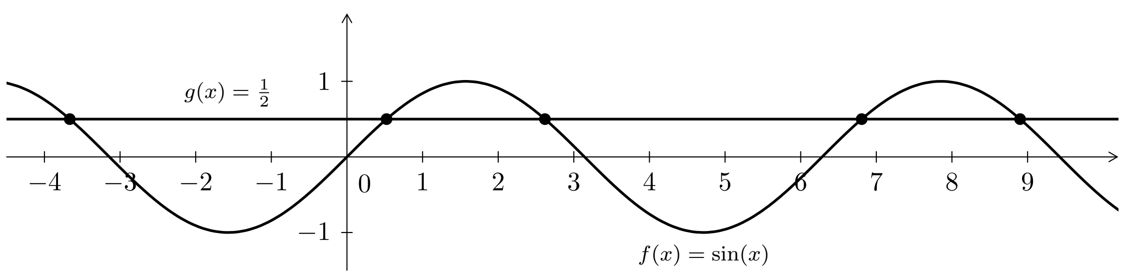
At løse ligninger i hånden, der involverer cosinus og sinus er potentielt lidt af en kunst. Det er et spændende emne, som vi dog ikke rigtigt vil komme nærmere ind på her.

I stedet vil vi fokusere på at bruge Nspire til at løse de ligninger vi kommer ud for. Det kan dog i sig selv være svært nok. Inden vi kaster os ud i at løse ligninger i Nspire, så skal vi dog lige gøre os visse overvejelser først.

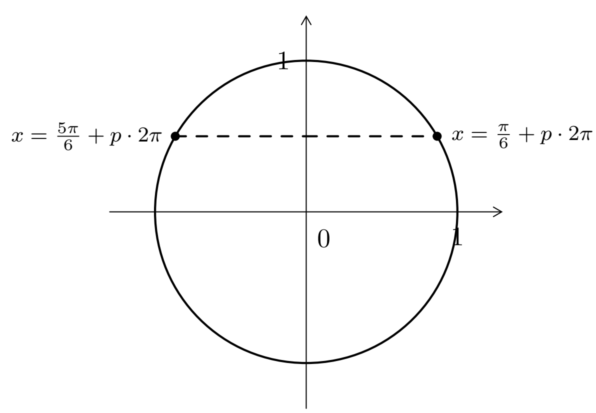
Lad os tage udgangspunkt i lignigen

$$\sin(x) = \frac{1}{2}$$

Hvis vi tegner graferne for $f(x) = \sin(x)$ og $g(x) = \frac{1}{2}$, så ser vi at disse har uendeligt mange skæringspunkter:



Vi kan altså hurtigt indse at ligningen har uendeligt mange løsninger. Dette afspejler sig også i enhedscirklen:



Figur 1.7: Vi ser at $x = \frac{\pi}{6}$ løser ligningen, men vi ser også, at for hver omgang vi roterer på enhedscirklen for vi en ny løsning. Derfor er alle tal på formen $x = \frac{\pi}{6} + p \cdot 2\pi$ for $p \in \mathbb{Z}$ en løsning til ligningen. Det samme gælder for $x = \frac{5\pi}{6} + p \cdot 2\pi$.

Som vi skrev før, så vil vi ikke gøre noget stort nummer ud af at løse ligninger som denne i hånden. Så ovenstående er blot taget med for at forstå lidt af hvad der sker i Nspire ved løsning af trigonometriske ligninger.

Løsning af denne ligning i Nspire giver følgende lettere ubehagelige svar:

$$\text{solve}\left(\sin(x)=\frac{1}{2},x\right) \blacktriangleright x=2\cdot \boldsymbol{n1}\cdot \pi+\frac{\pi}{6} \text{ or } x=2\cdot \boldsymbol{n1}\cdot \pi+\frac{5\cdot \pi}{6}$$

Ser man godt efter, så kan man dog hurtigt indse at dette blot er en anden udgave af de løsninger vi fandt frem til før. Den eneste forskel er sådan set at Nspire kalder p for `n1`.

Nu er det imidlertid sådan, at der (næsten) altid følger en grundmængde med til den trigonometriske ligning man skal løse, eller en definitionsmængde til den trigonometriske funktion vi skal bruge, så løsningerne skal (næsten) altid søges i et bestemt interval. Hvis vi således skal finde løsninger til ligningen i intervallet $[0{,}4\pi]$, skriver vi blot i Nspire:

$$\text{solve}\left(\sin(x)=\frac{1}{2},x\right)|0\leq x\leq 4\cdot \pi \blacktriangleright x=\frac{\pi}{6} \text{ or } x=\frac{5\cdot \pi}{6} \text{ or } x=\frac{13\cdot \pi}{6} \text{ or } x=\frac{17\cdot \pi}{6}$$

hvor det ikke er noget problem at aflæse løsningerne.

Ved løsning af trigonomeriske ligninger i Nspire, så HUSK:

1. at bruge begrænsningerne, som (næsten) altid er givet i opgaven, så du ikke får uendeligt mange løsninger.
2. at dobbeltjekke at dine vinkelindstillinger er sat til radian, hvis dine resultater bliver mærkelige.

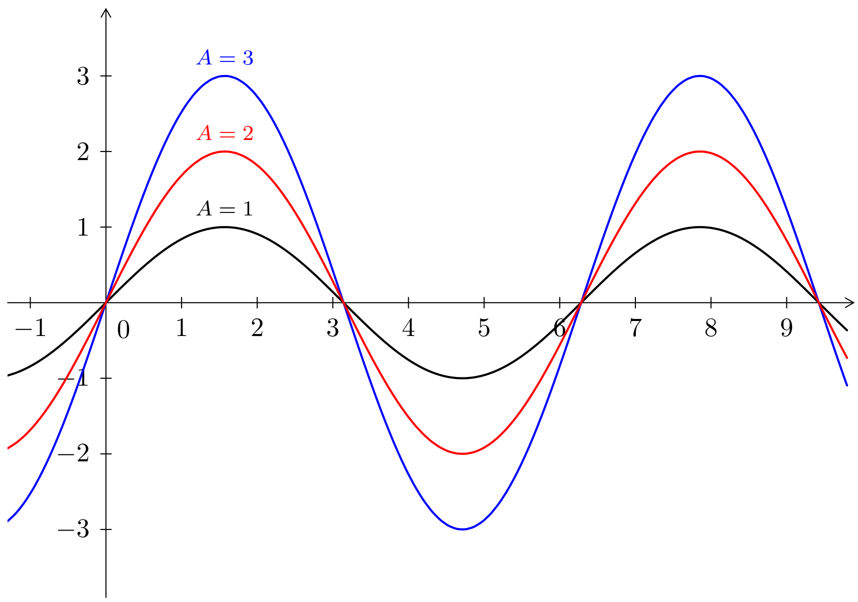
1.7.5 Harmoniske svingninger

Funktionen
$$f(x) = A\sin(\omega \cdot x + \varphi) + d$$
hvor $A, \omega > 0$, og $\varphi, d \in \mathbb{R}$ beskriver det vi kalder en harmonisk svingning.

En harmonisk svingning kan bruges til at modellere periodiske fænomener, som bølger, tidevand, et svingende pendul osv.

Konstanterne A, ω, φ og d er med til at fastlægge grafen for svingningen. Disse har følgende betydning:

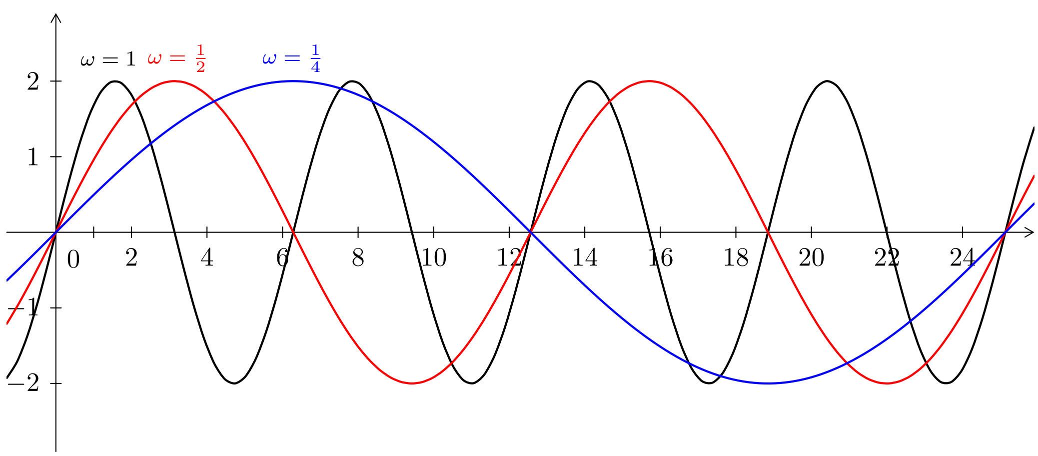
- A fastlægger højden på kurvens udsving (bølgens amplitude). Dette ses på grafen herunder:



- ω kaldes vinkelfrekvensen eller vinkelhastigheden. Vinkelfrekvensen angiver, hvor mange svingninger per 2π radianer funktionen har. Vinkelfrekvensen hænger sammen med perioden for f, som vi talder T, på følgende måde:

$$T = \frac{2\pi}{\omega}.$$

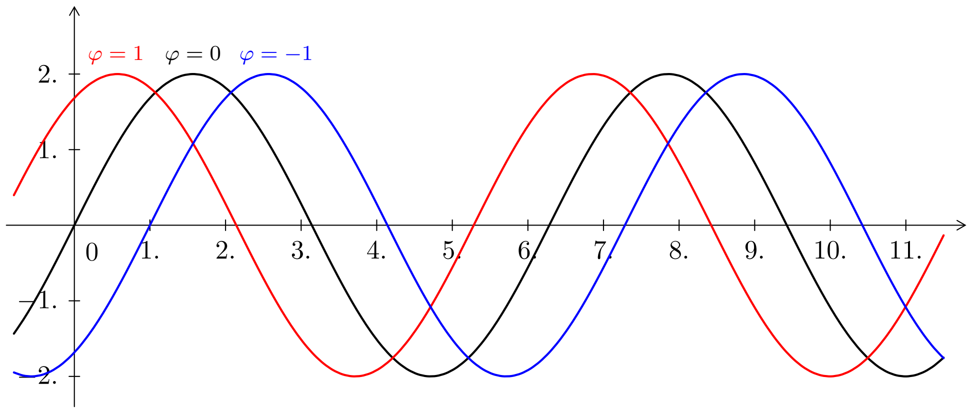
Effekten af vinkelfrekvensen er illustreret nedenfor:



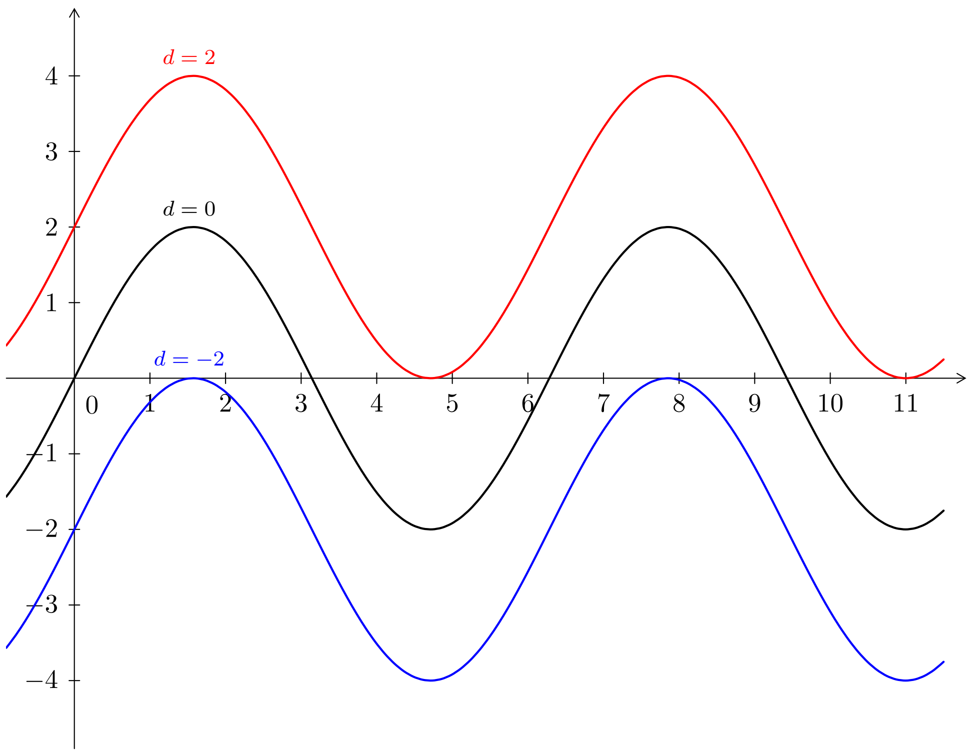
- φ kaldes faseforskydningen. Faseforskydningen afgør hvorledes grafen er parallelforskudt i x-aksens retning. Der gælder i almindelighed at for $h > 0$ vil grafen for en funktion f blive parallelforskudt med h mod højre, når h trækkes fra x: $f(x - h)$ og med h mod venstre, hvis h lægges til x: $f(x + h)$. Dette bruger vi nu, idet vi lægger h til x i $\sin(\omega \cdot x)$ (h kan være både positiv og negativ):

$$\sin(\omega(x + h)) = \sin(\omega \cdot x + \omega \cdot h)$$

hvoraf det ses at, hvis $\varphi = \omega \cdot h$, så er f parallelforskudt med $h = \frac{\varphi}{\omega}$ mod venstre, hvis $\varphi > 0$ og tilsvarende mod højre, hvis $\varphi < 0$. For $\omega = 1$ er effekten af φ indtegnet nedenfor:



- d kaldes ligevægtsværdien, og betegner den y-værdi, hvor 'midten' af grafen befinder sig. Dette betyder, at d angiver parallelforskydningen i y-aksens retning. Dette er også eksemplificeret nedenfor:



Bemærk, at d *ikke* i almindelighed angiver skæring med y-aksen. Det er kun tilfældet, hvis der samtidigt gælder $\varphi = 0$ (eller at φ er et multiplum af 2π), hvilket er tilfældet for funktionerne tegnet ovenfor.

1.7.6 Opgaver

Opgave 1 I de nedenstående opgaver skal du først lave en skitse, der indholder enhedscirklen med den pågældende vinkel indtegnet. Dette skal du bruge til at finde radiantallet, der hører til vinklen, når vinklen er:

a) $90°$	b) $180°$	c) $270°$	d) $45°$
e) $60°$	f) $30°$	g) $120°$	h) $75°$
i) $-60°$	j) $-30°$	k) $-120°$	l) $-75°$

Opgave 2 Hvad er gradtallet, der hører til følgende radiantal:

a) $\frac{\pi}{9}$	b) $-\frac{4\pi}{9}$	c) $\frac{\pi}{18}$	d) $-\frac{7\pi}{18}$
e) $\frac{7\pi}{36}$	f) $-\frac{3\pi}{5}$	g) 8π	h) -4π

Opgave 3 Beregn eller aflæs fra en tegning følgende værdier (hvor alle vinkler er målt i radian):

a) $\cos(\pi)$	b) $\sin(\pi)$	c) $\cos(-\pi)$	d) $\sin(-\pi)$
e) $\cos(\frac{\pi}{2})$	f) $\sin(\frac{\pi}{2})$	g) $\cos(\frac{\pi}{3})$	h) $\sin(-\frac{\pi}{3})$
i) $\cos(-\frac{\pi}{2})$	j) $\sin(-\frac{\pi}{2})$	k) $\cos(0)$	l) $\sin(0)$
m) $\tan(0)$	n) $\tan(\pi)$	o) $\tan(-\pi)$	p) $\tan(\frac{\pi}{2})$

Opgave 4 Overvej, ved at se på graferne (og evt støttet af udregninger), hvilke af følge påstande der er korrekte:

a) $\cos(x) = \sin(x - \frac{\pi}{2})$

b) $\cos(x) = \sin(x + \frac{\pi}{2})$

c) $\sin(x) = \cos(x - \frac{\pi}{2})$

d) $\sin(x) = \cos(x + \frac{\pi}{2})$

Opgave 5 Løs følgende ligninger. Metoden er valgfri.

a) $\sin(x) = \frac{1}{2}$ for $0 \le x \le 2\pi$.

b) $\cos(x) = 0$ for $-\pi \le x \le \pi$.

c) $\sin(x) = 0$ for $-2\pi \le x \le 2\pi$.

Opgave 6 Brug Nspire til at løse ligningerne:

a) $3\cos(2x) = 2$ for $x \in [0{,}2\pi]$

b) $-2\sin(x+\pi) = 0$ for $x \in [-\pi{,}\pi]$

c) $\sin(2x)^2 = \frac{1}{2}$ for $x \in [0{,}\frac{\pi}{2}]$

d) $3\cos(2x) + \sin(x) = 2$ for $x \in [0{,}\pi]$

Opgave 7 Lad

$$f(x) = \sin(2\pi x) + 3.$$

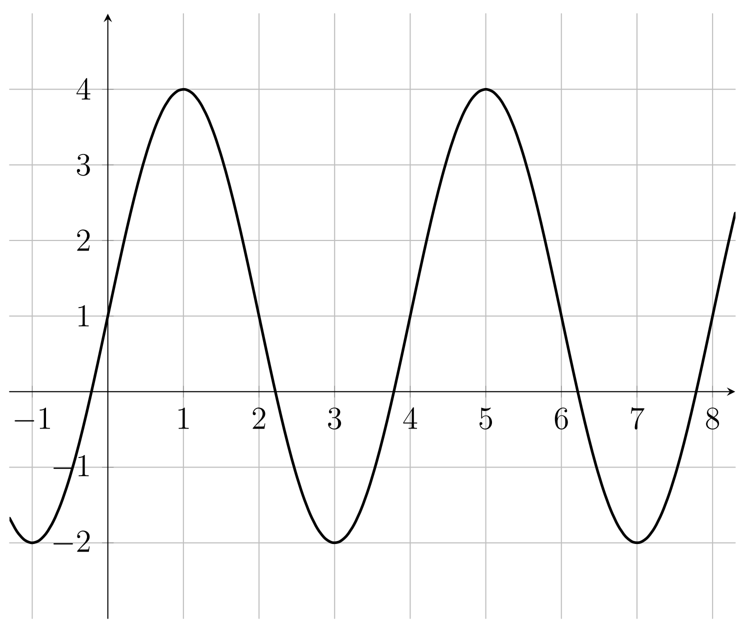
a) Bestem $f(0)$ og $f(\frac{1}{4})$.

b) Bestem perioden for f

c) Tegn grafen for f hen over to perioder.

Opgave 8 Herunder ses grafen for en harmonisk svingning på formen

$$f(x) = A\sin(\omega x) + d$$



a) Bestem $f(2)$.

b) Bestem perioden for f.

c) Bestem forskriften for f.

Opgave 9 En funktion er givet ved

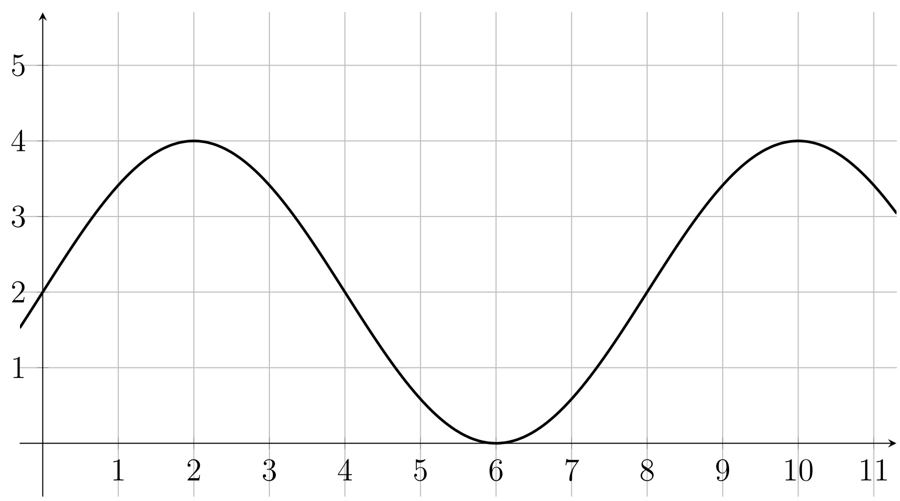
$$f(x) = 5{,}6 \cdot \sin(2x) + 4$$

a) Bestem perioden for f.

b) Bestem største- og mindsteværdien for f.

Opgave 10 Herunder ses grafen for en harmonisk svingning på formen

$$f(x) = A\sin(\omega x) + d$$



a) Bestem $f(2)$.

b) Bestem perioden for f.

c) Løs ligningerne $f(x) = 4$ og $f(x) = 2$.

d) Bestem forskriften for f.

Opgave 11 For en harmonisk svingning på formen $f(x) = A\sin(\omega x) + d$ gælder det, at:

- $f(0) = 3$.
- Maksimumsværdien for f er 7 og minimumsværdien for f er -1.
- Perioden for f er $T = 4$.

a) Tegn grafen for f.

b) Bestem forskriften for f

Opgave 12 Med et spirometer har man målt, hvordan luftmængden i lungerne hos en bestemt person afhænger af tiden. I en model kan luftmængden beskrives ved

$$f(t) = 3,2 + 0{,}4 \cdot \sin(1{,}25 \cdot t), \quad 0 \leq t \leq 10,$$

hvor $f(t)$ er luftmængden i lungerne (målt i liter) til tidspunktet t (målt i sekunder fra begyndelsen af vejrtrækningen).

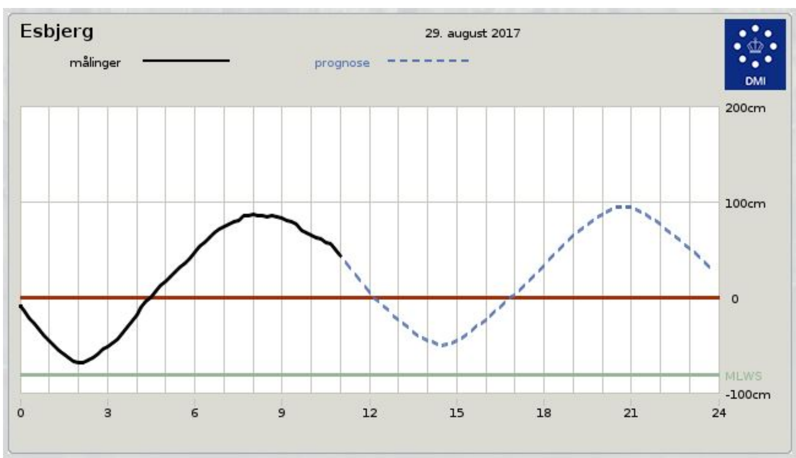
a) Tegn grafen for f.

b) Benyt modellen til at bestemme den maksimale og den minimale luftmængde.

c) Benyt modellen til at bestemme de tidspunkter, hvor luftmængden er 3,5 liter.

d) Hvor lang tid tager én vejrtrækning?

Opgave 13 Vandstanden i vadehavet ses herunder for Esbjerg d. 29. august 2017:



a) Lav en matematisk model, der (tilnærmelsesvist) beskriver vandstanden i løbet af døgnet d. 29. august. Du må gerne antage bølgetoppene og –dalene på billedet er lige høje/dybe.

b) Antag nu at en stiv kuling fra vest presser vandet ind mod Esbjerg, så vandstanden forhøjes med 50 cm. Hvordan kan du tilpasse din model til den nye situation?

Opgave 14 I en model kan længden af dagen i Anchorage Alaska som funktion af tiden beskrives ved

$$f(t) = 6{,}61 \cdot \sin(0{,}0167t - 1{,}303) + 12{,}2\ , \quad 0 \leq t \leq 365,$$

hvor $f(t)$ er længden af dagen (dvs. den tid solen er stået op) (målt i timer) til tidspunktet t (målt i døgn efter 1. januar 2011).

a) Tegn grafen for f.
b) Benyt modellen til at bestemme længden af dagen i Anchorage Alaska d. 31. januar.
c) Benyt modellen til at bestemme det tidspunkt, hvor længden af dagen i Anchorage Alaska er størst.
d) Benyt modellen til at bestemme tidspunktet, hvor længden af dagen er 10 timer.

Opgave 15 En trigonometrisk funktion f er givet ved

$$f(x) = 3\sin(2x + 0{,}7) + 1.$$

a) For hvilke $x \in [0,\pi]$ er $f(x) = 2$?
b) Bestem største- og mindsteværdi for f.
c) Bestem perioden for f.

Opgave 16 Lad

$$f(x) = 2\cos(\pi x) - 2.$$

a) Bestem $f(0)$ og $f(1)$.
b) Bestem perioden for f
c) Tegn grafen for f hen over to perioder.

Kapitel 2

Polynomier og andengradsligninger

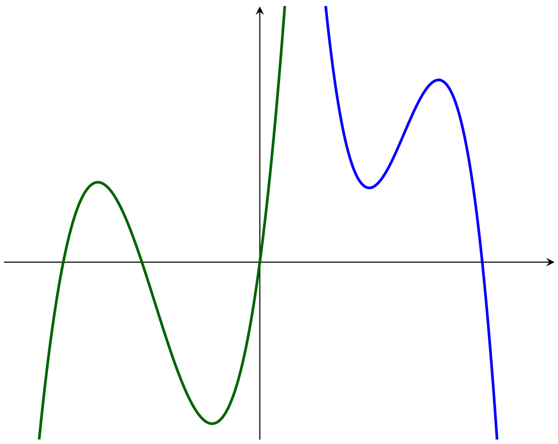
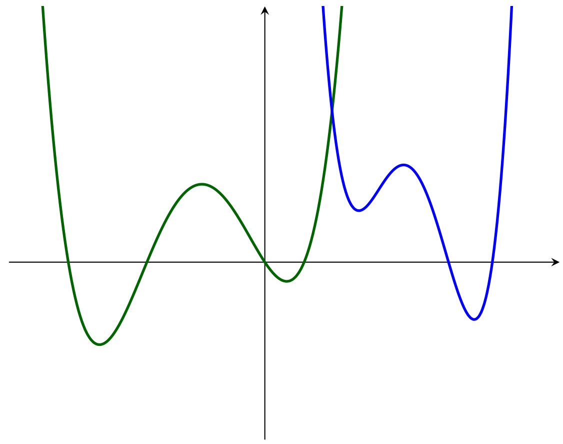
Polynomier er en særligt pæn type af funktioner, som har vidtrækkende anvendelser. I gymnasiet fokuserer vi særligt på det, der kaldes andengradspolynomier, men vi starter lige med en lidt mere generel introduktion til polynomier.

Definition 2.1. En polynomium af grad n, hvor $n \in \mathbb{N}$ er en funktion på formen
$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0,$$
hvor $a_0, a_1 \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ og $a_n \neq 0$ (hvis $a_n = 0$, så var ovenstående et polynomium af grad $n-1$).

Eksempel 2.1. Funktionerne
$$f(x) = 10x^6 - 3x^5 + x^2 - 2x + 7 \quad \text{og} \quad g(x) = x^3 - 2x^2 + 10x - 1$$
er polynomier af grad henholdsvis 6 og 3.

♢

Der gælder i almindelighed, at et polynomum af grad n kan skære x-aksen højst n gange (man siger, at et n'tegradspolynonomium har højst n rødder). I koordinatsystemerne herunder er der tegnet to eksempler på grafer for tredjegradspolynomier (til venstre), samt to eksempler på grafer for fjerdegradspolynomier (til højre).

Vi skal senere lære et virkeligt stært redskab til at undersøge funktioner, herunder polynomier, nemlig differentialregning. Men nu, skal vi rette fokus på det vigtigste polynomium (for os), nemlig andengradspolynomiet.

2.1 Andengradspolynomier

2.1.1 Forskrift

Definition 2.2. Et andengradspolynomium er en funktion f på formen

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

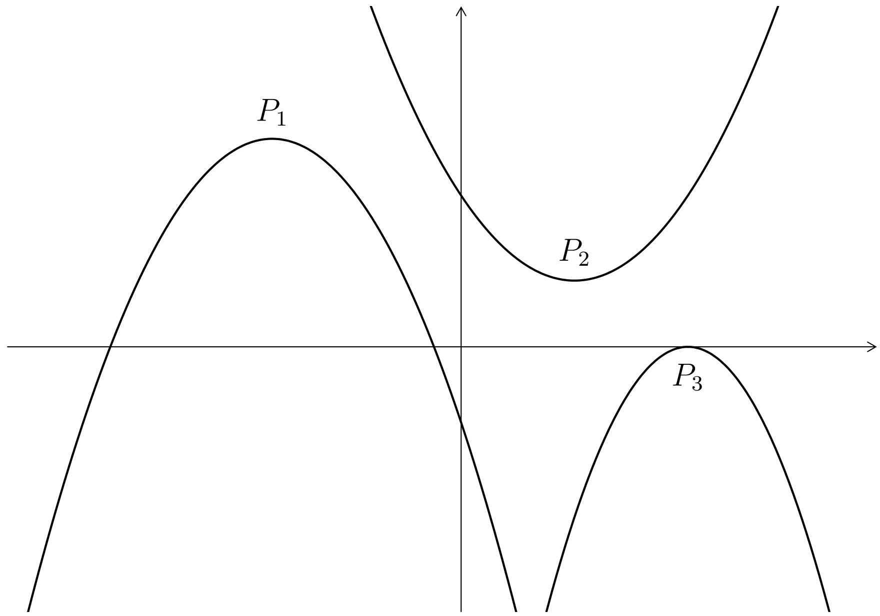
hvor $a, b, c \in \mathbb{R}$ og $a \neq 0$.

Vi kalder a, b og c for polynomiets koefficienter. Det er vigtigt at $a \neq 0$, for ellers ville andengradsleddet forsvinde og funktionen ville istedet være et førstegradspolynomium.

Læg mærke til at vi her har et specialtilfælde af et generelt polynomium, hvor vi har omdøbt koefficienterne en smule: $a_2 = a$, $a_1 = b$ og $a_0 = c$.

2.1.2 Graf og betydning af koefficienterne a,b og c

Grafen for at andengradspolynomium kaldes for en *parabel*. Tre eksempler på parabler ses her:



Koefficienterne a,b og c er afgørende for, hvordan parablen ser ud. Der gælder følgende:

Betydningen af koefficienterne for parablens udseende er at

- $a > 0$ (a positiv) angiver at parablens ben vender opad (parablen er glad), mens $a < 0$ (a negativ) angiver at parablens ben vender nedad (parablen er sur).

  Dette vises let, når man har lært differentialregning, men et lidt ustringent argument er, at det når x bliver stor nok (dvs. når x går mod uendelig eller minus uendelig), er det koefficienten på andetgradsleddet, der afgør om f går mod plus eller minus uendelig. Er $a > 0$ går f mod plus uendelig (grenene vender opad), er $a < 0$ går f mod minus uendelig (grenene vender nedad).

- b angiver hældningskoefficienten på tangenten for parablen der hvor parablen skærer y-aksen.

  Dette argumenterer vi ikke for på nuværende tidspunkt. Når man lærer differentialregning, er det let at bevise.

- c angiver hvor på y-aksen parablen skærer, fordi $f(0) = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = c$.

F.eks. kan vi aflæse at for parablen P_1 er $a < 0$ (grene vender nedaf), $b < 0$ (parablen er aftagende, der hvor den skærer y-aksen) og $c < 0$ (parablen skærer y-aksen på den negative del).

Parablens toppunkt findes ved følgende sætning, der i øvrigt også viser den meget vigtige egenskab, at parabler er *symmetriske* omkring den lodrette akse $x = \frac{-b}{2a}$:

Sætning 2.1. *Grafen for andengradspolynomiet $f(x) = ax^2 + bx + c$ (med $a \neq 0$), er symmetrisk omkring den lodrette linje $x = \frac{-b}{2a}$, og toppunktet $T = (x_T, y_T)$ er givet ved formlen*

$$T_p = (x_T, y_T) = \left(\frac{-b}{2a}, f\left(\frac{-b}{2a}\right)\right) = \left(\frac{-b}{2a}, \frac{-d}{4a}\right)$$

Bevis. Vi beviser først at parablen er symmetrisk omkring den rette linje $x = \frac{-b}{2a}$. Dette gøres ved at bevise at $f(\frac{-b}{2a} + h) = f(\frac{-b}{2a} - h)$ for alle tal $h \in \mathbb{R}$.

Vi udregner først venstresiden:

$$\begin{aligned} f\left(\frac{-b}{2a} + h\right) &= a\left(\frac{-b}{2a} + h\right)^2 + b\left(\frac{-b}{2a} + h\right) + c \\ &\overset{(1)}{=} a\left(\frac{b^2}{4a^2} + h^2 - \frac{bh}{a}\right) - \frac{b^2}{2a} + bh + c \overset{(2)}{=} \frac{b^2}{4a} + ah^2 - \frac{b^2}{2a} + c. \end{aligned}$$

hvor vi gjorde følgende:

(1) Gang parenteserne ud.

(2) Gang a ind i parentes og reducér.

Dernæst udregner vi højresiden på samme måde:

$$\begin{aligned} f\left(\frac{-b}{2a} - h\right) &= a\left(\frac{-b}{2a} - h\right)^2 + b\left(\frac{-b}{2a} - h\right) + c \\ &= a\left(\frac{b^2}{4a^2} + h^2 + \frac{bh}{a}\right) - \frac{b^2}{2a} - bh + c = \frac{b^2}{4a} + ah^2 - \frac{b^2}{2a} + c. \end{aligned}$$

Vi ser at de to udtryk er ens, hvorfor vi har bevist at parablen er symmetrisk omkring linjen $x = \frac{-b}{2a}$. Vi har yderligere bevist at toppunktets førstekoordinat er $x_T = \frac{-b}{2a}$ (idet toppunktet netop ligger på symmetri-linjen). For at finde andenkoordinaten skal vi udregne $f(x_T)$:

$$\begin{aligned} f(x_T) = a\left(\frac{-b}{2a}\right)^2 + b\left(\frac{-b}{2a}\right) + c &\overset{(1)}{=} a\frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{2a} + c \overset{(2)}{=} \frac{b^2}{4a} - \frac{2b^2}{4a} + \frac{4ac}{4a} \\ \overset{(3)}{=} \frac{b^2 - 2b^2 + 4ac}{4a} \overset{(4)}{=} \frac{-(b^2 - 4ac)}{4a} \overset{(5)}{=} \frac{-d}{4a}, \end{aligned}$$

hvor vi gjorde følgende:

(1) Gang parenteserne ud.

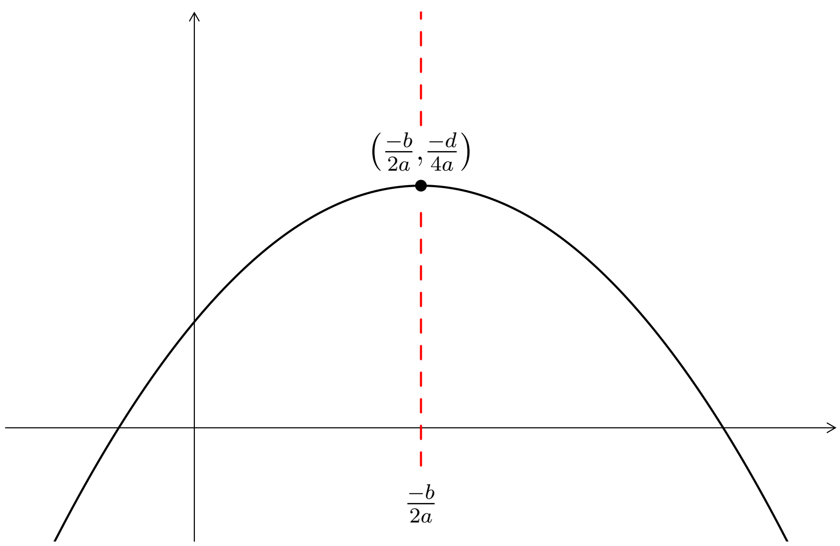
(2) Reducér første brøk, og forlæng de to sidste led så nævneren bliver $4a$.

(3) Sæt på fælles brøkstreg.

(4) Reducér tælleren, og sæt minus udenfor parentes.

(5) Udnyt at $b^2 - 4ac = d$.

Dette beviser sætningen. $\square$



Figur 2.1: Parablens toppunkt ligger i punktet $(\frac{-b}{2a}, \frac{-d}{4a})$ og parablens er symmetrisk omkring den lodrette linjer $x = \frac{-b}{2a}$.

2.1.3 Rødder

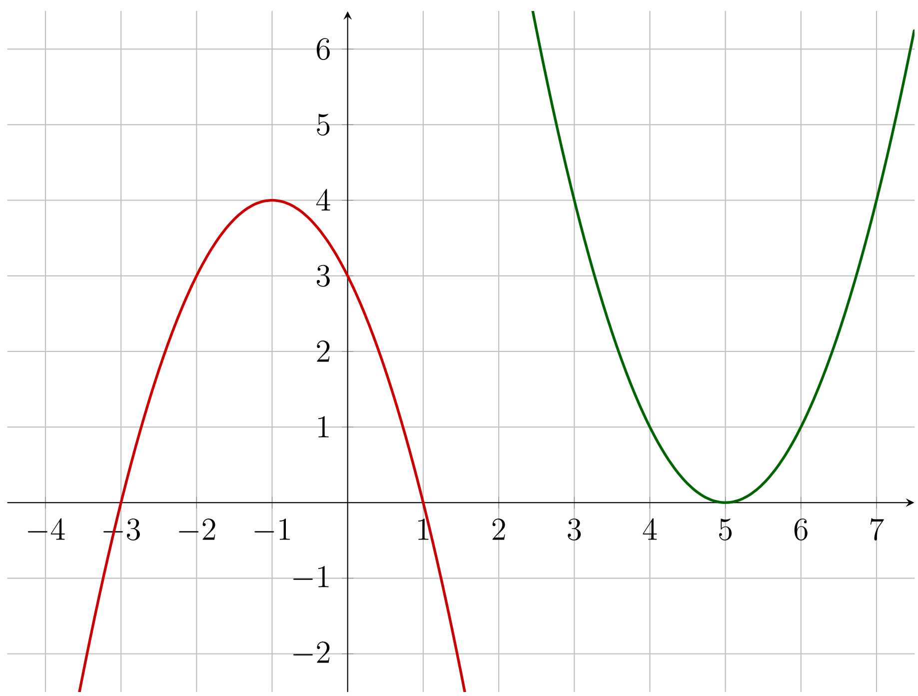
Et polynomiums **rødder** er det samme som x-værdierne for skæringpunkterne med x-aksen. For andengradsplonomier er det muligt at der er to, én eller nul rødder. Disse findes ved at løse *andengradsligningen* $f(x) = 0$, altså:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

hvilket er temaet i næste afsnit.

Bemærkning 2.1. Hvis man vil finde rødderne for at vilkårligt n'tegradpolynomium, f, skal man stadig løse ligningen $f(x) = 0$. Det kan dog være (meget) svært at gøre i hånden, hvis graden af polynomiet er højere end to.

$\diamondsuit$



Figur 2.2: Her ses graferne (parablerne) for to andengradspolynomier. Det ene (der hører til den røde parabel) har to rødder, nemlig $x = -3$ og $x = 1$. Den anden (der hører til den grønne parabel) har én rod, nemlig $x = 5$.

2.2 Løsning af andengradsligninger

Vi skal nu se på, hvordan man løser andengradsligninger.

Definition 2.3. En andengradsligning er en ligning på formen:

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

hvor $a, b, c \in \mathbb{R}$ (dvs. at a, b og c er konstanter fra de reelle tal) og $a \neq 0$ (hvis $a = 0$, så var ovenstående jo en *første*gradsligning).

2.2.1 Andengradsligninger med $c = 0$ og nulreglen:

Når $c = 0$ i andengradsligningen $ax^2 + bx + c = 0$, kommer denne på en særlig form, nemlig

$$ax^2 + bx = 0.$$

Det viser sig, at ligninger på denne form er særligt lette at løse *og* det viser sig, at sådanne ligninger *altid har løsninger* (det nemlig ikke tilfældet for alle andengradsligninger, som vi skal se senere). Vi kan omskrive ligningen ved at sætte x udenfor parentes:

$$x(ax + b) = 0$$

Dette kan måske, ved første øjekast, se mindre rart ud, men det er ikke tilfældet. Vi kan nemlig nu bruge **nulreglen**, der siger:

Hvis et produkt giver nul, så vil mindst én af faktorerne være nul. Med symboler:

$$\textit{Hvis } a \cdot b = 0 \textit{ så} \text{ er enten } a = 0 \text{ eller } b = 0$$

Her er det underforstået at både a og b godt kan være nul.

Hermed kan vi konkludere, at ligningen $x(ax + b) = 0$ løses, hvis enten $x = 0$ eller hvis $ax + b = 0$, hvor den sidste ligning er let at løse.

Bemærkning 2.2. Det er værd at notere sig at $x = 0$ *altid* er løsning til en andengradsligning med $c = 0$.

$\diamondsuit$

Lad os lave et eksempel:

Eksempel 2.2. Løs andengradsligningen $3x^2 - 6x = 0$. Vi starter med at sætte x udenfor parentes.

$$0 = 3x^2 - 6x = x(3x - 6).$$

Nulreglen siger nu at enten er $x = 0$ eller også er $3x - 6 = 0$, altså $x = 2$. Det vil sige at løsningerne er $x = 0$ og $x = 2$.

$\diamondsuit$

2.2.2 Andengradsligninger med $b = 0$:

En specielt nem andengradsligning opstår hvis $b = 0$. Lad os se et eksempel:

Eksempel 2.3. Løs andengradsligningen

$$x^2 - 4 = 0.$$

Her er altså $a = 1$, $b = 0$ og $c = -4$. Vi husker fra kvadratsætningerne, at der om venstresiden af ligningen gælder, at $x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$, således bliver ligningen til

$$(x - 2)(x + 2) = 0,$$

og skal venstresiden af dette være nul, siger nulreglen, at enten er $x = 2$ eller også er $x = -2$, hvilket dermed er løsningerne til ligningen

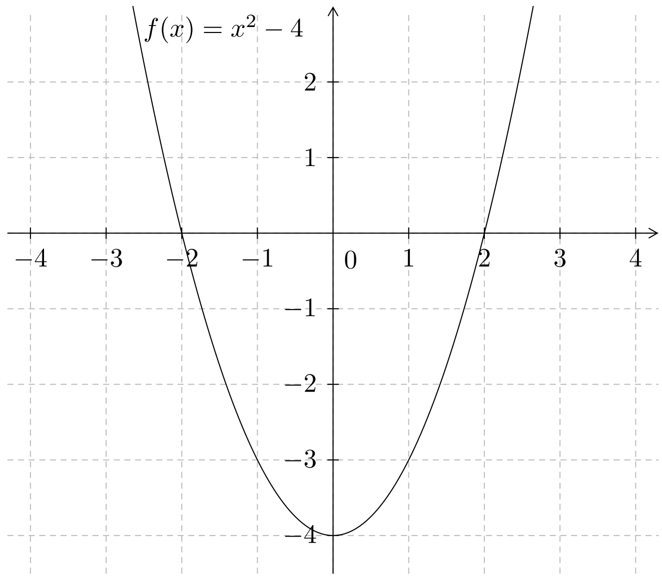
$\diamondsuit$

Bemærkning 2.3. Ligningen fra Eksempel 2.3, kan også skrives således:

$$x^2 = 4.$$

Opgaven går altså ud på at finde de tal som ganget med sig selv giver fire. Dette er opfyldt for $x = \sqrt{4} = 2$ eller $x = -\sqrt{4} = -2$, hvilket passer med det vi fandt. Man kunne også bruge den kortere notation, at $x = \pm\sqrt{4} = \pm 2$.

På figuren på næste side kan vi se grafen for funktionen $f(x) = x^2 - 4$. Vi ser, at ved at løse andengradsligningen $x^2 - 4 = 0$, har vi præcist fundet *rødderne* for polynomiet f. Husk på, at det at løse ligninger kan visualiseres ved hjælp af grafer for funktioner. Det er vigtigt at forstå denne sammenhæng. I dette tilfælde har vi fundet skæringspunkterne mellem funktionen f og x-aksen (hvilket jo svarer til den funktion, der er konstant lig med nul).



◊

Lad os nu se på et andet eksempel med $b = 0$. Bemærk, at ligheden med det første eksempel er stor, selvom det viser sig, at løsningen er fundamentalt anderledes:

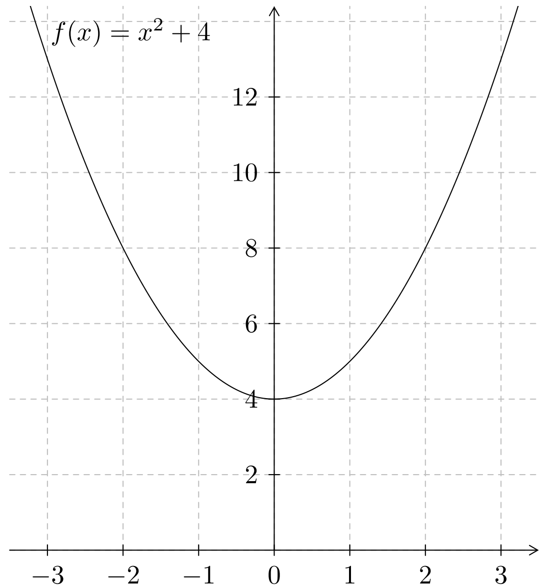
Eksempel 2.4. Løs andengradsligningen

$$x^2 + 4 = 0.$$

Her er altså $a = 1$, $b = 0$ og $c = 4$. Her kan vi *ikke* bruge kvadratsætningerne til at faktorisere venstresiden (overvej, hvorfor man ikke kan det!). I stedet kan vi skrive ligningen således:

$$x^2 = -4.$$

Venstresiden er altid positiv eller nul (overvej hvorfor!), hvilket betyder at udsagnet altid er falsk, og dermed har ligningen ingen løsninger. Lad os se, om det hænger sammen med grafen for funktionen $f(x) = x^2 + 4$:



Vi ser, at vores idé passer, og at funktionen $f(x) = x^2 + 4$ ikke har nogen nulpunkter (f har ikke nogen rødder), altså at grafen ikke skærer x-aksen. Dette er altså den geometriske visualisering af at ligningen $x^2 + 4 = 0$ ikke har nogen løsninger.

◊

Ovenstående eksempler kan skrives generelt i følgende hjælpesætning, som vi ikke beviser.

Sætning 2.2 (Hjælpesætning). *Der gælder om andengradsligningen*

$$x^2 = p,$$

at:

1. *Hvis $p > 0$, så har ligningen to løsninger, nemlig en positiv $x = \sqrt{p}$ og en negativ $x = -\sqrt{p}$ (skrevet kort: $x = \pm\sqrt{p}$).*
2. *Hvis $p = 0$, så har ligningen netop én løsning, nemlig $x = 0$.*
3. *Hvis $p < 0$, så har ligningen ingen løsninger.*

2.2.3 Generelle andengradsligninger:

Vi skal nu se på, hvordan vi kan løse den generelle andengradsligning $ax^2+bx+c = 0$. Men først skal vi definere, hvad diskriminanten er:

Definition 2.4 (Diskriminanten)**.** Når vi har givet en andengradsligning som ovenfor, da definerer vi *diskriminanten*, d, som tallet

$$d = b^2 - 4ac.$$

Vi ser lige på et par eksempler:

Eksempel 2.5. Hvis vi har andengradsligningen $3x^2 + 7x + 2 = 0$, så er $a = 3$, $b = 7$ og $c = 2$ og diskriminanten er:

$$d = b^2 - 4ac = 7^2 - 4 \cdot 3 \cdot 2 = 49 - 24 = 25.$$

$\diamondsuit$

Eksempel 2.6. Hvis vi har andengradsligningen $x^2 + 3x - 1 = 0$, så er $a = 1$, $b = 3$ og $c = -1$ og diskriminanten er:

$$d = b^2 - 4ac = 3^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1) = 9 + 4 = 13.$$

$\diamondsuit$

Eksempel 2.7. Hvis vi har andengradsligningen $4x^2 - 2x + 1 = 0$, så er $a = 4$, $b = -2$ og $c = 1$ og diskriminanten er:

$$d = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 1 = 4 - 16 = -12.$$

$\diamondsuit$

HUSK at bruge fortegnene korrekt! Står der et (eller flere) minus(ser) i andengradsligningen, så er det vigtigt at huske dette, når diskriminanten udregnes.

Vi skal nu bevise en formel, som giver løsningerne til den generelle andengradsligning, såfremt ligningen har løsninger.

Inden beviset, skal vi gøre en enkelt observation. Vi skal nemlig i beviset bruge følgende udtryk: $(2ax + b)^2$. Og vi skal komme frem til det fra en omskrivning, der bruger første kvadratsætning baglæns. Så lad os lige omskrive $(2ax + b)^2$ med første kvadratsætning:

$$(2ax + b)^2 = (2ax)^2 + b^2 + 2 \cdot 2ax \cdot b = 4a^2x^2 + b^2 + 4abx$$

hvor vi altså i beviset skal bruge, at

$$4a^2x^2 + b^2 + 4abx = (2ax + b)^2 \tag{2.1}$$

Sætning 2.3 (Diskriminantmetoden). *Om andengradsligningen*

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

hvor $a \neq 0$, gælder at:

1. *Hvis $d < 0$, så har ligningen ingen løsninger.*
2. *Hvis $d = 0$, så har ligningen netop én løsning, nemlig*
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{d}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{0}}{2a} = \frac{-b}{2a}.$$
3. *Hvis der om diskriminanten $d = b^2 - 4ac$ gælder at $d > 0$, så har ligningen to løsninger, nemlig*
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{d}}{2a}.$$

Bevis. Vi skal altså finde de x, der gør andengradsligningen

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

sand. Det vil sige, at vi skal forsøge at isolere x i ovenstående udtryk. Det er ikke let, og vi bliver nødt til at gøre det i nogle trin. Første trin går ud på at omskrive ligningen

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

så udtrykket

$$4a^2x^2 + b^2 + 4abx$$

fra ligning (2.1) fremkommer på venstresiden. For at få koefficienten foran x^2-leddet til at passe, så ganger vi med $4a$ på begge sider af lighedstegnet (det må vi, da $a \neq 0$).

$$4a(ax^2 + bx + c) = 0 \cdot 4ac$$

hvilket giver

$$4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0$$

Sammenlignes igen med venstresiden af (2.1) ($4a^2x^2 + b^2 + 4abx$), kan vi se, at vi skal lægge b^2 til og trække $4ac$ fra på begge sider af lighedstegnet, for at få tingene til at passe.

$$4a^2x^2 + 4abx + 4ac + b^2 - 4ac = b^2 - 4ac$$

vi ser at $+4ac$ og $-4ac$ går ud med hinanden på venstresiden, så vi får:

$$4a^2x^2 + 4abx + 4ac + b^2 - 4ac = b^2 - 4ac$$

$$4a^2x^2 + 4abx + b^2 = b^2 - 4ac.$$

Nu passer venstresiden med det ønskede. Da vi ved fra ligning (2.1) (og fra første kvadratsætning), at $4a^2x^2 + 4abx + b^2 = (2ax + b)^2$. kan ligningen skrives således:

$$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac$$

Vi ved yderligere, at $d = b^2 - 4ac$, så ligningen kan slutteligt skrives på formen:

$$(2ax + b)^2 = d \tag{2.2}$$

Vi skal nu betragte de tre tilfælde, hvor $d < 0$, $d = 0$ og $d > 0$ hver for sig:

Hvis $d < 0$, så siger Hjælpesætning 2.2 at ligningen ingen løsninger har, da venstresiden af lighedstegnet altid er større end eller lig med nul, mens højresiden er negativ.

Dette beviser punkt 1. i sætningen.

Hvis $d = 0$, er løsningen til (2.2) at $2ax + b = 0$ (for hvis $d = 0$ er indmaden i parentesen også nødt til at være nul), dvs.

$$2ax = -b$$

hvilket giver

$$x = \frac{-b}{2a},$$

som viser punkt 2. i sætningen.

Hvis $d > 0$, så er løsningerne til (2.2) givet ved

$$2ax + b = \pm\sqrt{d}$$

hvor vi først trækker b fra på begge sider af lighedstegnet

$$2ax = -b \pm \sqrt{d}$$

og dernæst dividerer med $2a$ og får:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{d}}{2a},$$

hvilket viser punkt 3. i sætningen. □

Fremgangsmåden for at løse generelle andengradsligninger er altså:

1. *Udregn diskriminanten* $d = b^2 - 4ac$.
2. *Afgør, ud fra om* $d < 0$, $d = 0$ *eller* $d > 0$, *hvorvidt andengradsligningen har ingen, én eller to løsninger.*
3. *Hvis* $d \geq 0$, *så find løsningen eller løsningerne.*

Lad os slutte med nogle eksempler:

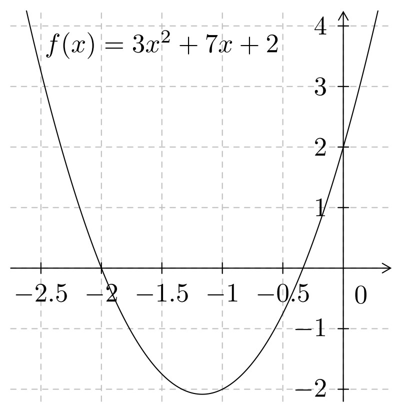
Eksempel 2.8. Løs andengradsligningen $3x^2 + 7x + 2 = 0$. Her er $a = 3$, $b = 7$ og $c = 2$. Vi udregner først diskriminanten:

$$d = b^2 - 4ac = 7^2 - 4 \cdot 3 \cdot 2 = 49 - 24 = 25.$$

Vi ser at $d > 0$, så der er to løsninger. Dem finder vi med formlen:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{d}}{2a} = \frac{-7 \pm \sqrt{25}}{2 \cdot 3} = \frac{-7 \pm 5}{6} = \begin{cases} -\frac{1}{3} \\ -2 \end{cases} \quad ,$$

Dette ses også på grafen for funktionen $f(x) = 3x^2 + 7x + 2$:



◇

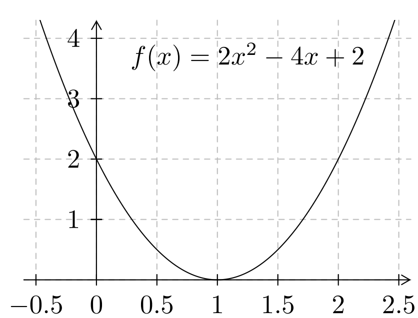
Eksempel 2.9. Løs andengradsligningen $2x^2 - 4x + 2 = 0$. Her er $a = 2$, $b = -4$ og $c = 2$. Vi udregner først diskriminanten:

$$d = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = 16 - 16 = 0.$$

Vi ser at $d = 0$, så der er kun en løsning. Denne ser således ud:

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-4)}{2 \cdot 2} = \frac{4}{4} = 1.$$

Dette ses også på grafen for funktionen $f(x) = 2x^2 - 4x + 2$:

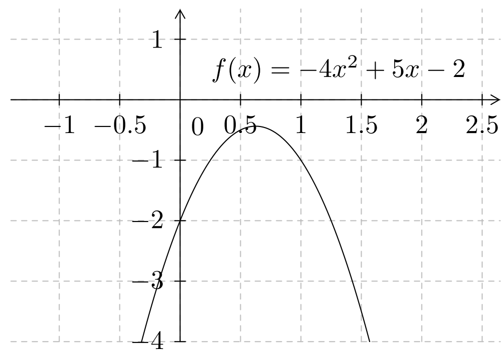


◇

Eksempel 2.10. Løs andengradsligningen $-4x^2 + 5x - 2 = 0$. Her er $a = -4$, $b = 5$ og $c = -2$. Vi udregner først diskriminanten:

$$d = b^2 - 4ac = 5^2 - 4 \cdot (-4) \cdot (-2) = 25 - 32 = -7.$$

Vi ser at $d < 0$, så der er *ingen løsninger*. Dette ses også på grafen for funktionen $f(x) = -4x^2 + 5x - 2$:



$\diamondsuit$

Bemærkning 2.4. Det kan være praktisk, at lære sig alle de første kvadrattal. På den måde, kan man hurtigt finde kvadratroden af diskriminanten, hvis ellers opgavestilleren har været så sød at stille en ligning, der har en 'pæn' diskriminant.[1] De første 15 kvadrattal er:

$$1^2 = 1, 2^2 = 4, 3^2 = 9, 4^2 = 16, 5^2 = 25, 6^2 = 36, 7^2 = 49, 8^2 = 64, 9^2 = 81$$

$$10^2 = 100, 11^2 = 121, 12^2 = 144, 13^2 = 169, 14^2 = 196, 15^2 = 225$$

$\diamondsuit$

[1]Hvis diskriminanten i en opgave ikke er et kvadrattal, så bør man også lige dobbelttjekke sine beregninger. *Langt* de fleste opgaver har en diskriminant, der er et kvadrattal (eller nul).

2.3 Faktorisering

Når man taler om at *faktorisere*, så menes der, at noget omskrives fra én udtryksform til et produkt. F.eks. kan alle hele positive tal primfaktoriseres, således at de skrives som et (entydigt) produkt af primtal. Tallet 1729 kan eksempelvis skrives som et produkt af primtal således:

$$1729 = 7 \cdot 13 \cdot 19.$$

Det viser sig, at polynomier også (nogen gange) kan faktoriseres.[2]

For et n'tegradspolynomium P_n, kan man bevise, at hvis P_n har en rod r, så findes der et polynomium af grad $n-1$, lad os kalde det P_{n-1}, sådan at

$$P_n(x) = (x-r) \cdot P_{n-1}(x).$$

Det er således muligt at bruge polynomiers rødder, til at faktorisere et polynomium, idet man kan "trække"alle polynomiets rødder ud som faktorer som ovenfor. Hvis et fjerdegradspolynomium $P_4(x) = a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ har fire rødder, kan man altså skrive polynomiet som et produkt, således:

$$P_4(x) = a_4 \cdot (x-r_1) \cdot (x-r_2) \cdot (x-r_3) \cdot (x-r_4).$$

Det er ikke meningen at vi skal bruge det ovenfor skitserede her i gymnasiet; det er blot medtaget for at give lidt perspektiv til afsnittet, der kommer nedenfor. Tanken om at man på en elegant facon kan bruge rødder til faktorisering (når de findes), er dog ganske vigtig.

2.3.1 Faktorisering af et andengradspolynomium

Faktorisering af et andengradspolynomium betyder som nævnt, at vi skal omskrive udtrykket $ax^2 + bx + c$ til *produkt*. Dette er muligt, hvis andengradspolynomiet har mindst én rod. Dette beviser vi herunder:

Sætning 2.4. *Når andengradspolynomiet $f(x) = ax^2 + bx + c$ har to rødder r_1 og r_2, så kan det faktoriseres, dvs. omkrives på følgende måde:*

$$f(x) = a(x-r_1)(x-r_2).$$

Hvis andengradspolynomiet kun har én rod r, så er faktoriseringen

$$f(x) = a(x-r)^2.$$

[2]Hvis vi må bruge komplekse tal, så kan man bevise, at polynomier *altid* kan faktoriseres, men i gymnsaiet holder vi os til de reelle tal, så vi må leve med at ikke alle polynomier kan faktoriseres.

Bevis. Når andengradspolynomiet $f(x) = ax^2 + bx + c$ har to rødder, er de givet som de to løsninger til andengradsligningen

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

Derfor må rødderne være givet ved den sædvanlige løsningsformel for andengradsligninger, så:

$$r_1 = \frac{-b+\sqrt{d}}{2a} \quad \text{og} \quad r_2 = \frac{-b-\sqrt{d}}{2a}$$

Vi udregner nu $r_1 + r_2$ og $r_1 \cdot r_2$, fordi vi skal bruge det senere i beviset. Altså

$$r_1 + r_2 = \frac{-b+\sqrt{d}}{2a} + \frac{-b-\sqrt{d}}{2a} = \frac{-b+\sqrt{d}-b-\sqrt{d}}{2a} = -\frac{2b}{2a} = -\frac{b}{a}.$$

Og

$$\begin{aligned} r_1 \cdot r_2 &= \frac{-b+\sqrt{d}}{2a} \cdot \frac{-b-\sqrt{d}}{2a} = \frac{(-b+\sqrt{d})(-b-\sqrt{d})}{4a^2} = \frac{b^2-d}{4a^2} \\ &= \frac{b^2-b^2+4ac}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}. \end{aligned}$$

Bemærk at vi har brugt tredje kvadratsætning til tredje lighedstegn således:

$$(-b+\sqrt{d})(-b-\sqrt{d}) = (-b)^2 - (\sqrt{d})^2 = b^2 - d.$$

Nu begynder vi at regne på udtrykket $a(x - r_1)(x - r_2)$, og vi ønsker naturligvis at bevise at vi kan omskrive det til $ax^2 + bx + c$.

$$a(x-r_1)(x-r_2) = a(x^2 - xr_1 - xr_2 + r_1 \cdot r_2) = a(x^2 - x(r_1+r_2) + r_1 \cdot r_2),$$

hvor vi første gangede parenteserne ud og dernæst satte $-x$ udenfor parentes. Vi indsætter nu $r_1 + r_2 = \frac{-b}{a}$ og $r_1 r_2 = \frac{c}{a}$

$$a(x^2 - x(r_1+r_2) + r_1 \cdot r_2) = a(x^2 - x\tfrac{-b}{a} + \tfrac{c}{a}) = a(x^2 + \tfrac{b}{a}x + \tfrac{c}{a}) = ax^2 + bx + c$$

hvilket beviser første del af sætningen.

Hvis andengradspolynomiet kun har én rod, så er den givet ved

$$r = \frac{-b}{2a}$$

Desuden må der gælde $d = b^2 - 4ac = 0$, som giver $b^2 = 4ac$.

Derfor får vi

$$a(x-r)^2 = a(x^2 - 2rx + r^2) = a(x^2 - 2\big(\tfrac{-b}{2a}\big)x + \big(\tfrac{-b}{2a}\big)^2) = a(x^2 + \tfrac{b}{a}x + \tfrac{b^2}{4a^2}),$$

Nu indsættes $b^2 = 4ac$ og det sidste reduceres

$$a(x^2 + \tfrac{b}{a}x + \tfrac{b^2}{4a^2}) = a(x^2 + \tfrac{b}{a}x + \tfrac{4ac}{4a^2}) = ax^2 + bx + \tfrac{4a^2c}{4a^2} = ax^2 + bx + c.$$

□

Bemærkning 2.5. Når et andengradspolynomium $f(x) = ax^2+bx+c$ *ingen* rødder har, så kan polynomiet *ikke* faktoriseres, men det beviser vi ikke.

♢

2.4 Opgaver

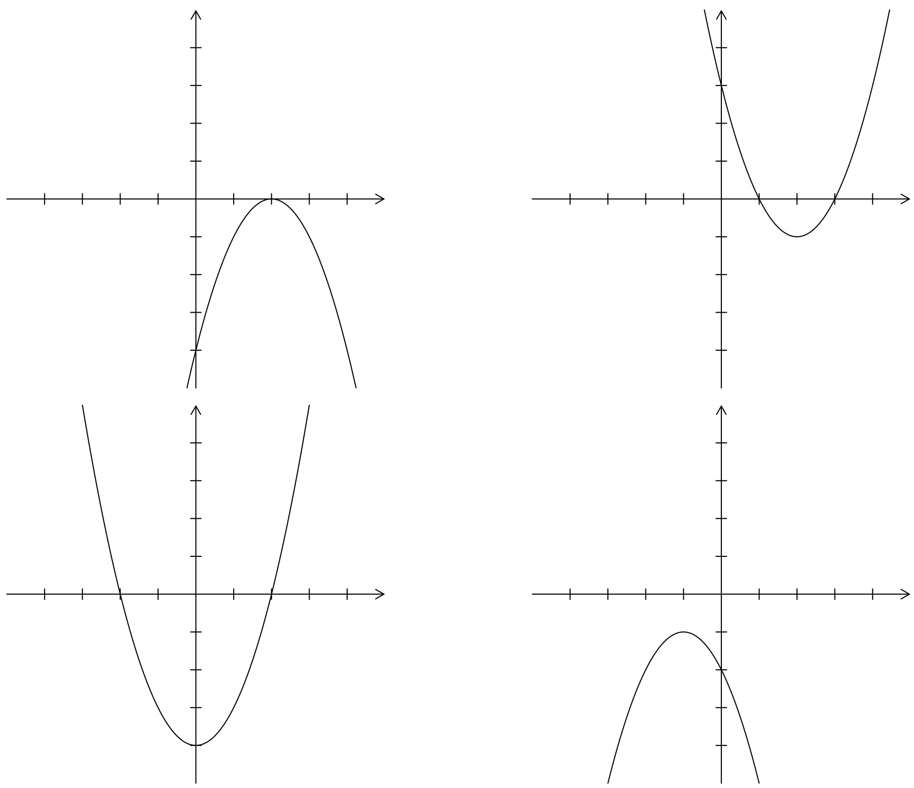
Opgave 1 Lad $f(x) = -x^2 + 4x + 5$.

a) Find parablens skæringer med x-aksen.

b) Find parablens toppunkt.

c) Hvad fortæller koefficienterne a, b og c om parablens udseende? Skitsér parablen.

Opgave 2 Herunder ses 4 parabler, der hver især er graf for et andengradspolynomium $ax^2 + bx + c$.



Bestem nu, for hvert tilfælde:

a) Fortegnet på a, b, c og d.

b) Polynomiets rødder (hvis der er nogen).

c) Parablens toppunkt.

Opgave 3 Løs andengradsligningerne:

a) $x^2 = 9$	b) $x^2 + 9 = 0$
c) $x^2 + 3 = 52$	d) $4x^2 - 16 = 0$
e) $3x^2 - 30 = -3$	f) $6x^2 + 6 = 0$

Opgave 4 Løs andengradsligningerne:

a) $x^2 - x = 0$
b) $x^2 + x = 0$
c) $x^2 - 20x = 0$
d) $x^2 - 5x = 0$
e) $3x^2 + 18x = 0$
f) $6x^2 + x = 0$

Opgave 5 Løs andengradsligningerne:

a) $x^2 - x - 6 = 0$
b) $x^2 - x + 6 = 0$
c) $x^2 - 20x + 51 = 0$
d) $x^2 - 5x + 4 = 0$
e) $3x^2 + 18x - 21 = 0$
f) $6x^2 + x - 1 = 0$

Opgave 6 Løs andengradsligningerne:

a) $-2x^2 + 20x - 42 = 0$
b) $\frac{1}{2}x^2 - 4x + 8 = 0$
c) $-2x^2 - 12x - 38 = 0$
d) $x^2 - 12x - 28 = 0$
e) $-2x^2 - 16x - 46 = 0$
f) $x^2 - 15x + 44 = 0$
g) $-x^2 - 8x + 9 = 0$
h) $\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - 10 = 0$
i) $2x^2 - 46x + 252 = 0$
j) $x^2 - 20x + 100 = 0$
k) $2x^2 - 3x = 1$
l) $\sqrt{2}x^2 - \sqrt{2}x = \sqrt{8}$

Opgave 7 Find toppunktet og rødderne for følgende andengradspolynomier:

a) $f(x) = x^2 - 2x - 8$
b) $f(x) = -x^2 + 16$
c) $f(x) = x^2 - 5x$
d) $f(x) = -3x^2 - 3x + 2{,}25$

Opgave 8 Lad $f(x) = -2x^2 + 4x + 6$.

a) Find parablens skæringer med x-aksen.
b) Find parablens toppunkt.
c) Hvad fortæller koefficienterne $a = -2$, $b = 4$ og $c = 6$ om parablens udseende?
d) Skitsér parablen.

Opgave 9 Tegn en parabel hvorom det gælder at

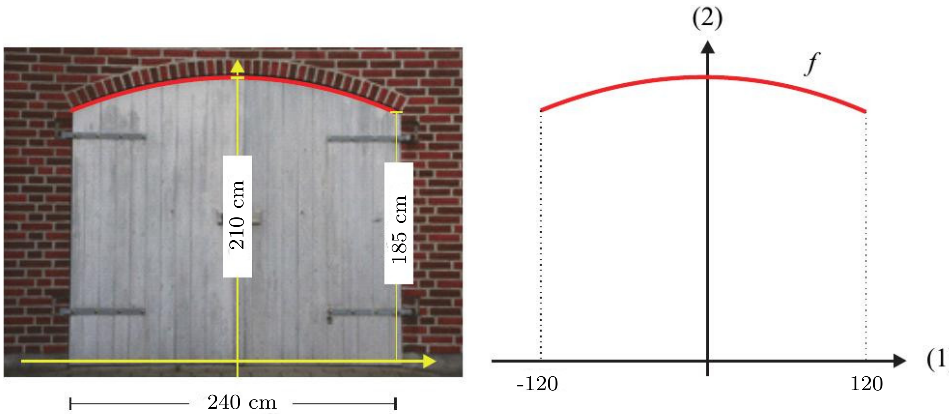
a) $a > 0$, $b < 0$ og $c < 0$.
b) $a > 0$, $b > 0$ og $c = 0$.
c) $a < 0$, $b = 0$ og $c > 0$.

Opgave 10 Et andengradspolynomium p er bestemt ved

$$p(x) = 3 \cdot (x+5) \cdot (x+7).$$

Bestem rødderne for p og bestem konstanterne a, b og c, når p skrives på formen $p(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$.

Opgave 11



Figuren viser en garageport, som har bredden 240 cm, højden 185 cm ved hængslerne og højden 210 cm midt på porten.
I en model kan den øverste bue af garageporten beskrives ved en del af grafen for et andengradspolynomium f. Modellen er indtegnet i et koordinatsystem, hvor førsteaksen følger portens nederste kant, og andenaksen følger midten af porten.

a) Gør rede for, at en forskrift for f kan skrives som

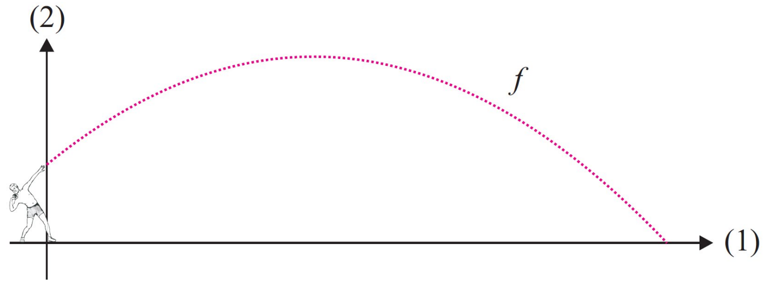
$$f(x) = -0{,}001736 \cdot x^2 + 210.$$

b) Benyt modellen til at bestemme højden af porten, præcist én meter fra midten.

Opgave 12 Find toppunktet for og skitsér parablerne for følgende polynomier:

a) $f(x) = x^2 + 2x - 15$
b) $f(x) = x^2 + 6x + 1$
c) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1$
d) $f(x) = -2x^2 + 8x + 24$

Opgave 13



På figuren ses banen for et kuglestød indtegnet i et koordinatsystem med enheden 1 m på akserne. Kuglens bane kan beskrives som en del af grafen for funktionen

$$f(x) = -0{,}05x^2 + 0{,}8x + 2{,}3.$$

a) Bestem længden af kuglestødet.

b) Bestem kuglens maksimale højde over jorden.

Opgave 14 Lad $f(x) = 2x^2 + 8x + c$. Det oplyses at 1 er en rod for f.

a) Find c.

b) Find den anden rod.

Opgave 15 Find skæringspunkterne mellem graferne for funktionerne

$$f(x) = -2x^2 + x - 1 \quad \text{og} \quad g(x) = x - 3.$$

Opgave 16 Bestem c så andengradsligningen har netop én løsning når

a) $2x^2 - 8x + c = 0$

b) $x^2 - 8x + c = 0$

c) $x^2 + 4x + c = 0$

d) $-3x^2 + 6x + c = 0$

e) $x^2 + 6x + c = 0$

Opgave 17 Bestem b så andengradsligningen har netop én løsning når

a) $x^2 + bx + 16 = 0$

b) $x^2 + bx + 49 = 0$

c) $-8x^2 + bx - 2 = 0$

Opgave 18 Overvej, hvor i beviset for diskriminantformlen, det er nødvendigt at $a \neq 0$.

Opgave 19 Reducér udtrykket:

a) $\dfrac{x^2 - 8x + 15}{x - 5}$ b) $\dfrac{x - 2}{2x^2 - 6x + 4}$

c) $\dfrac{x^2 - 8x}{\frac{1}{2}x^2 - 5x + 8}$ d) $\dfrac{-2x^2 + 2x + 4}{x^2 + 3x + 2}$

e) $\dfrac{1 - x}{x^2 - 9x + 8}$ f) $\dfrac{4x^2 + 12x + 24}{\frac{1}{3}x^2 + x + 2}$

Opgave 20 Denne opgave hænger sammen med de næste tre opgaver.

Vi skal bevise påstanden:

> *Hvis* der om to tal x_1 og x_2 gælder at $b = -(x_1 + x_2)$ og $c = x_1 \cdot x_2$, *så* er x_1 og x_2 løsninger til ligningen $x^2 + bx + c = 0$.

a) Antag at $b = -(x_1 + x_2)$ og $c = x_1 \cdot x_2$. Indsæt dette samt $x = x_1$ i ligningen $x^2 + bx + c = 0$, og reducér. Hvad kan du konkludere?

b) Gælder det samme for $x = x_2$?

Påstanden ovenfor fortæller, at andengradsligninger med $a = 1$ kan løses næsten uden at regne. F.eks. har ligningen $x^2 - 6x + 8 = 0$ løsningerne $x_1 = 2$ og $x_2 = 4$ fordi $-(2 + 4) = -6 = b$ og $2 \cdot 4 = 8 = c$.

Opgave 20 Løs nu ligningerne:

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$
$$x^2 - 7x + 10 = 0$$
$$x^2 - 7x + 12 = 0$$
$$x^2 - 13x + 30 = 0$$
$$x^2 - 30x + 200 = 0$$
$$x^2 - x - 2 = 0$$
$$x^2 + 5x + 4 = 0$$

Opgave 21 I denne opgave skal vi bevise påstanden:

> *Hvis* andengradsligningen $x^2 + bx + c = 0$ har to forskellige løsninger, x_1 og x_2, *så* er $b = -(x_1 + x_2)$ og $c = x_1 \cdot x_2$.

a) Forklar, hvorfor vi kan danne ligningerne

$$x_1^2 + bx_1 + c = 0$$
$$x_2^2 + bx_2 + c = 0$$

når vi ved at x_1 og x_2 er løsninger.

b) Nu skal vi trække venstresiderne fra hinanden:

$$x_1^2 + bx_1 + c - (x_2^2 + bx_2 + c) = 0$$

Forklar hvorfor resultatet er nul.

c) Angiv alle mellemregningerne i følgende udregning:

$$x_1^2 + bx_1 + c - (x_2^2 + bx_2 + c) = \ldots = (x_1 + x_2)(x_1 - x_2) + b(x_1 - x_2)$$

d) Forklar at ovenstående opgaver betyder at vi har ligningen

$$(x_1 + x_2)(x_1 - x_2) + b(x_1 - x_2) = 0.$$

e) Isolér nu b i ovenstående udtryk, ved først at dividere med $(x_1 - x_2)$ på begge sider af lighedstegnet. Resultatet bliver $b = -(x_1 + x_2)$, hvilket var det første der skulle vises i påstanden.

f) Indsæt nu $b = -(x_1 + x_2)$ i ligningen $x_1^2 + bx_1 + c = 0$, og isolér c i det fundne udtryk. Resultatet bliver $c = x_1 \cdot x_2$, hvilket viser sidste del af påstanden.

Denne påstand gør det muligt at lave andengradsligninger, der har to kendte løsninger. Hvis vi f.eks. vil have at en ligning har løsningerne $x_1 = 4$ og $x_2 = 9$, så bliver $b = -(4 + 9) = -13$ og $c = 4 \cdot 9 = 36$, så lignigen

$$x^2 - 13x + 36 = 0$$

har løsningerne $x_1 = 4$ og $x_2 = 9$.

Opgave 22 Konstruér tre andengradsligninger, hvor løsningerne er henholdsvis:

a) $x_1 = 2$ og $x_2 = 9$

b) $x_1 = 5$ og $x_2 = 7$

c) $x_1 = 4$ og $x_2 = -3$

Opgave 23 (Udfordring) Produktet af to på hinanden følgende hele tal er 1122. Bestem de to tal.

Opgave 24 (Udfordring) En retvinklet trekant med kateterne x og $x + 3$ har arealet 14. Bestem x.

Opgave 25 (Udfordring) Find forskriften for polynomierne i Opgave 2.

Opgave 26 (Udfordring) Gør rede for at $f(x) = x^2 - kx + k^2 + 2$ ikke har nogen rødder for nogen værdi af k.

Opgave 27 (Udfordring) En retvinklet trekants kateder har sidelængderne x og $20 - x$. Bestem det størst mulige areal af trekanten.

Opgave 28 (Udfordring) Løs fjerdegradsligningen $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$.

Kapitel 3

Lidt om parallelforskydning

3.1 Parallelforskydning af grafer

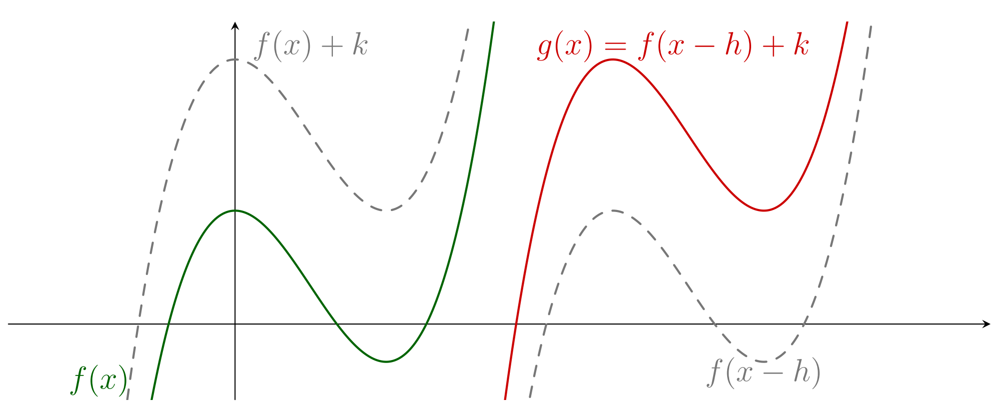
Når man taler om parallelforskydning, så menes der, at man "skubber"en graf parallelt med akserne. Der er således to mulige måder at parallelforskyde på, nemlig lodret og vandret. Der gælder følgende sætning, som vi ikke beviser:

Sætning 3.1. *Hvis f er en funktion, så er grafen for funktionen*

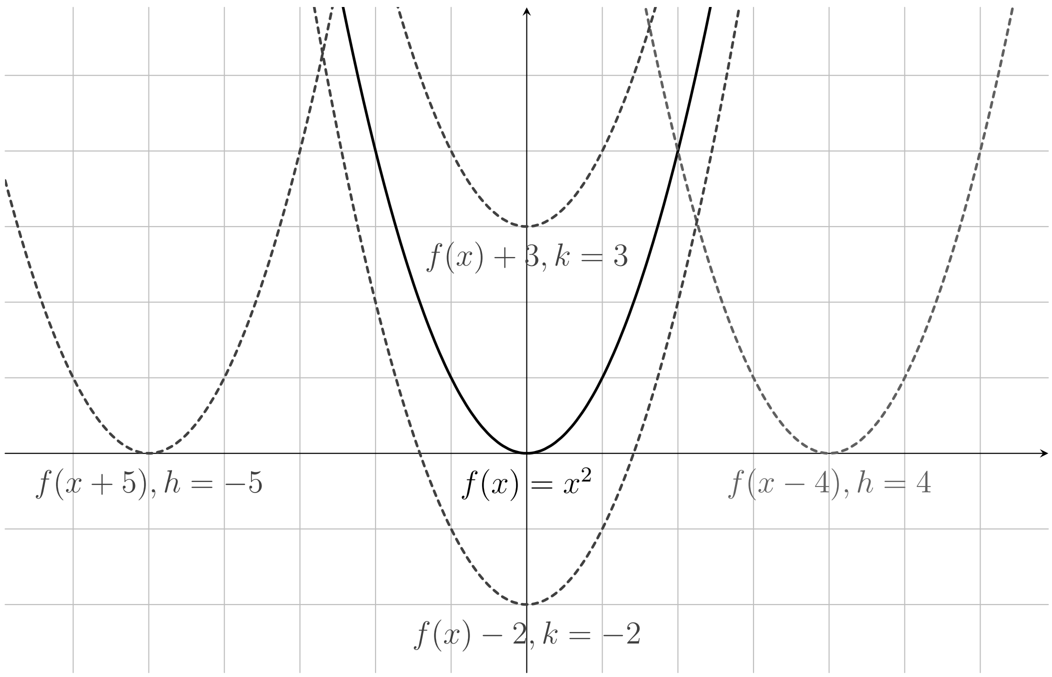
$$g(x) = f(x-h) + k$$

parallelforskudt *med h i x-aksens retning og k i y-aksens retning (regnet med fortegn).*

Når der står, at forskydningen regnes med fortegn, så betyder det, at hvis fx k er negativ, så skubbes grafen nedad, og hvis k er positiv, så skubbes grafen opad.



Herunder ses forskellige udgaver af grafen for $f(x) = x^2$ parallelforskudt med forskellige værdier af h og k.



Det er som oftest klart sværest at forstå den vandrette parallelforskydning. En uddybende forklaring kan ses fx her.

3.1.1 Opgaver

Opgave 1 Bestem forskriften for et andengradspolynomium, der har toppunkt i $(4, -10)$.

Opgave 2 Andengradspolynomiet f er givet ved

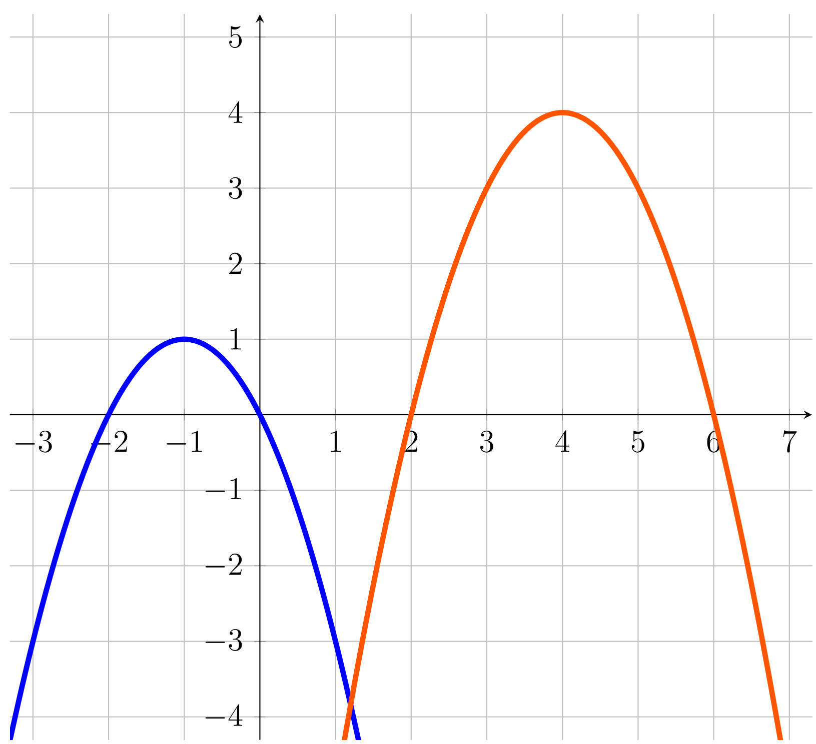
$$f(x) = (x+2)^2 + 3$$

a) Bestem toppunktet for f.

b) Argumentér for at $a > 0$ for dette polynomium.

c) Argumentér for fortegnet for diskriminanten.

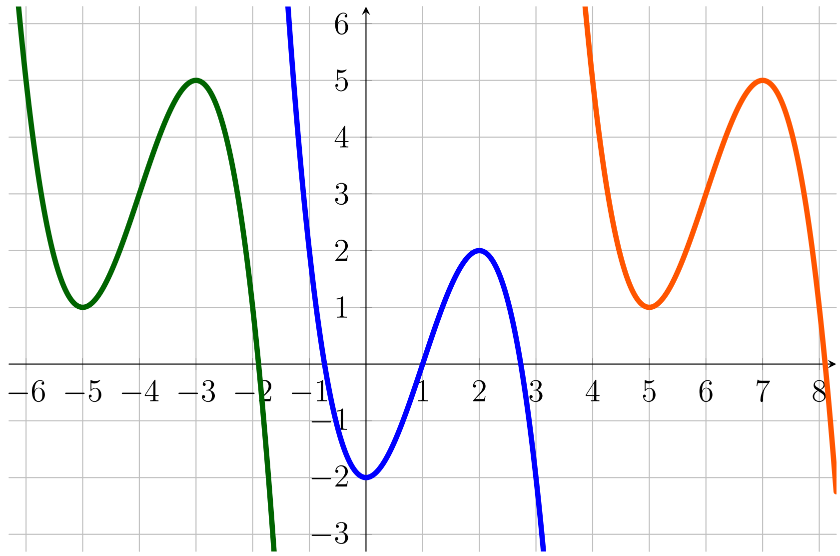
Opgave 3 I koordinatsystemet herunder ses grafen for $f(x) = -x^2 - 2x$, samt en graf der fremkommer ved at parallelforskyde grafen for f.



a) Argumentér for, hvilken af det to grafer, der hører til f.

b) Bestem en forskrift for den anden graf.

Opgave 4 I koordinatsystemet herunder ses graferne for tre funktioner, f, g og h.



Det oplyses, at $g(x) = f(x-5) + 3$ og $h(x) = f(x+5) + 3$.

Afgør, hvilken graf, der hører til hvilken funktion.