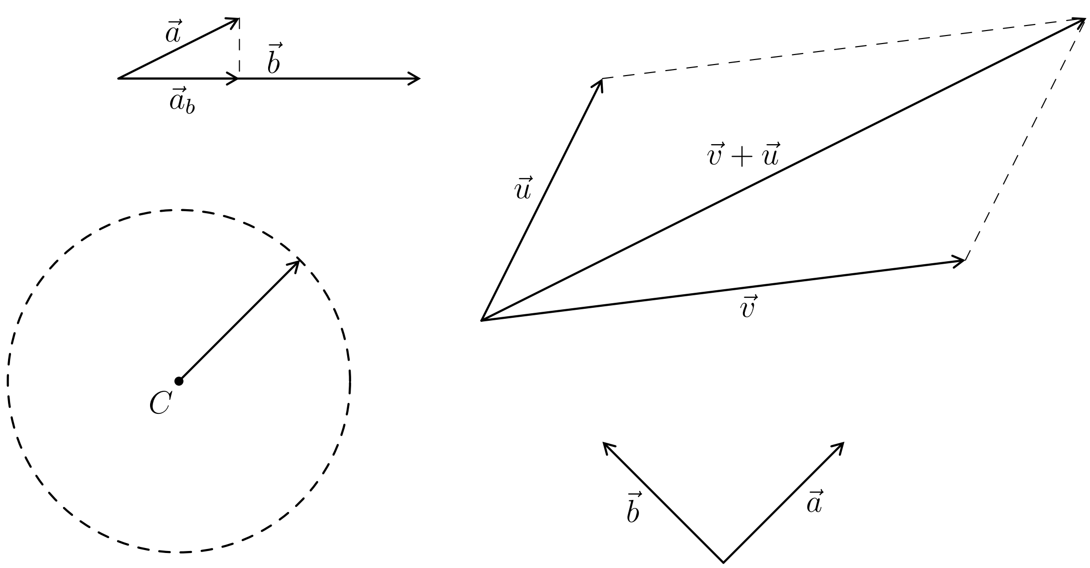
Analytisk geometri

Thomas Heide-Jørgensen, Rosborg Gymnasium & HF



Indhold

Indledning

Dette kompendium er tænkt som undervisningsmateriale i matematik på A-niveau.

Bemærk, at hele den traditionelle teori om trigonometri er udledt på baggrund af vektorregning i kapitel 3.

Bemærk yderligere, at den numeriske værdi bliver brugt uden introduktion, så man kan med fordel have omtalt dette på forhånd.

Thomas Heide-Jørgensen

Rosborg Gymnasium, 2. februar 2021.

Kapitel 1

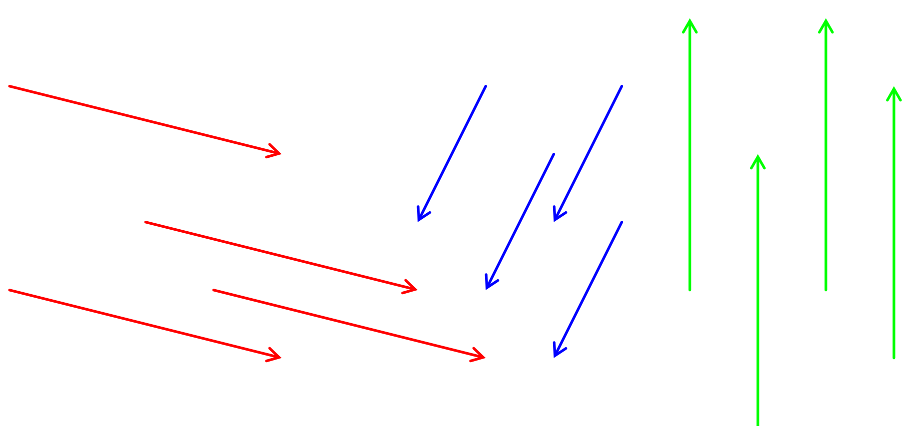
Vektorer

1.1 Grundlæggende om vektorer

1.1.1 Hvad er en vektor?

Definition 1.1.1. En vektor er en kombination af en længde og en retning.

Det er meget hensigtsmæssigt at tænke på en vektor som en pil. Vi ser herunder en række eksempler på (repræsentanter for) vektorer. Alle vektorer i samme farve er repræsentanter for den samme vektor.



Vi vil i det følgende ikke skelne mellem en vektor og en repræsentant for en vektor, og således kalder vi bare de enkelte pile for vektorer. To vektorer er derfor ens, hvis de har samme længde og retning. For det ovenstående betyder det altså, at de røde pile alle er samme vektor, de blå pile er alle samme vektor og de grønne pile er alle samme vektor.

Når vi omtaler en vektor, så vil vi altid skrive en pil oven over navnet på vektoren. Altså vil en vektor a skrives som $\vec{a}$.

Længden af en vektor $\vec{a}$ skrives som $|\vec{a}|$. Hvis en vektor $\vec{a}$ har længden 7, skriver vi:

$$|\vec{a}| = 7.$$

Én vektor fortjener særlig opmærksomhed; nemlig den vektor der ingen længde eller retninghar:

Definition 1.1.2 (Nulvektoren)**.** En vektor der ingen længde og retning har kaldes *nulvektoren*, og benævnes $\vec{o}$.

Man kan tænke på nulvektoren som et punkt.

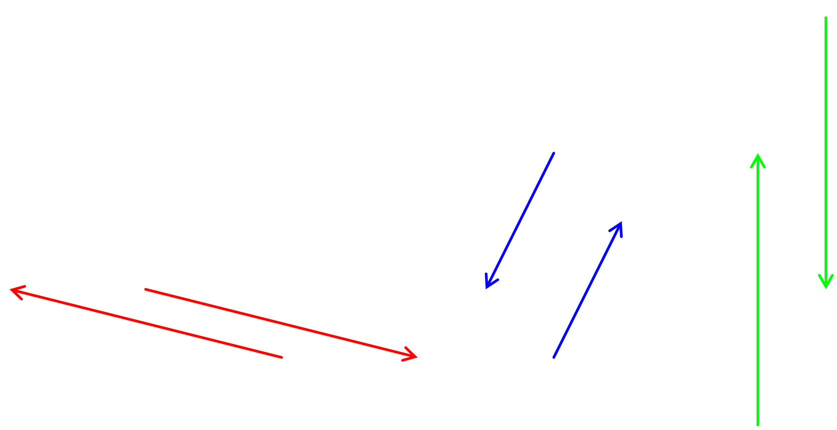
Vi skelner i nogle tilfælde mellem alle vektorer og alle vektorer på nær nulvektoren. Derfor er det behændigt, at have et navn for alle vektorer på nær nulvektoren:

Definition 1.1.3 (Egentlige vektorer)**.** En vektor, der *ikke* er nulvektoren kaldes for en *egentlig vektor*.

Til sidst defineres *modsat vektor*.

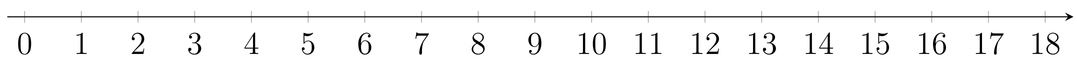
Definition 1.1.4 (Den modsatte vektor)**.** Givet en egentlig vektor $\vec{a}$, så kaldes den vektor, der har samme længde som $\vec{a}$, men modsat retning for den *modsatte vektor* til $\vec{a}$. Vi skriver $-\vec{a}$.

Herunder ses tre eksempler på en vektor og dens modsatte vektor.



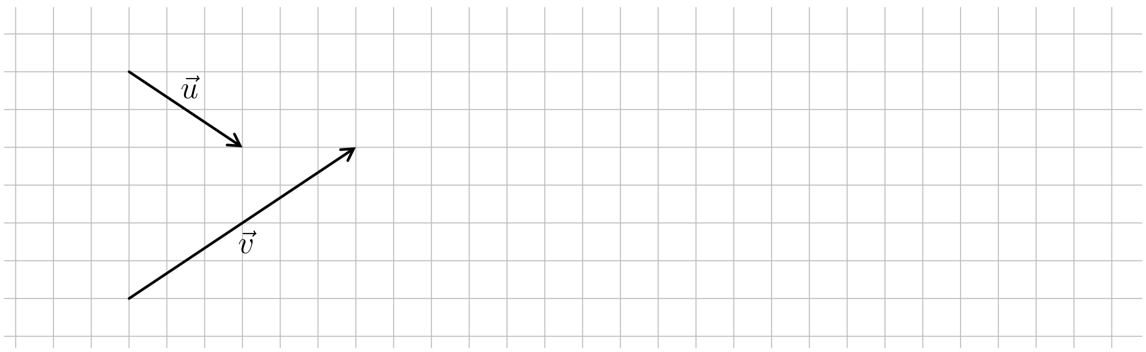
Aktivitetsark om vektorsum og vektordifferens

Opgave 1 Herunder ses en tallinje. Tegn og forklar, ved hjælp af tallinjen, hvordan du udregner det (lette) regnestykke $9 + 6$.

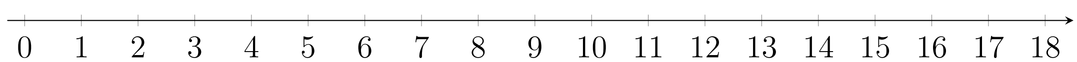


En del af idéen med at indføre vektorer, er at vi gerne vil kunne regne med dem på en måde, der ligner de sædvanlige tal mest muligt.

Opgave 2 Herunder er tegnet to vektorer. Kom med et bud på, hvordan vi kan tegne *summen* af de to vektorer.



Opgave 3 Her er endnu en tallinje. Tegn og forklar, ved hjælp af tallinjen, hvordan du udregner $9 - 6$.



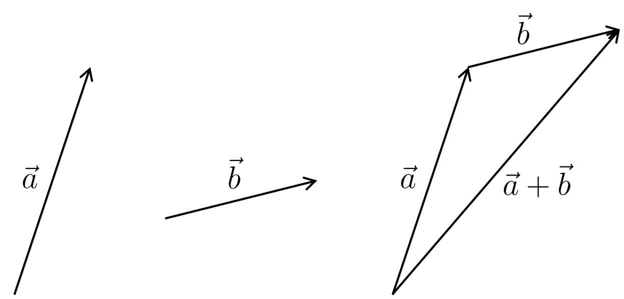
Opgave 4 Herunder er de samme to vektorer tegnet. Kom med et bud på, hvordan vi kan tegne *differensen* mellem de to vektorer.

Opgave 5 Undersøg om $\vec{u}+\vec{v} = \vec{v}+\vec{u}$, samt om $\vec{u}-\vec{v} = \vec{v}-\vec{u}$. Passer det sammen med det vi kender fra de almindelige tal?

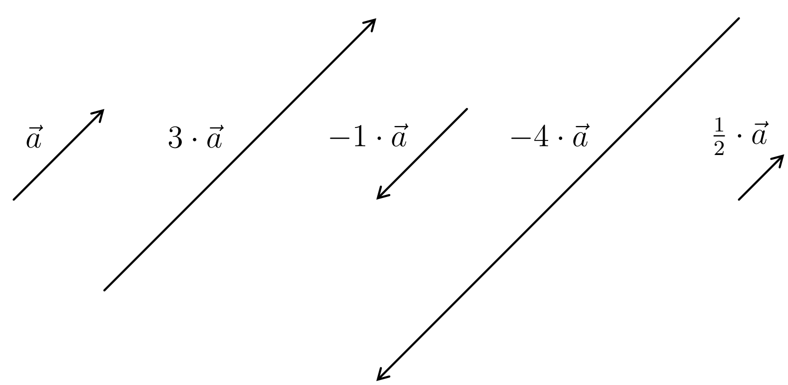
1.1.2 At regne med vektorer

Vektorer er geometriske objekter, hvilket i sagens natur gør dem velegnede til at beskrive geometriske problemer. Vi skal se, at vektorer også følger langt de fleste regneregler vi kender fra tal, og således er vektorer geometriske objekter, der kan behandles algebraisk på (næsten) samme måde som reelle tal.

Vektoraddition: Vi kan lægge to vektorer sammen, som det er vist på tegningen nedenfor. Hvis der er givet to vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$, så kan vi finde summen ved at lægge $\vec{b}$ i forlængelse af $\vec{a}$, og tegne vektoren $\vec{a}+\vec{b}$ fra udgangspunktet for $\vec{a}$ til spidsen af $\vec{b}$:

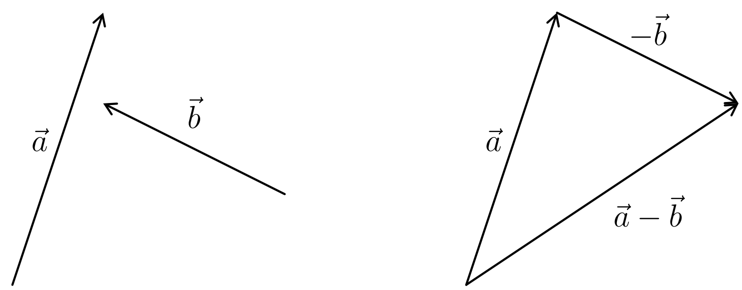


Gange en vektor med et tal: Man kan gange en vektor med et tal, t, ved at skalere vektorens længde med tallet t. Vektorens retning vendes, hvis $t < 0$. Retningen bevares, hvis $t > 0$. Er $t = 0$ opnås nulvektoren. Dette er illustreret nedenfor:



Af særlig interesse er vektoren $-1 \cdot \vec{a}$, som bliver benævnt $-\vec{a}$. Denne er præcist *den modsatte vektor* til $\vec{a}$.

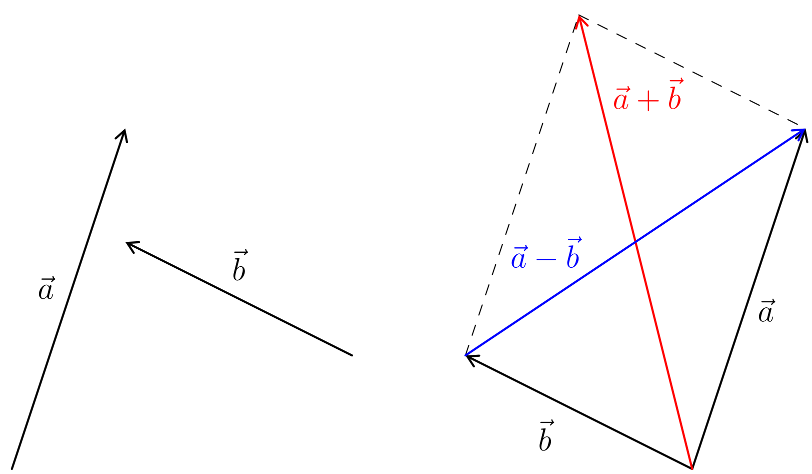
Vektorsubtraktion: Ligesom vi kan lægge vektorer sammen, så kan vi (naturligvis) også trække dem fra hinanden. Vi definerer simpelthen differensen mellem to vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$ som $\vec{a}-\vec{b} = \vec{a}+(-\vec{b})$. Dette tegner vi også:



Bemærkning 1.1.1. I modsætning til ved de reelle tal, så findes der *ikke* en multiplikation af vektorer. Vi skal senere definere noget der ligner, nemlig prikproduktet (også kaldet skalarproduktet), men det kan ikke sammenlignes med reel multiplikation.

◊

Bemærkning 1.1.2. Tegner man vektorerne $\vec{a}$ og $\vec{b}$ med samme udgangspunkt, så giver ovenstående definitioner, at diagonalerne i det parallelogram vektorerne udspænder, er vektorerne $\vec{a}+\vec{b}$ og $\vec{a}-\vec{b}$:



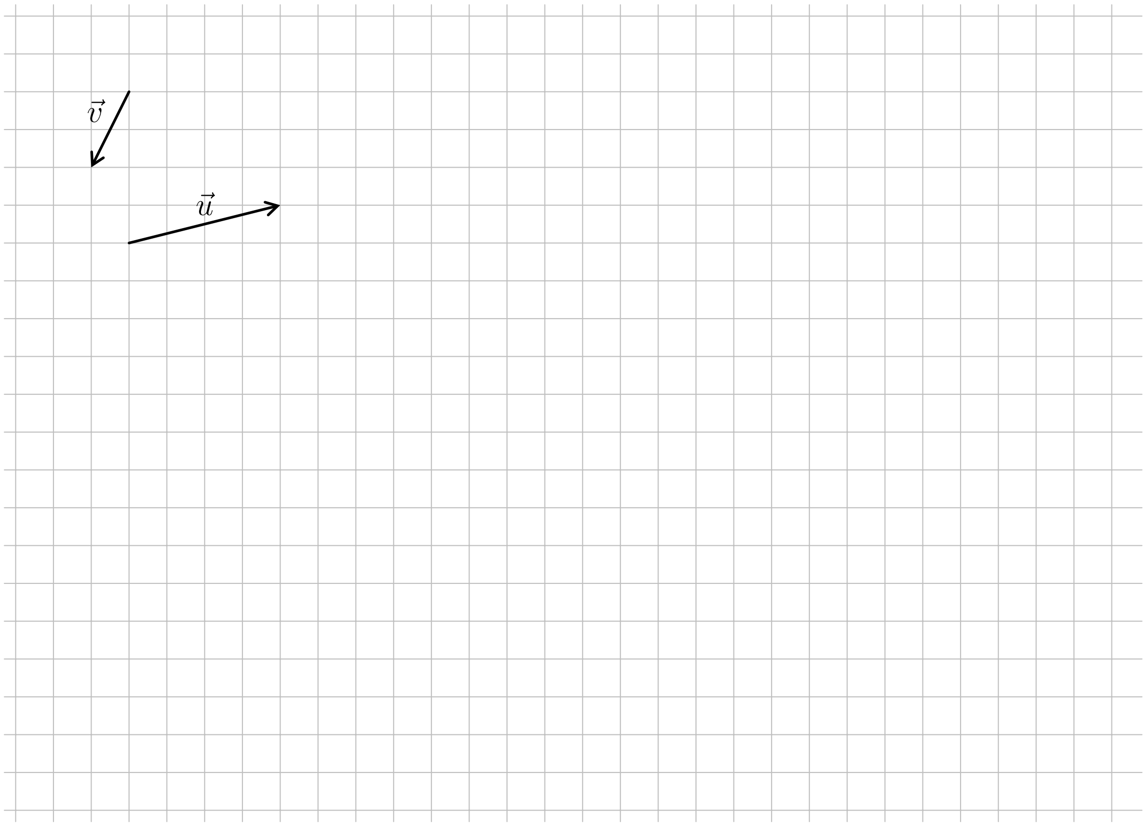
I fysik er dette (altså vektorerne $\vec{a}$ og $\vec{b}$, samt sumvektoren $\vec{a}+\vec{b}$, tegnet som diagonal) kendt som kræfternes parallelogram, da kræfter i fysik kan beskrives med vektorer. Så hvis én kraft repræsenteres af vektoren $\vec{a}$ og en anden kraft af vektoren $\vec{b}$, så vil den resulterende kraft være summen $\vec{a}+\vec{b}$.

◊

Vi vil uden bevis anføre at følgende regneregler gælder:

1. $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ (den kommutative lov)
2. $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{c}=\vec{a}+\left(\vec{b}+\vec{c}\right)$ (den associative lov)
3. $t\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=t\vec{a}+t\vec{b}$ for $t\in\mathbb{R}$ (den distributive lov)

Aktivitetsark om vektoralgebra



Opgave 1 Herover ses to vektorer $\vec{u}$ og $\vec{v}$. Tegn følgende vektorer:

a) $3 \cdot \vec{v}$	b) $\vec{u} + \vec{v}$
c) $\vec{v} - \vec{u}$	d) $\vec{u} - \vec{v}$
e) $2\vec{u} + 3\vec{v}$	f) $\frac{1}{2} \cdot \vec{v}$
g) $\vec{v} - 2 \cdot \vec{u}$	h) $-\vec{u} - \vec{v}$

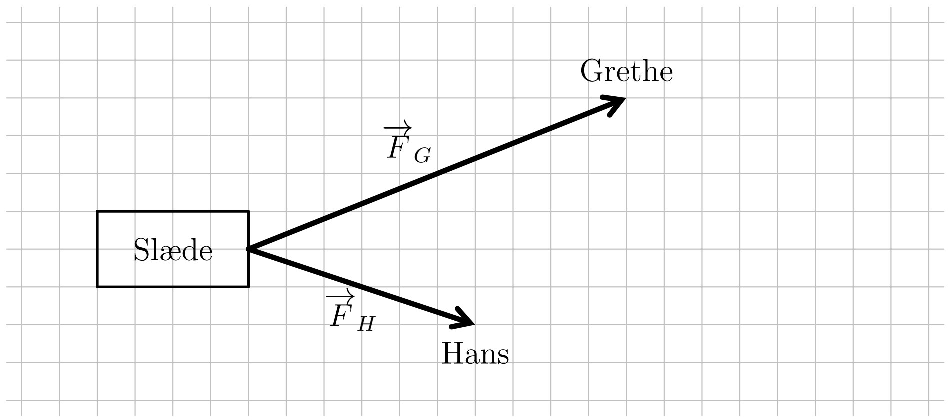
Opgave 2 Tegn $2\vec{u} + 2\vec{v}$ og $2 \cdot (\vec{u} + \vec{v})$, og forklar at dette illustrerer vektorregnereglen $k \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = k\vec{u} + k\vec{v}$.

Opgave 3 Tegn to vektorer, der har en vektorsum, som giver en vandret vektor.

Opgave 4 Tegn to vektorer, der har en lodret vektorsum.

Opgave 5 Tegn to vektorer, der starter samme sted. Tegn også det parallelogram de udspænder. Undersøg rigtigheden af den påståede sammenhæng mellem parallelogramets diagonaler og vektorsum/differens (se evt. ovenfor om kræfternes parallellogram).

Opgave 6 Herunder ses en skitse af Hans og Grethe, der trækker en slæde. De kræfter Hans og Grethe bruger til at trække slæden er betegnet $\overrightarrow{F}_H$ og $\overrightarrow{F}_G$, og kan ses som vektorer på skitsen.

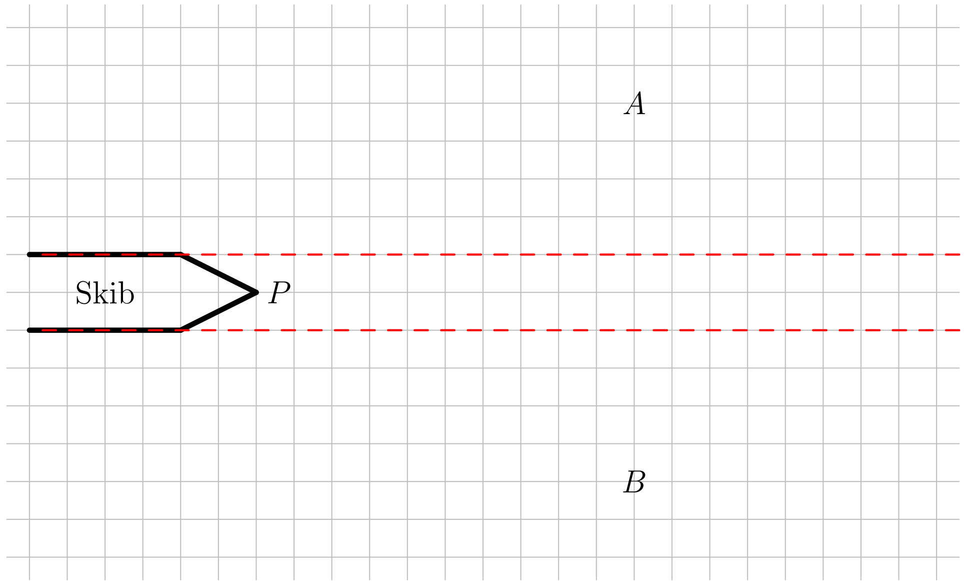


a) Tegn den samlede resulterende kraft, der trækker i slæden.
Hint: Den resulterende kraft er altid vektorsummen af de enkelte (vektor)kræfter.

b) Vil du vurdere, at slæden bevæger sig lige ud? Hvorfor/hvorfor ikke?

c) Undersøg, om der er en mere hensigtsmæssig placering af Hans og Grethe?

Opgave 7 Et skib skal bugseres i havn af to slæbebåde A og B. Slæbebåd A har en maksimal trækkraft på 10 kraftenheder (en kraftenhed svarer til et tern på papiret). Slæbebåd B har en maksimal trækkraft på 6 kraftenheder. Begge slæbebåde skal have deres slæbetov fastmonteret på skibet i punktet P i skibets stævn (forende).



Det oplyses, at for at skibet skal kunne bevæge sig, så skal den resulterende trækkraft være på mindst 12 kraftenheder. Desuden oplyses det, at af sikkerhedsmæssige årsager må slæbebådene ikke sejle tæt på hinanden, så de må ikke overskride de stiplede linjer.

a) Tegn en mulig placering af slæbebådene, så skibet bugseres stik imod højre. Begrund.

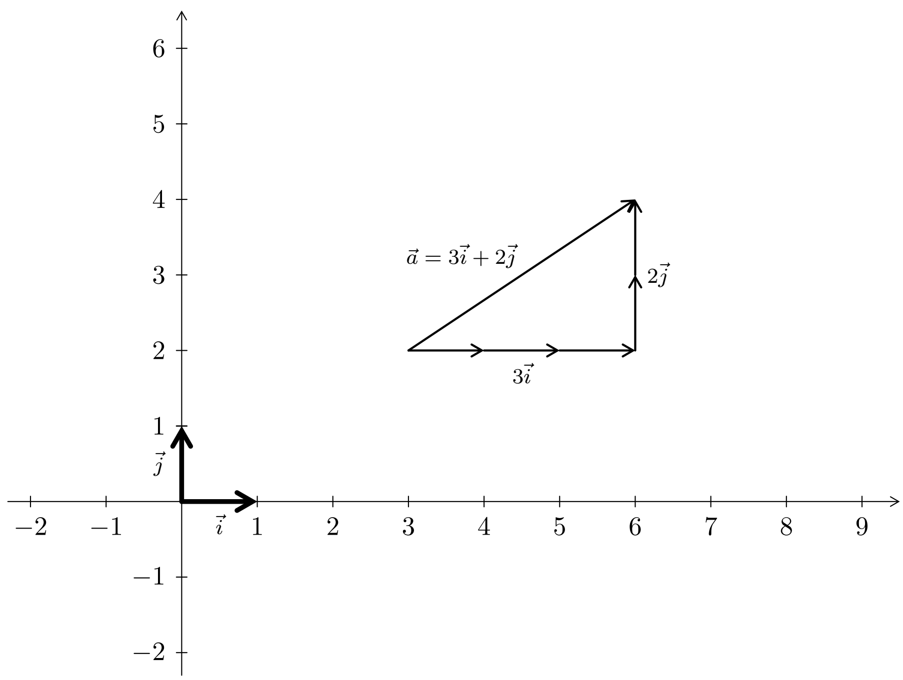
b) Undersøg, hvor stor en samlet resulterende trækkraft de to både maksimalt kan give skibet.

c) Tegn en mulig placering af slæbebådende, der fører til at skibet *ikke* flytter sig. Begrund.

1.1.3 Vektorers koordinater

To særlige enhedsvektorer fortjener speciel opmærksomhed. Det er de to *basisvektorer* $\vec{i}$ og $\vec{j}$, der er henholdsvis en vandret og en lodret vektor med længde én, hvor retningen for $\vec{i}$ er i x-aksens positive retning og $\vec{j}$ er i y-aksens positive retning.

I almindelighed, når vi arbejder med geometriske objekter i to dimensioner, så tegner vi dem (ofte) i et koordinatsystem. Vektorer tegnet i et koordinatsystem kan fastlægges med hjælp fra $\vec{i}$ og $\vec{j}$, som nedenfor:



Alle vektorer i planen kan som i ovenstående tegning skrives som en *linearkombination* af de to basisvektorer $\vec{i}$ og $\vec{j}$. Dette betyder, at vi, givet en vektor $\vec{a}$, kan skrive $\vec{a}$ som:

$$\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j}$$

Man kan oven i købet vise, at dette kun kan gøres på præcist én måde.[1] I ovenstående figur er $a_1 = 3$ og $a_2 = 2$.

Så langt har vi nøjedes med at tegne vektorer, uden sådan rigtigt for alvor at have regnet så meget. For at øge mulighederne for at lave beregninger, vil vi bruge ovenstående til at indføre vektorkoordinater.

[1]Det gør vi dog ikke her. Resultatet er dog ikke mærkeligt – hvordan skulle man have mulighed for at skrive $\vec{a}$ på flere måder, kun ved hjælp af $\vec{i}$ og $\vec{j}$?

Definition 1.1.5 (VEKTORKOORDINATER)**.** Når en vektor $\vec{a}$ kan skrives som

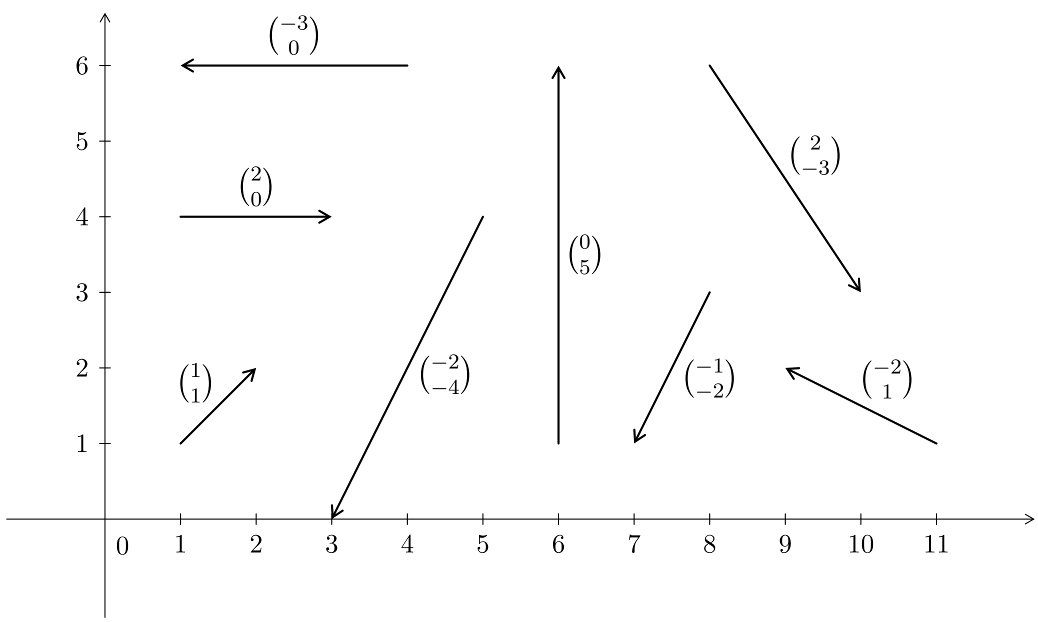
$$\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j},$$

hvor $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$, kalder vi a_1 og a_2 for *vektorkoordinaterne* for $\vec{a}$, og skriver

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

Vi siger desuden, at $\vec{a}$ er et element i $\mathbb{R}^2$, altså $\vec{a} \in \mathbb{R}^2$.

Herunder er der tegnet en række vektorer sammen med deres koordinatfremstilling:



Vi kan se, at koordinaten a_1 skal forstås som hvor langt ud af x-aksens retning vektoren udbreder sig, mens koordinaten a_2 skal forstås som hvor langt i y-aksens retning vektoren udbreder sig – begge dele regnet med fortegn, altså, hvis koordinaten er negativ, så menes enten til venstre ad x-aksen eller ned ad y-aksen.

Bemærkning 1.1.3 (FOR SPECIELT INTERESSEREDE)**.** Vi kalder $\mathbb{R}^2$ for et *vektorrum*. $\mathbb{R}^2$ har to dimensioner, fordi vektorerne har to koordinater. I denne note vil vi ikke undersøge nærmere, hvad et vektorrum egentligt er (for det kan være meget andet end $\mathbb{R}^2$ og endda have uendeligt mange dimensioner). Vi vil dog lige bemærke, at i videregående matematik er vektorrum af enorm vigtighed. Fundamentet for f.eks. kvantemekanikken, der er én af grundpillerne i den moderne fysik, og dermed også i meget af vore dages moderne teknologi, er vektorrum, der består af funktioner. Disse funktionsvektorrum viser sig at være særligt smukke udgaver af vektorrum. Man kalder dem for *Hilbertrum* opkaldt efter en meget dygtig tysk matematiker, David Hilbert (1862-1943). Hilbertrumsteori møder man *tidligst* på andet år af matematikstudiet, så det skal vi ikke tale mere om her.

$\diamondsuit$

Vi kan nu overføre regnereglerne for vektorer til koordinatformen (vi beviser dem ikke, men opfordrer til at overveje, hvorfor de er korrekte).

Sætning 1.1.1 (Vektorregneregler på koordinatform). *Hvis* $\vec{v} = \binom{v_1}{v_2}$ *og* $\vec{u} = \binom{u_1}{u_2}$ *er vektorer og* $t \in \mathbb{R}$*, så er*

1. $\vec{v} + \vec{u} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 + u_1 \\ v_2 + u_2 \end{pmatrix}$
2. $\vec{v} - \vec{u} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 - u_1 \\ v_2 - u_2 \end{pmatrix}$
3. $t\vec{v} = t\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} tv_1 \\ tv_2 \end{pmatrix}$

En anden mulighed vi nu har, idet vi har indført vektorkoordinater, er at beregne længden af en vektor:

Sætning 1.1.2 (Længdeformlen). *Hvis* $\vec{v} = \binom{v_1}{v_2}$ *er en vektor, så er længden af vektoren givet ved*

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$$

Bevis. Resultatet følger direkte af Pythagoras sætning (overvej, hvorfor!) $\square$

Vi anfører uden bevis følgende regneregel for længden af en vektor:

Sætning 1.1.3. *Hvis* $\vec{v} = \binom{v_1}{v_2}$ *er en vektor og* $t \in \mathbb{R}$ *er et tal, så er længden af vektoren* $t\vec{v}$ *givet ved*

$$|t\vec{v}| = |t||\vec{v}|$$

Bevis. Beviset er emnet i en senere opgave. $\square$

Bemærk, at i ovenstående er den numeriske værdi af t angivet ved symbolerne $|t|$ på samme måde som længden af vektoren $\vec{v}$ benævnes $|\vec{v}|$. Dette kan være lidt forvirrende, men tænk bare på det hele som længder. Den numeriske værdi kan jo også opfattes som længden af et tal.

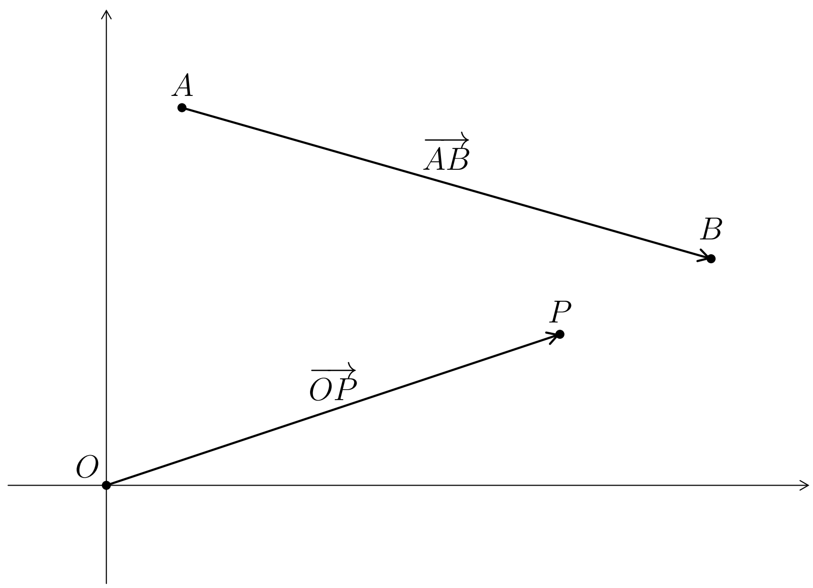
1.1.4 Vektorer og punkter i planen

I forbindelse med vektorer, er det naturligt at tale om vektorer mellem punkter.

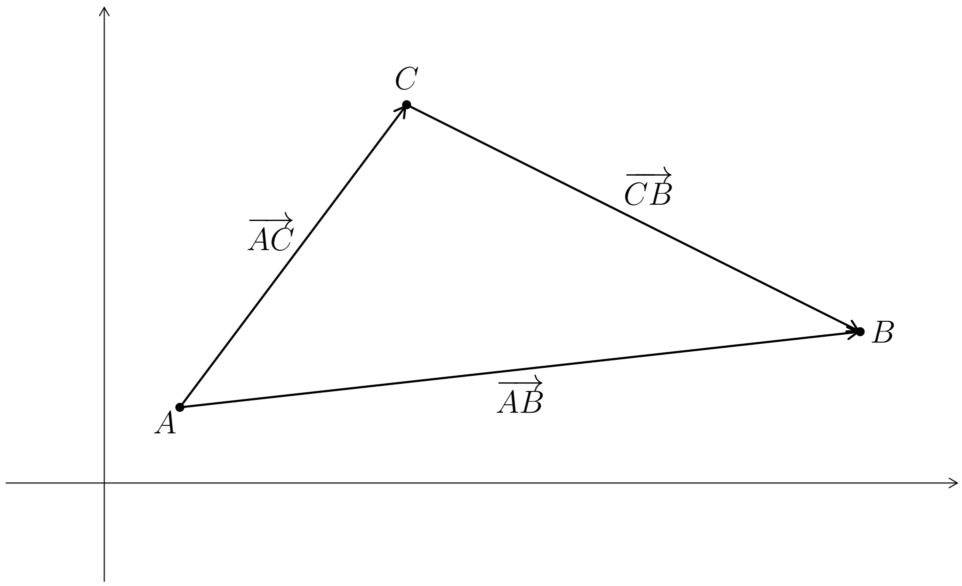
Definition 1.1.6 (Vektor mellem to punkter)**.** Hvis A og B er to punkter i koordinatsystemet, så kaldes vektoren fra A til B for $\overrightarrow{AB}$.

I det følgende vil vi kalde *origo*, altså punktet (0,0) i koordinatsystemet, for O.

Definition 1.1.7 (stedvektor)**.** Hvis P er et punkt i koordinatsystemet, så kaldes vektoren $\overrightarrow{OP}$ fra O til P for *stedvektoren* for P.



Som det ses i nedenstående figur, så kan man gå fra A til B via C eller direkte fra A til B – resultatet er det samme:



Vi har dermed argumenteret for indholdet i følgende sætning:

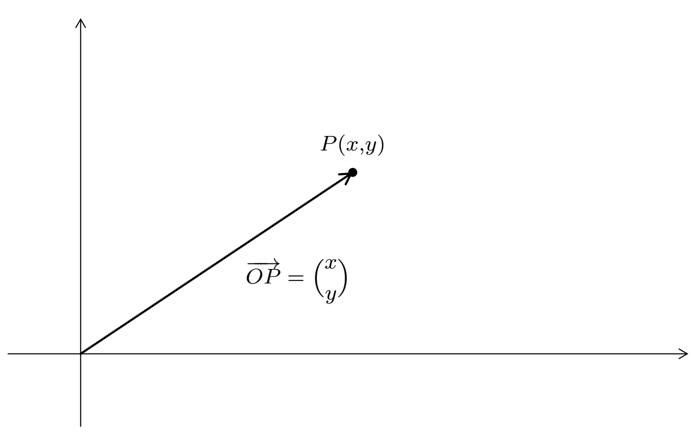
Sætning 1.1.4 (Indskudsreglen)**.** *Hvis A,B og C er punkter i planen, så er*

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$$

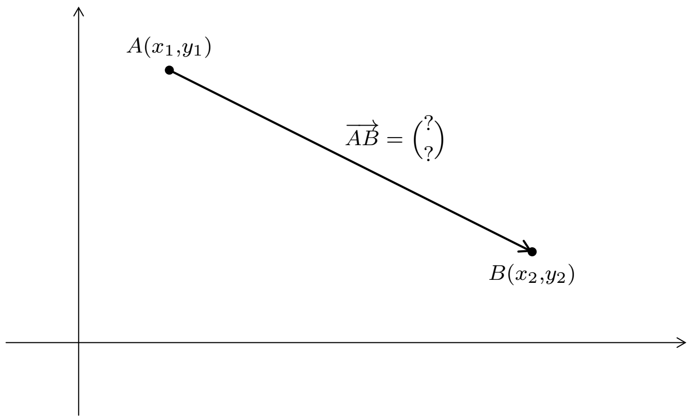
Sætningen kaldes indskudsreglen, fordi punktet C bliver skudt ind mellem A og B. Det er nok ikke særligt oplagt på nuværende tidspunkt, hvorfor det kan være smart, men det viser sig, i nogen sammenhænge, at beregninger kan gøres lettere ved at bruge indskudsreglen.

Vi husker på at Definition 1.1.7 sagde, at vektoren $\overrightarrow{OP}$ fra $O(0,0)$ til et punkt $P(x,y)$ i planen, kaldes for *stedvektoren* for P.

Der gælder oplagt at punkt og stedvektor har samme koordinater (overvej, hvorfor!).



Vi kan bruge stedvektorer til at finde koordinaterne til vektoren mellem $A(x_1,y_1)$ og $B(x_1,y_1)$:



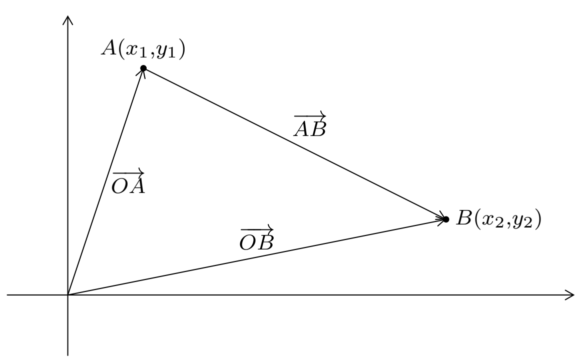
Dette er indholdet af følgende sætning:

Sætning 1.1.5. *Hvis $A(x_1,y_1)$ og $B(x_2,y_2)$ er punkter i planen, så er koordinaterne for $\overrightarrow{AB}$ givet ved*

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{pmatrix}$$

Bevis. Vi har to punkter i planen: $A(x_1,y_1)$ og $B(x_2,y_2)$. Lad $\overrightarrow{OA}$ og $\overrightarrow{OB}$ være punkternes stedvektorer.

Se nu på tegningen:



Vi ved fra indskudsreglen (Sætning 1.1.4), at

$$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}.$$

Idet punkt og stedvektor har samme koordinater, får vi fra dette, at:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{pmatrix}$$

Hvor vi brugte regneregel 2 fra Sætning 1.1.1. Dette viser det ønskede. □

Vektorer mellem to punkter kan nu bruges til at finde en formel for afstanden mellem to punkter i planen:

Sætning 1.1.6. *Hvis $A(x_1,y_1)$ og $B(x_2,y_2)$ er punkter i planen, så er afstanden mellem A og B givet ved:*

$$\mathrm{dist}(A,B) = \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Bevis. Bruger man længdeformlen (Sætning 1.1.2) på vektoren $\overrightarrow{AB}$ opnår man det ønskede (gør det!). □

1.1.5 Opgaver

Opgave 1 Lad $\vec{v} = \binom{3}{-1}$ og $\vec{u} = \binom{1}{-2}$. Tegn følgende på et papir:

a) $\vec{v}$ og $\vec{u}$

b) $\vec{v} + \vec{u}$

c) $\vec{v} - \vec{u}$

d) $-2\vec{v}$

e) $3\vec{v} - 4\vec{u}$

Opgave 2 Gør som i Opgave 1, nu bare med vektorerne $\vec{v} = \binom{1}{1}$ og $\vec{u} = \binom{-3}{2}$.

Opgave 3 Find længden af *alle* vektorer nævnt i Opgave 1.

Opgave 4 Find længden af *alle* vektorer nævnt i Opgave 2.

Opgave 5 Find koordinaterne til $\overrightarrow{AB}$ og tegn vektoren, når

a) $A(2, 1)$ og $B(9, 4)$

b) $A(-4, 3)$ og $B(-9, 1)$

c) $A(1, 1)$ og $B(1, 12)$

d) $A(-2, -4)$ og $B(-8, -10)$

e) $A(0, 1)$ og $B(9, 0)$

f) $A(-5, 7)$ og $B(9, -2)$

Opgave 6 Find afstanden mellem punkterne:

a) $(4, 5)$ og $(-1, 17)$

b) $(-10, -21)$ og $(-3, 3)$

c) $(1, 8)$ og $(10, -32)$

d) $(5, -1)$ og $(7, -12)$

Opgave 7 Vi skal i denne opgave se på beviset for Sætning 1.1.3. Sætningen siger, at $|t\vec{v}| = |t||\vec{v}|$. Beviset er ført herunder:

$$|t\vec{v}| = \sqrt{(tv_1)^2 + (tv_2)^2} = \sqrt{t^2(v_1^2 + v_2^2)} = |t|\sqrt{v_1^2 + v_2^2} = |t||\vec{v}|.$$

a) Gennemgå hvert enkelt lighedstegn. Indfør ekstra mellemregninger og forklaringer, så du kan forstå alle dele i beviset.

b) Forklar, hvad der er længder, og hvad der er numeriske værdier i ovenstående.

Opgave 8 Givet punkterne $A(4, -10), B(3, 1)$ og $C(-4, 7)$.

a) Opskriv punkternes *stedvektorer*. Tegn punkter og stedvektorer i et koordinatsystem.

b) Bestem vektoren $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ og $\overrightarrow{BC}$.

c) Bestem afstanden mellem B og C.

Opgave 9 Forklar, hvorfor der for to punkter A og B altid gælder $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$.

Opgave 10 Lad to punkter være givet ved $A(2, 9)$ og $B(13, 3)$.

a) Opskriv punkternes *stedvektorer*. Tegn punkter og stedvektorer i et koordinatsystem.

b) Bestem vektoren $\overrightarrow{AB}$.

c) Beregn vektoren $\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$. Forklar, at resultater er stedvektor for midtpunktet af linjestykket mellem A og B.

Opgave 11 Bevis, at midtpunktet M af et linjestykke mellem punkterne $A(x_1, y_1)$ og $B(x_2, y_2)$ har koordinaterne

$$M = \left(\frac{x_2 + x_1}{2}, \frac{y_2 + y_1}{2}\right)$$

Hint: Brug vektorerne $\overrightarrow{OA}$ og $\overrightarrow{AB}$. Lav en tegning.

En anvendelse af vektorer (udfordrende!):

Dette er en opgave, hvor vi skal bruge vektorregning til at bevise en sætning om trekanter, nemlig at medianerne skærer hinanden i samme punkt og at de deler hinanden i forholdet 1 : 2. Der mindes om at medianen er en linje fra en vinkel, der deler modstående side i to lige store stykker.

Opgave 12 Vi lader $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$ og $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$. Argumentér for, at

a) $\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}$.

b) $\overrightarrow{AC} = \vec{c} - \vec{a}$.

c) $\overrightarrow{BC} = \vec{c} - \vec{b}$.

Opgave 13 Vi lader nu M_A, M_B og M_C være midtpunkterne på henholdsvis side a, side b og side c. Vis, at

a) $\overrightarrow{OM}_A = \frac{1}{2}(\vec{b} + \vec{c})$

b) $\overrightarrow{M_A A} = \vec{a} - \overrightarrow{OM}_A$

c) $\overrightarrow{OM}_B = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{c})$

d) $\overrightarrow{M_B B} = \vec{b} - \overrightarrow{OM}_B$

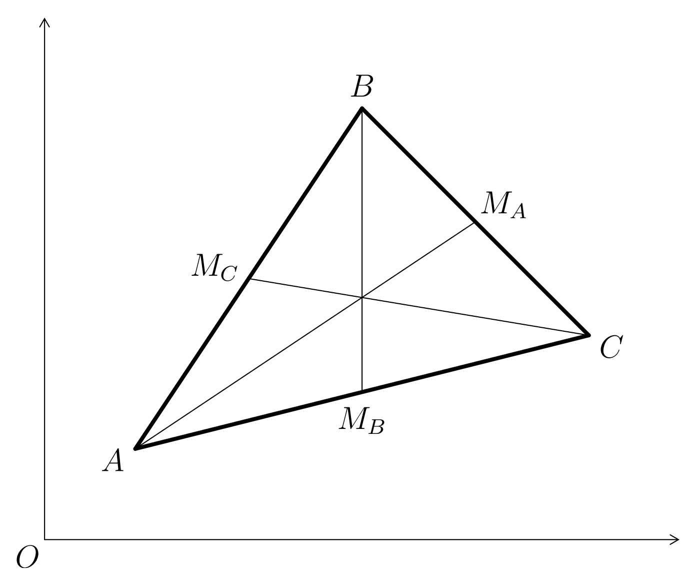
e) $\overrightarrow{OM}_C = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})$

f) $\overrightarrow{M_C C} = \vec{c} - \overrightarrow{OM}_C$

Opgave 14 Vi indfører nu yderligere tre punkter, T_A, T_B og T_C, hvorom der gælder at T_A deler medianen fra A til M_A i forholdet 1 : 2 (ligeledes med de to andre), altså $\overrightarrow{OT}_A = \overrightarrow{OM}_A + \frac{1}{3}\overrightarrow{M_A A}$ og $\overrightarrow{OT}_B = \overrightarrow{OM}_B + \frac{1}{3}\overrightarrow{M_B B}$ samt $\overrightarrow{OT}_C = \overrightarrow{OM}_C + \frac{1}{3}\overrightarrow{M_C C}$.

Hvis du kan vise, at $\overrightarrow{OT}_A = \overrightarrow{OT}_B = \overrightarrow{OT}_C$, så er sætningen bevist (hvorfor?).

a) Vis, at $\overrightarrow{OT}_A = \overrightarrow{OT}_B = \overrightarrow{OT}_C = \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$.



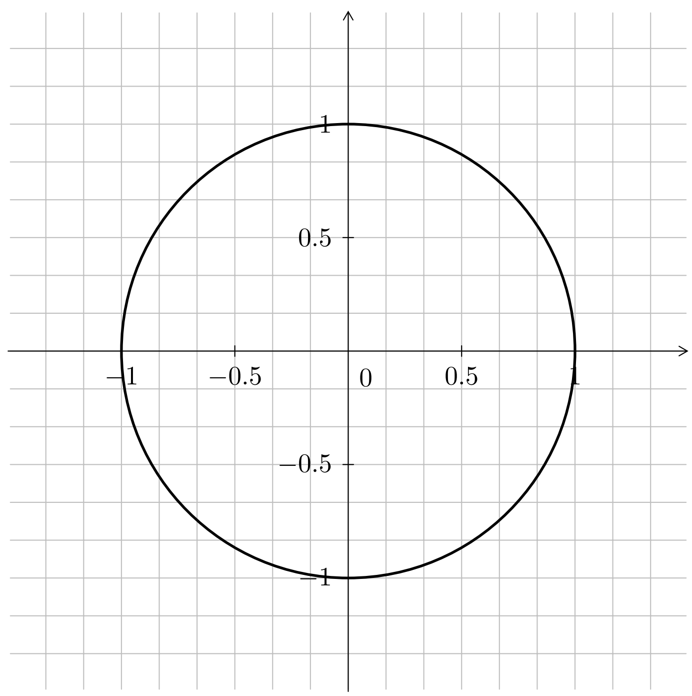
1.2 Cosinus, sinus og tangens

Nogle har måske allerede stiftet bekendtskab med de trigonometriske størrelser *cosinus*, *sinus* og *tangens* før, f.eks. i grundskolen. Vi indfører alligevel disse grundlæggende størrelser her. Umiddelbart vil man nok forbinde sinus og cosinus med trekanter, men vi skal se, at de også spiller en rolle for vektorer.

1.2.1 Definition af cosinus, sinus og tangens

Definition 1.2.1 (ENHEDSCIRKLEN)**.** Cirklen med centrum i punktet (0,0) og radius 1 kaldes for *enhedscirklen*.

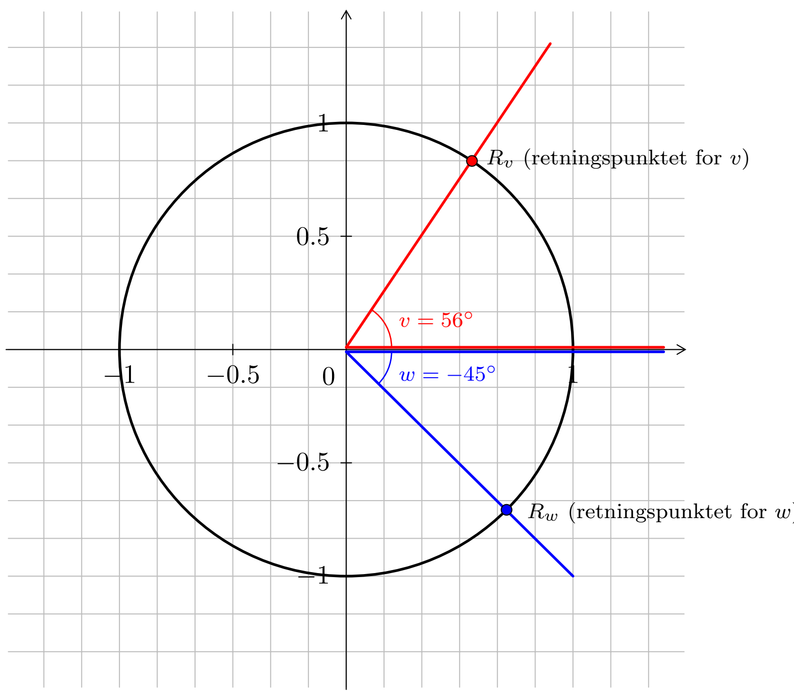
Herunder ses enhedscirklen tegnet i et koordinatsystem:



Vi vil i det følgende omtale vinkler i enhedscirklen, og i denne forbindelse forstås en vinkel, hvor det ene vinkelben *altid* tegnes ud af x-aksen. Det andet vinkelben tegnes mod uret (det kaldes positiv omløbsretning), hvis vinklen er positiv og med uret (negativ omløbsretning), hvis vinklen er negativ. Man siger, at vinklerne regnes med fortegn.

Definition 1.2.2 (Retningspunkt)**.** Skæringspunktet mellem det vinkelben, der *ikke* ligger langs x-aksen, og enhedscirklen kaldes vinklens *retningspunkt*.

Dette er illustreret herunder:



Vi kan nu definere de trigonometriske størrelser *sinus* og *cosinus*:

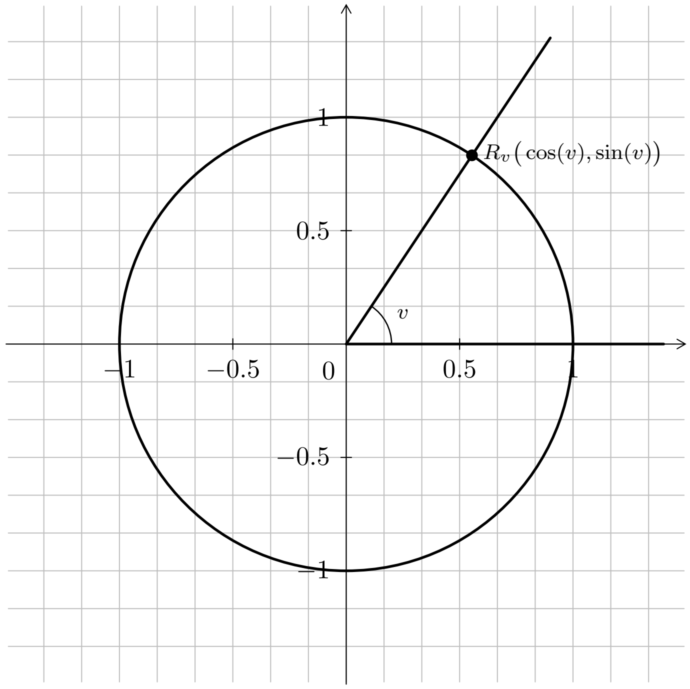
Definition 1.2.3 (Sinus og cosinus)**.** Hvis v er en vinkel i enhedscirklen, så er cosinus til v, som skrives: $\cos(v)$, førstekoordinaten til retningspunktet for v. Ligeledes er sinus til v, som skrives: $\sin(v)$, andenkoordinaten til retningspunktet for v.

Og tangens:

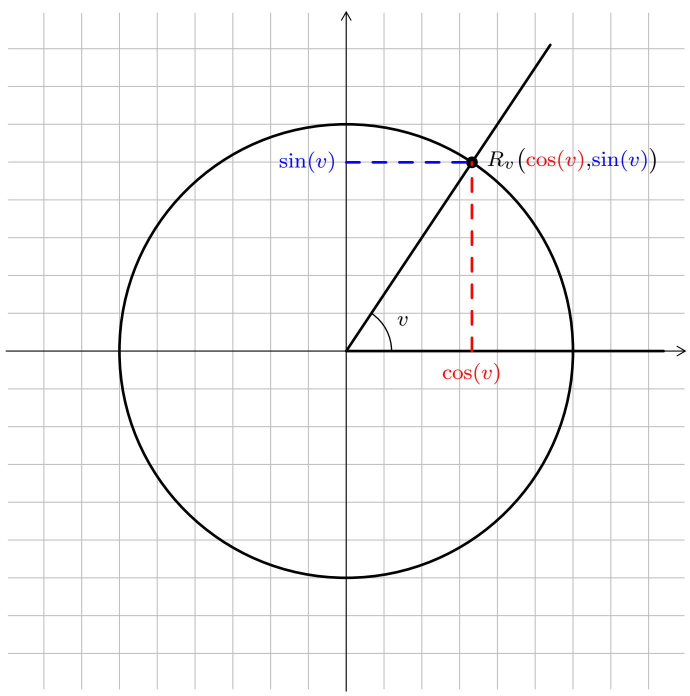
Definition 1.2.4 (Tangens)**.** Tangens til en vinkel v fastsættes ved brøken:

$$\tan(v) = \frac{\sin(v)}{\cos(v)}, \quad \text{hvor } v \neq 90° + p \cdot 180°,\ p \in \mathbb{Z}$$

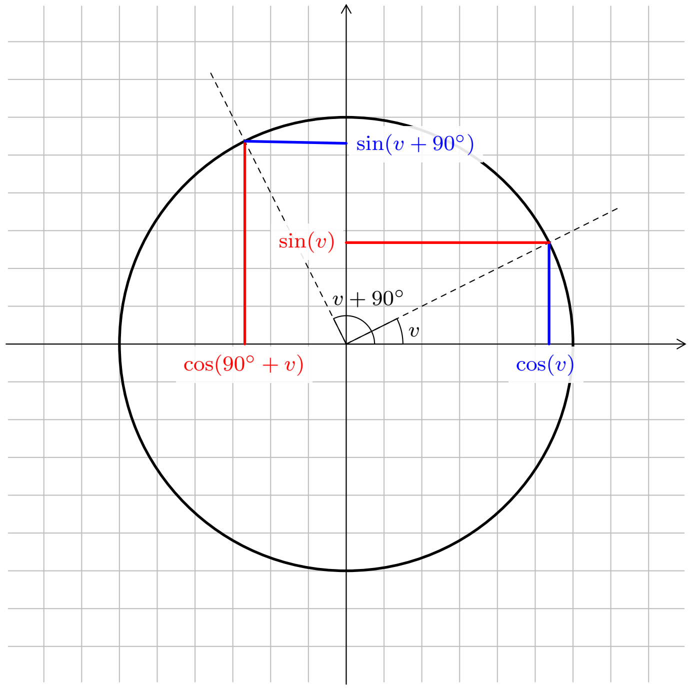
.



Denne definition medfører naturligvis, at man, givet en vinkel i enhedscirklen, skal aflæse cosinus på x-aksen og sinus på y-aksen:



Af definitionen følger en række formler, der beskriver sammenhængen mellem sinus og cosinus. Vi nævner to, uden decideret bevis, men illustreret ganske overbevisende i nedenstående koordinatsystem:



Sætning 1.2.1. *For enhver vinkel v gælder, at*

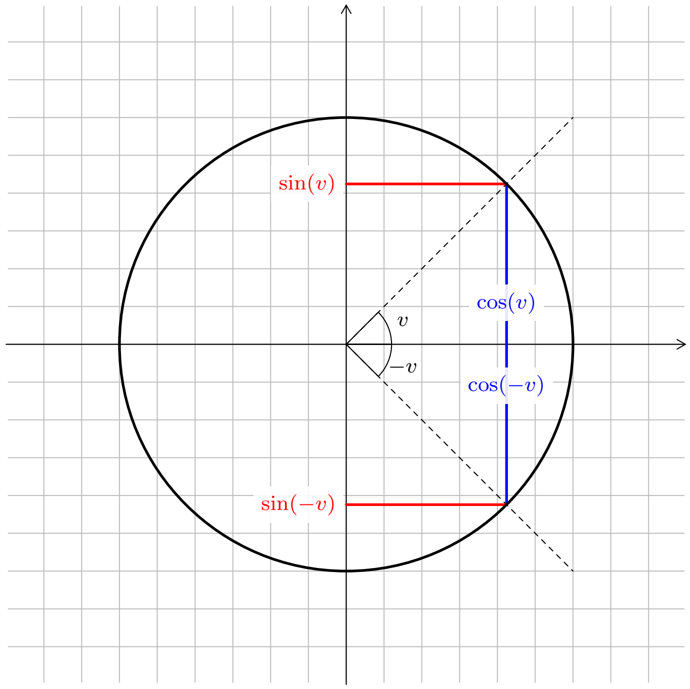
1. $\sin(90° + v) = \cos(v)$
2. $\cos(90° + v) = -\sin(v)$

Til slut fremføres yderligere tre vigtige egenskaber ved cosinus og sinus (igen uden rigtigt bevis, men med to overbevisende tegninger):

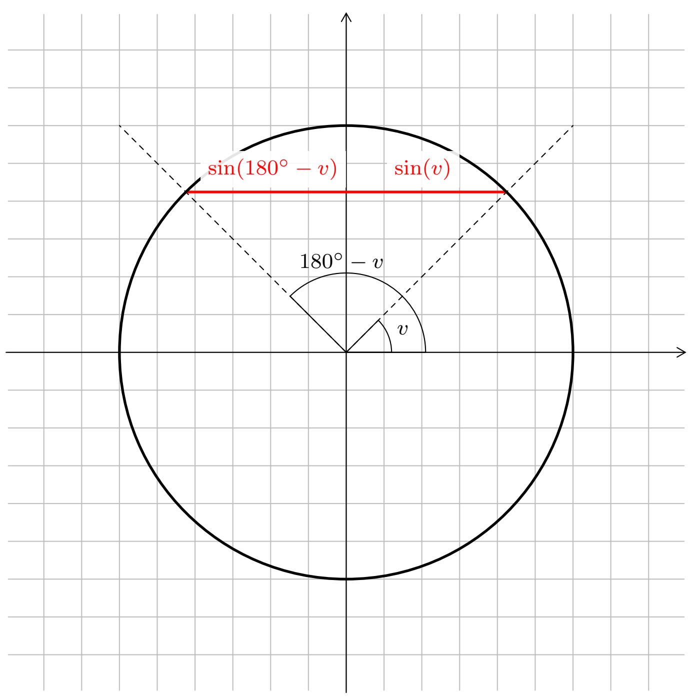
Sætning 1.2.2. *For enhver vinkel v gælder, at*

3. $\cos(-v) = \cos(v)$
4. $\sin(-v) = -\sin(v)$
5. $\sin(v) = \sin(180° - v)$

Nedenstående illustrerer punkt 3) og 4).

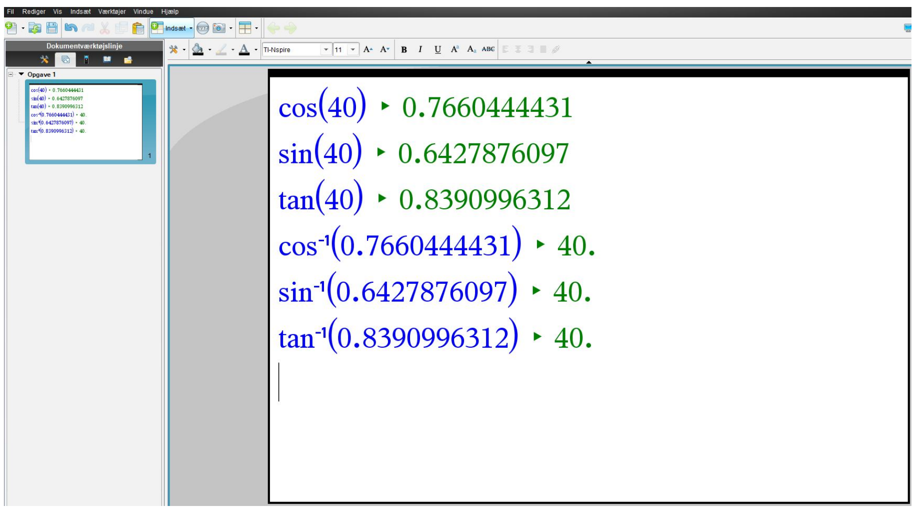


Mens dette viser punkt 5).



1.2.2 Cosinus, sinus og tangens i Nspire

Kender man vinklen og skal finde cosinus, sinus eller tangensværdien til denne vinkel klares det let i Nspire (eller på en lommeregner). Man indtaster bare det ønskede (og husker at indstillingen i skal være i grader). Det omvendte problem, hvor man kender f.eks. cosinusværdien til en vinkel, og man ønsker at finde vinklen, løses ved at bruge kommandoen `arccos()`, som Nspire skriver som `cos`$^{-1}$`()`. Ligeledes kan man bruge `arcsin()` og `arctan()`.



Eksempel 1.2.1. Hvis vi eksempelvis ved at $\cos(v) = 0{,}724$ og $\sin(w) = 0{,}203$, så kan vi finde vinklerne v og $w$således[2]:

$$v = \arccos(0{,}724) = \cos^{-1}(0{,}724) = 43{,}61°$$

og

$$w = \arcsin(0{,}203) = \sin^{-1}(0{,}203) = 11{,}71°$$

MEN, for der er et men, w kan også have værdien

$$w = 180° - 11{,}71° = 168{,}29°$$

da både $\sin(11{,}71°) = 0{,}203$ og $\sin(168{,}29°) = 0{,}203$. Se Sætning 1.2.2. Man skal således være lidt forsigtig, hvis man finder vinkler (i trekanter eller mellem vektorer) med sinus. Der vil som udgangspunkt altid være to mulige svar. Kan man bruge cosinus i stedet, så vil det som regel være en lettere strategi.

[2]her antages underforstået at vi taler om vinkler mellem 0° og 180°

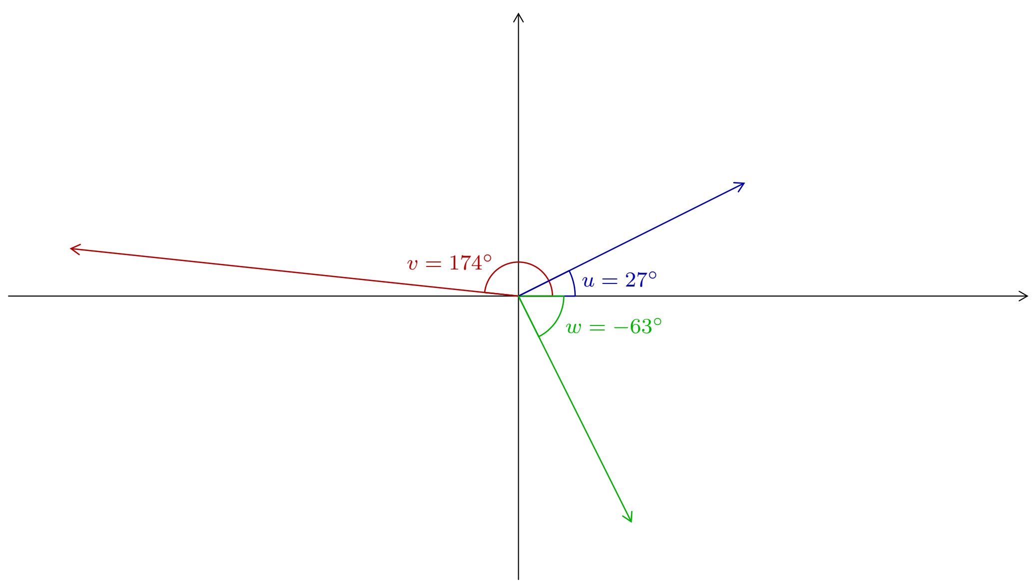
1.2.3 Vektorer udtrykt ved hjælp af cosinus og sinus

I dette afsnit har vi brug for et nyt begreb: *enhedsvektor*:

Definition 1.2.5 (Enhedsvektorer)**.** En vektor med længde én, kaldes en *enhedsvektor*.

Vi skal også definere retningsvinkler for vektorer:

Definition 1.2.6 (Retningsvinkel for en vektor)**.** Hvis $\vec{a}$ er en vektor, så kalder vi den vinkel $v \in]-180°,180°]$, som vektoren danner med x-aksen, for *retningsvinklen* for $\vec{a}$.



Figur 1.1: Herover ses retningsvinklen for tre vektorer. Bemærk, at den ene er negativ. Retningsvinklen regnes med fortegn i forhold til x-aksen.

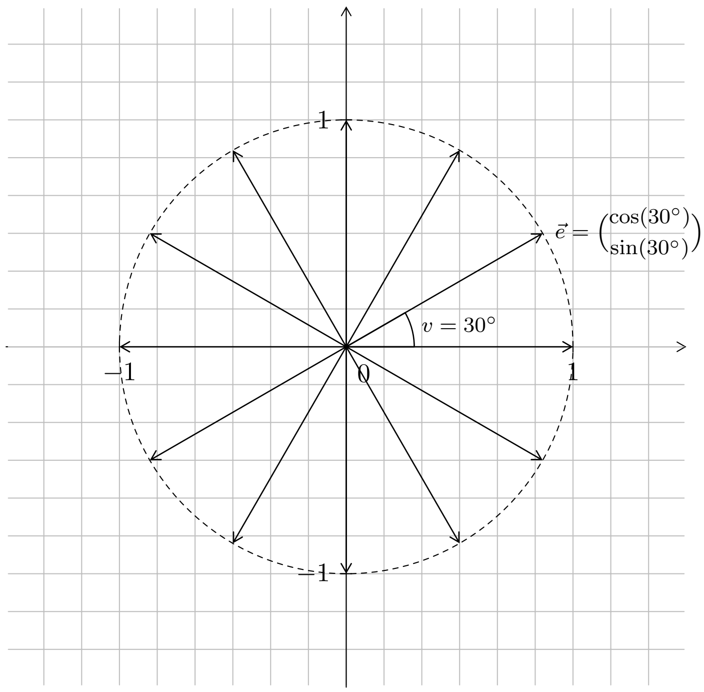
Fra definitionen af cosinus og sinus er det klart, at stedvektoren for retningspunktet for v har koordinaterne (husk at punkt og stedvektor har samme koordinater):

$$\overrightarrow{OR_v} = \begin{pmatrix} \cos(v) \\ \sin(v) \end{pmatrix}$$

Vi kan dermed skrive enhver enhedsvektor, $\vec{e}$, på følgende måde:

$$\vec{e} = \begin{pmatrix} \cos(v) \\ \sin(v) \end{pmatrix},$$

hvor v er enhedsvektorens retningsvinkel.



Figur 1.2: Enhver enhedsvektor kan skrives $\vec{e} = \binom{\cos(v)}{\sin(v)}$. Herover ses et eksempel med en enhedsvektor og den tilhørende retningsvinkel på 30°, samt en række andre enhedsvektorer med retningsvinkler der er multiplum af 30°.

Dette danner grundlaget for, at vi kan skrive *enhver* egentlig vektor ved hjælp af dens retningsvinkel. For en egentlig vektor $\vec{a}$, med retningsvinkel v, konstrueres vektoren

$$\begin{pmatrix} |\vec{a}|\cos(v) \\ |\vec{a}|\sin(v) \end{pmatrix} = |\vec{a}| \begin{pmatrix} \cos(v) \\ \sin(v) \end{pmatrix}.$$

Denne vektor har samme længde og retning som $\vec{a}$, og derfor må de være ens:

$$\vec{a} = |\vec{a}| \begin{pmatrix} \cos(v) \\ \sin(v) \end{pmatrix}.$$

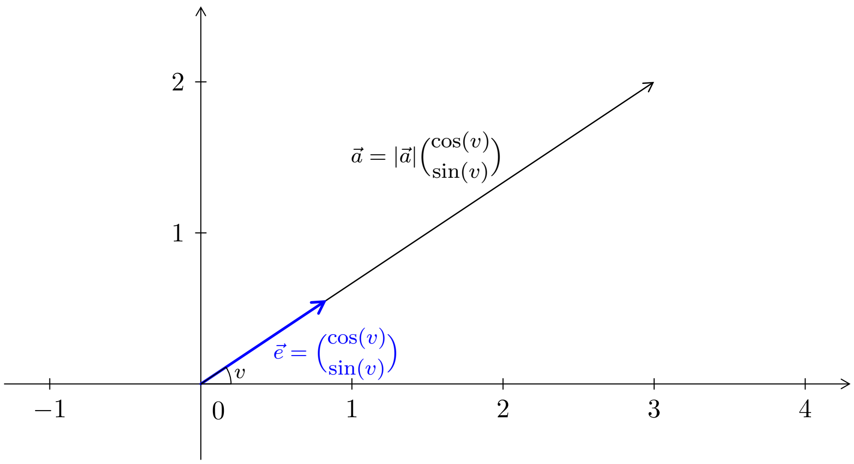
Vi har dermed begrundet fornuften i følgende definition:

Definition 1.2.7 (Vektorer på polær form)**.** Hvis $\vec{a}$ er en egentlig vektor med retningsvinkel v, så kan $\vec{a}$ skrives på polær form således:

$$\vec{a} = |\vec{a}| \begin{pmatrix} \cos(v) \\ \sin(v) \end{pmatrix}.$$

Eksempel 1.2.2. Lad os prøve at skrive vektoren $\vec{a} = \binom{-1}{3}$ på polær form. Det ses (forhåbentligt let), at længden af $\vec{a}$ er

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2} = \sqrt{(-1)^2 + 3^2} = \sqrt{10}$$



Figur 1.3: Enhver vektor kan skrives ved hjælp af længden og retningsvinklen. Bemærk, at enhedsvektoren $\vec{e}$ blot skal ganges op med længden af $\vec{a}$, for at blive til $\vec{a}$. Omvendt kan man også altid danne en enhedsvektor ud fra en egentlig vektor $\vec{a}$, ved $\vec{e} = \frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}$.

Hvis vi kalder v for retningsvinklen må der derfor gælde, at

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} = |\vec{a}| \begin{pmatrix} \cos(v) \\ \sin(v) \end{pmatrix} = \sqrt{10} \cdot \begin{pmatrix} \cos(v) \\ \sin(v) \end{pmatrix}$$

eller skrevet ud som to ligninger:

$$-1 = \sqrt{10} \cdot \cos(v) \quad \text{og} \quad 3 = \sqrt{10} \cdot \sin(v)$$

Ligningerne løses i Nspire:

$$\text{solve}\left(-1=\sqrt{10}\cdot\cos(v) \text{ and } 3=\sqrt{10}\cdot\sin(v),v\right)|-180\leq v\leq 180 \;\blacktriangleright\; v=108.4349488$$

Vi kan heraf se, at der gælder

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \sqrt{10} \cdot \begin{pmatrix} \cos(108{,}43°) \\ \sin(108{,}43°) \end{pmatrix}$$

1.2.4 Opgaver

Opgave 1 Brug enhedscirklen på næste side (print den eventuelt ud) til at aflæse $\cos(v)$ og $\sin(v)$ når:

a) $v = 0°$	b) $v = 90°$	c) $v = 180°$
d) $v = 45°$	e) $v = 60°$	f) $v = 30°$
g) $v = 110°$	h) $v = -25°$	i) $v = -170°$
j) $v = -60°$	k) $v = 120°$	l) $v = -150°$

Opgave 2 Brug enhedscirklen på næste side til at aflæse v (der kan være flere svar) når:

a) $\sin(v) = 0$	b) $\sin(v) = 0.5$	c) $\sin(v) = 0.1$
d) $\sin(v) = -0.4$	e) $\sin(v) = -1$	f) $\sin(v) = 1$
g) $\cos(v) = 0$	h) $\cos(v) = 0.5$	i) $\cos(v) = 0.1$
j) $\cos(v) = -0.4$	k) $\cos(v) = -1$	l) $\cos(v) = 1$

Opgave 3 Brug Nspire til at finde vinklen (eller vinklerne), når (to decimalers nøjagtighed):

a) $\cos(v) = 0.1$	b) $\cos(v) = 0.555$	c) $\cos(v) = 0.123$
d) $\cos(v) = -0.449$	e) $\cos(v) = -0.776$	f) $\cos(v) = 0.25$
g) $\sin(v) = 0{,}546$	h) $\sin(v) = 0.5$	i) $\sin(v) = 0.19$
j) $\sin(v) = -0.4$	k) $\tan(v) = 0.9$	l) $\tan(v) = 10$

Opgave 4 Brug Nspire til at finde sinus og cosinusværdierne til vinklerne i opgave 1.

Opgave 5 Bestem en enhedsvektor, der har samme retning som vektoren $\vec{v} = \binom{3}{4}$.

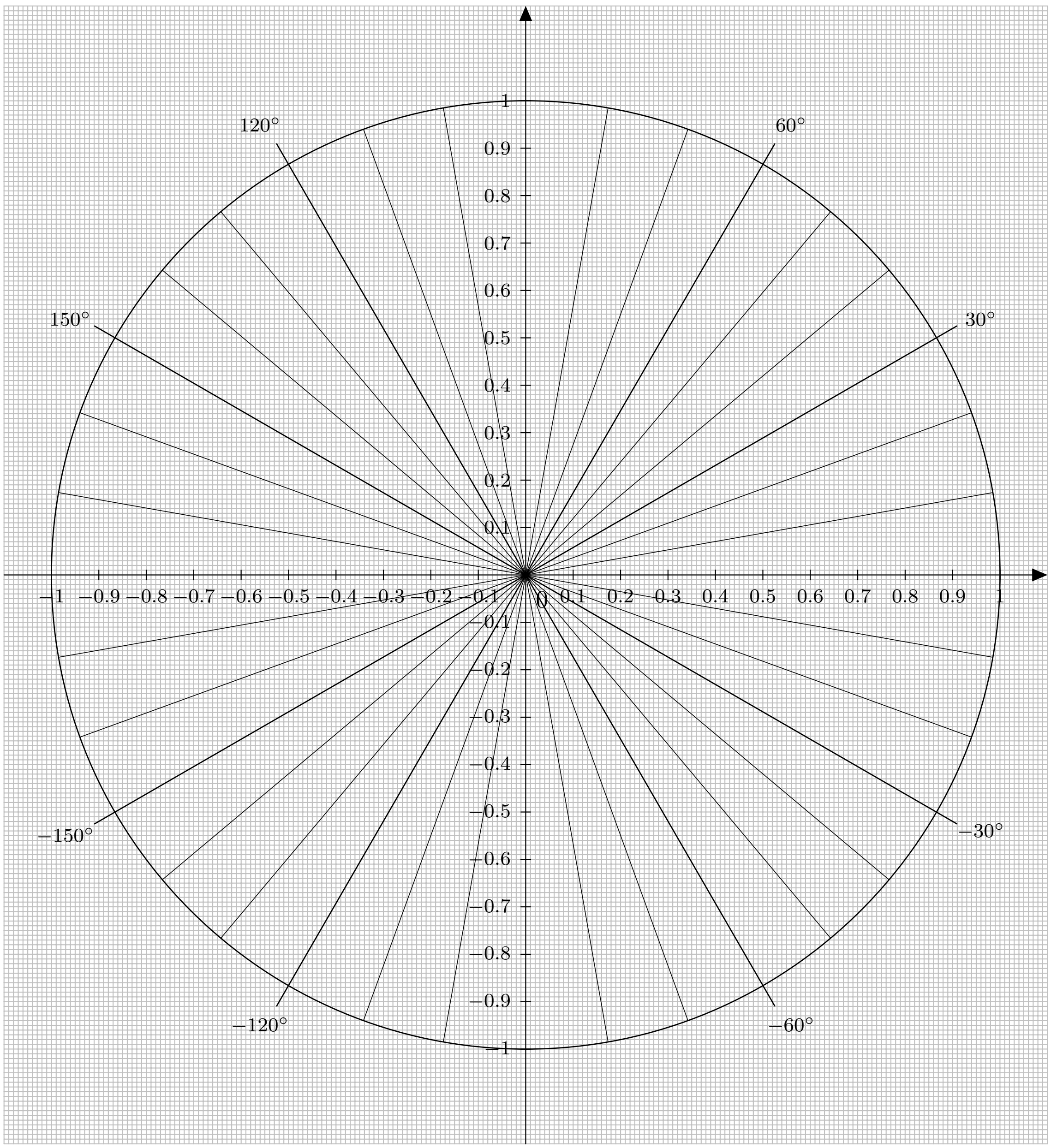
Opgave 6 Bestem en enhedsvektor, der er modsat rettet vektoren $\vec{v} = \binom{12}{-5}$.

Opgave 7 Bestem enhedsvektorer, der har retningsvinkler på henholdsvis 30°, −80°, 160° og −120°.

Opgave 8 Skriv vektorerne $\vec{a}$ og $\vec{b}$ på polær form, når:

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ og $\vec{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \end{pmatrix}$	b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ og $\vec{b} = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \end{pmatrix}$
c) $\vec{a} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -1 \end{pmatrix}$ og $\vec{b} = \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \end{pmatrix}$	d) $\vec{a} = \begin{pmatrix} \frac{11}{3} \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix}$ og $\vec{b} = \begin{pmatrix} \frac{3}{8} \\ \frac{5}{6} \end{pmatrix}$

Opgave 9 Bevis, at $\cos(v)^2 + \sin(v)^2 = 1$


120°
60°
150°
30°
−150°
−30°
−120°
−60°
−1 −0.9 −0.8 −0.7 −0.6 −0.5 −0.4 −0.3 −0.2 −0.1 0 0.1 0.2 0.3 0.4 0.5 0.6 0.7 0.8 0.9 1
1 0.9 0.8 0.7 0.6 0.5 0.4 0.3 0.2 0.1 −0.1 −0.2 −0.3 −0.4 −0.5 −0.6 −0.7 −0.8 −0.9 −1

1.3 Prikproduktet

1.3.1 Definition og regneregler for prikproduktet

Vi skal i dette afsnit se nærmere på et vigtigt begreb, nemlig prikproduktet (også kaldet skalarproduktet)

Definition 1.3.1 (Prikprodukt)**.** Hvis $\vec{v} = \binom{v_1}{v_2}$ og $\vec{u} = \binom{u_1}{u_2}$, så defineres prikproduktet af $\vec{v}$ og $\vec{u}$ som:

$$\vec{v} \cdot \vec{u} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = v_1 u_1 + v_2 u_2.$$

Bemærkning 1.3.1. Man må *ikke* tænke på prikproduktet som en slags multiplikation af vektorer. Så skulle resultatet blive en vektor, men det gør det ikke! Resultatet af prikproduktet mellem to vektorer er et tal. I videregående matematik kaldes det for et *indre produkt*.

♢

Eksempel 1.3.1. Lad der være givet tre vektorer:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 10 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} t-1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Vi bestemmer prikprodukterne $\vec{a} \cdot \vec{b}$ og $\vec{c} \cdot \vec{a}$:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = (-1) \cdot (-2) + 10 \cdot 1 = 12$$

$$\vec{c} \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} t-1 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 10 \end{pmatrix} = (t-1) \cdot (-1) + 5 \cdot 10 = 51 - t$$

Vi anfører uden bevis følgende regneregler for prikproduktet:

Sætning 1.3.1. *For vektorer $\vec{a}, \vec{b}$ og $\vec{c}$ og $t \in \mathbb{R}$ gælder:*

1. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$
2. $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$
3. $(t\vec{a}) \cdot \vec{b} = t(\vec{a} \cdot \vec{b}) = \vec{a} \cdot (t\vec{b})$
4. $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$

Bemærkning 1.3.2. Regel 2 siger, at vi må *prikke ind i parentes* præcist på samme måde som vi ganger ind i parentes i de reelle tal. Bemærk dog, at der I almindelighed gælder $(\vec{a} \cdot \vec{b}) \cdot \vec{c} \neq \vec{a} \cdot (\vec{b} \cdot \vec{c})$.

$\diamond$

Vi kender kvadratsætningerne for de reelle tal. Disse findes også i en vektorudgave, som vi ser herunder.

De er primært af teoretisk interesse. Det vil være sjældent, at de kommer i brug i opgaver, men vi skal umiddelbart efter sætningen bruge en af kvadratsætningerne til at vise et meget vigtigt resultat om prikproduktet.

Sætning 1.3.2 (Kvadratsætningerne for vektorer). *For vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$ gælder:*

1. $|\vec{a}+\vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2\vec{a}\cdot\vec{b}$
2. $|\vec{a}-\vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2\vec{a}\cdot\vec{b}$
3. $(\vec{a}+\vec{b})(\vec{a}-\vec{b}) = |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2$

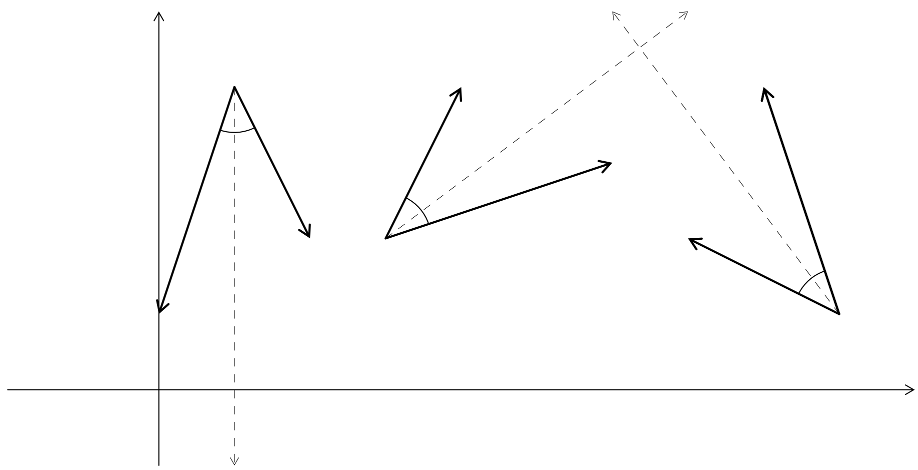
Bevis. For fuldstændighedens skyld beviser vi første kvadratsætning. De to andre kan vises ganske tilsvarende. Vi bruger regneregler fra Sætning 1.3.1 gentagne gange.

$$\begin{aligned} |\vec{a}+\vec{b}|^2 &= \left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{a}+\vec{b}\right) \\ &= \vec{a}\cdot\vec{a} + \vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{b}\cdot\vec{a} + \vec{b}\cdot\vec{b} \\ &= |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2\vec{a}\cdot\vec{b}, \end{aligned}$$

hvilket var det, vi skulle bevise. $\square$

Sætning 1.3.3. *Prikproduktet mellem to vektorer er uafhængigt af deres placering i koordinatsystemet, så længe vektorernes længder og mellemliggende vinkel ikke ændres.*

Bevis. Vi starter med at forklare, hvad sætningen faktisk betyder. Påstanden i sætningen lyder, at det eneste, der er afgørende for prikproduktets værdi, er længden af hver af vektorerne, samt vinklen mellem dem (her menes den vinkel der er mellem $0°$ og $180°$). Dette er illustreret nedenfor (de stiplede vektorer er alle summen af de to vektorer. De bruges i beviset):



Alle af ovenstående vektorpar vil have samme prikprodukt.

Nu til beviset, som er meget kort. Vi lader to vektorer være $\vec{a}$ og $\vec{b}$, og bruger nu første kvadratsætning for vektorer:

$$|\vec{a}+\vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2\vec{a}\cdot\vec{b}.$$

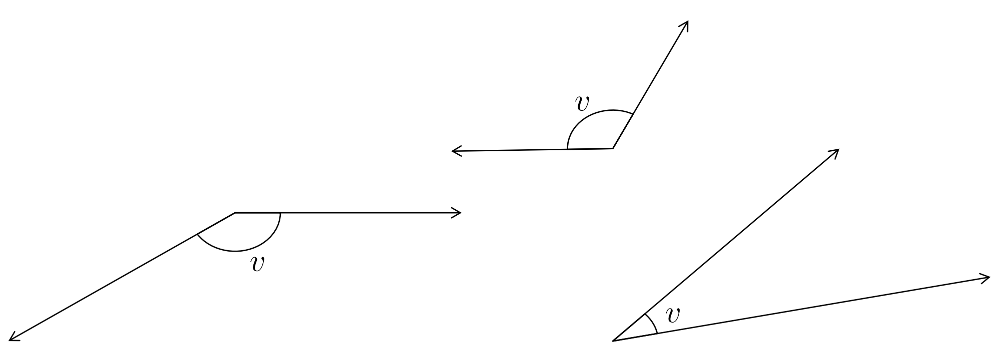
Heri isoleres $\vec{a}\cdot\vec{b}$:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \frac{|\vec{a}+\vec{b}|^2 - |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2}{2}.$$

Af dette udtryk kan det ses, at prikproduktet (venstresiden) kun afhænger af længder (højresiden består kun af længder). Vektorers længder er uafhængig af, hvordan de er orienteret i koordinatsystemet. Vi kan således konkludere, at to vektorers prikprodukt ikke afhænger af, hvordan vektorerne er orienteret i koordinatsystemet, men kun af deres længder og vinklen mellem dem (vinklen mellem dem afgør længden på $\vec{a}+\vec{b}$). □

1.3.2 Prikproduktet og vinkler mellem vektorer

Det kan være af interesse, at finde vinklen mellem vektorer. Når vi i dette afsnit taler om 'vinklen mellem vektorer', så menes den vinkel v, der ligger i intervallet [0°,180°], som det er illustreret herunder:

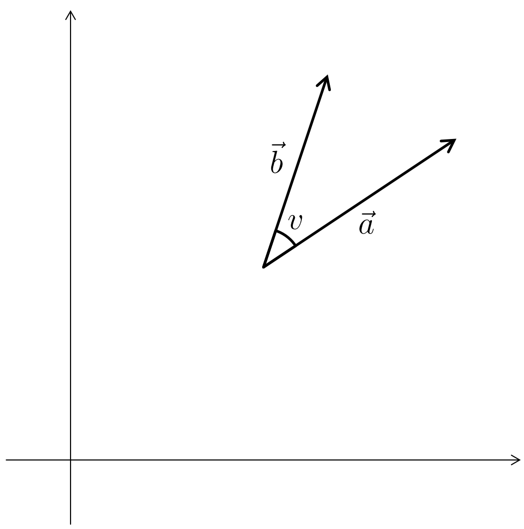


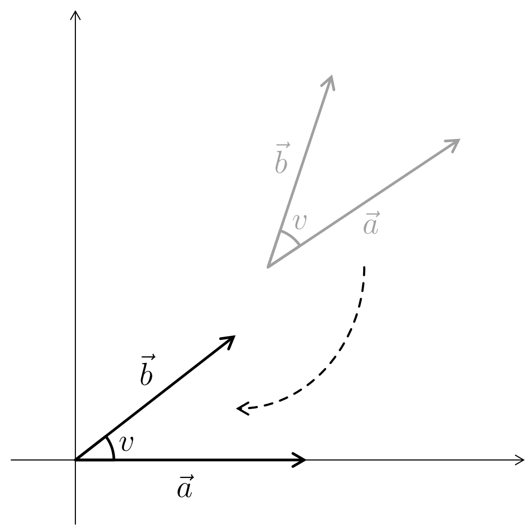
Vi skal i dette afsnit se, at man kan beregne vinklen mellem to vektorer ved hjælp af prikproduktet. Formlen for dette er indholdet af følgende sætning:

Sætning 1.3.4. *Vinklen mellem to egentlige vektorer, $\vec{a}$ og $\vec{b}$, kan beregnes ved følgende formel:*

$$\cos(v) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$

Bevis. Vi har to vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$, med vinklen v mellem dem. Da Sætning 1.3.3 siger at prikproduktet ikke afhænger af vektorernes placering i koordinatsystemet, kan vi flytte dem på en snedig måde:





Vi kan derfor bruge den polære notation for vektorer (se Definition 1.2.7) og skrive vektorerne således:

$$\vec{a} = |\vec{a}|\begin{pmatrix}\cos(0°)\\ \sin(0°)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}|\vec{a}|\\ 0\end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \vec{b} = |\vec{b}|\begin{pmatrix}\cos(v)\\ \sin(v)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}|\vec{b}|\cos(v)\\ |\vec{b}|\sin(v)\end{pmatrix}$$

Nu prikker vi $\vec{a}$ og $\vec{b}$ sammen:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix}|\vec{a}|\\ 0\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}|\vec{b}|\cos(v)\\ |\vec{b}|\sin(v)\end{pmatrix} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos(v) + 0 = |\vec{a}||\vec{b}|\cos(v)$$

hvori vi isolerer $\cos(v)$ (vi kan dividere med $|\vec{a}||\vec{b}|$, da ingen af vektorerne er nulvektoren):

$$\cos(v) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$

hvilket var formlen, der skulle vises. □

Et specielt interessant tilfælde, er når vinklen mellem to vektorer er 90°. Dette skal vi se lidt mere detaljeret på nu.

Definition 1.3.2 (Ortogonalitet)**.** Hvis $\vec{a},\vec{b} \in \mathbb{R}^2$, er to egentlige vektorer, så siger vi, at de er *ortogonale*, hvis vinklen mellem dem er 90°.
Vi skriver $\vec{a} \perp \vec{b}$.

Sætning 1.3.4 giver mulighed for at bevise en meget vigtig sammenhæng mellem ortogonalitet og prikproduktet.

Sætning 1.3.5. *For to egentlige vektorer, $\vec{a}$ og $\vec{b}$, gælder at:*

$$\vec{a} \perp \vec{b} \iff \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

Bevis. Beviset er en række af udsagn, der hver især er ækvivalente (overvej nøje hvorfor!). Vi lader v betegne vinklen mellem $\vec{a}$ og $\vec{b}$:

$$\begin{aligned} \vec{a} \perp \vec{b} &\iff v = 90^\circ \\ &\iff \cos(v) = 0 \\ &\iff \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = 0 \\ &\iff \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \end{aligned}$$

□

Vi kan desuden afgøre om vinklen mellem to vektorer er stump eller spids:

Sætning 1.3.6. *Hvis v er vinklen mellem to egentlige vektorer, $\vec{a}$ og $\vec{b}$, så gælder der, at:*

- $\vec{a} \cdot \vec{b} > 0^\circ \iff 0 \leq v < 90^\circ$
- $\vec{a} \cdot \vec{b} < 0 \iff 90^\circ < v \leq 180^\circ$

Bevis. Beviset er senere stillet som en opgave. □

Vi ser lige et par eksempler:

Eksempel 1.3.2. Afgør om vinklen mellem følgende vektorer er stump, ret eller spids

1. $\binom{-9}{5}$ og $\binom{2}{-3}$
2. $\binom{5}{2}$ og $\binom{4}{-10}$
3. $\binom{1}{2}$ og $\binom{-2}{3}$

Vi prikker vektorerne sammen, og afgør derved om vinklen mellem dem er stump, ret eller spids:

1)
$$\begin{pmatrix}-9\\5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}=(-9)\cdot 2+5\cdot(-3)=-18-15=-33,$$
altså er vinklen stump.

2)
$$\begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4\\-10\end{pmatrix}=5\cdot 4+2\cdot(-10)=20-20=0,$$
altså er vinklen ret, vektorerne er *ortogonale*.

3)
$$\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}=1\cdot(-2)+2\cdot 3=-2+6=4,$$
altså er vinklen spids.

Eksempel 1.3.3. Bestem t, så vektorerne $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er ortogonale, når
$$\vec{a}=\begin{pmatrix}2t\\6\end{pmatrix}\quad\text{og}\quad\vec{b}=\begin{pmatrix}-2\\t+1\end{pmatrix}.$$
Skal vektorerne være ortogonale, så skal deres prikprodukt være nul, så vi løser ligningen $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ for t:
$$\begin{aligned}\vec{a}\cdot\vec{b}=0 &\iff \begin{pmatrix}2t\\6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2\\t+1\end{pmatrix}=0\\ &\iff 2t\cdot(-2)+6\cdot(t+1)=0\\ &\iff -4t+6t+6=0\\ &\iff 2t=6\\ &\iff t=3\end{aligned}$$
Heraf kan vi altså se, at hvis $t=3$, så er vektorerne ortogonale.

1.3.3 Opgaver

Opgave 1 Beregn prikproduktet mellem $\vec{a}$ og $\vec{b}$, når:

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ og $\vec{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \end{pmatrix}$

b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ og $\vec{b} = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \end{pmatrix}$

c) $\vec{a} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -1 \end{pmatrix}$ og $\vec{b} = \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \end{pmatrix}$

d) $\vec{a} = \begin{pmatrix} \frac{11}{3} \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix}$ og $\vec{b} = \begin{pmatrix} \frac{3}{8} \\ \frac{5}{6} \end{pmatrix}$

Opgave 2 Givet tre vektorer, $\vec{a} = \binom{2}{-4}$, $\vec{b} = \binom{-3}{-6}$ og $\vec{c} = \binom{5}{-1}$. Beregn:

a) $\vec{a} \cdot \vec{b}$

b) $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c})$

c) $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{c})$

d) $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c}$

Opgave 3 Bestem t, så prikproduktet mellem vektorerne $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er nul, når:

a) $\vec{a} = \binom{3}{-2}$ og $\vec{b} = \binom{t}{6}$

b) $\vec{a} = \binom{t-3}{-1}$ og $\vec{b} = \binom{2}{6}$

c) $\vec{a} = \binom{3}{3+2t}$ og $\vec{b} = \binom{1}{-2}$

d) $\vec{a} = \binom{t}{-2}$ og $\vec{b} = \binom{t}{8}$

Opgave 4 Find vinklen mellem vektorerne $\vec{a}$ og $\vec{b}$, når:

a) $\vec{a} = \binom{3}{4}$ og $\vec{b} = \binom{-4}{1}$

b) $\vec{a} = \binom{-2}{1}$ og $\vec{b} = \binom{0}{1}$

c) $\vec{a} = \binom{-6}{4}$ og $\vec{b} = \binom{-2}{-3}$

d) $\vec{a} = \binom{-7}{3}$ og $\vec{b} = \binom{4}{1}$

Opgave 5 Bestem t, så vektorerne $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er ortogonale, når:

a) $\vec{a} = \binom{1}{8}$ og $\vec{b} = \binom{t}{3}$

b) $\vec{a} = \binom{t-1}{1}$ og $\vec{b} = \binom{2}{6}$

c) $\vec{a} = \binom{-1}{3+2t}$ og $\vec{b} = \binom{-1}{-3}$

d) $\vec{a} = \binom{t}{3}$ og $\vec{b} = \binom{t+4}{1}$

Opgave 6 Afgør, om vinklen mellem vektorerne $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er spids, ret eller stump, når:

a) $\vec{a} = \binom{21}{4}$ og $\vec{b} = \binom{-1}{4}$

b) $\vec{a} = \binom{-2}{1}$ og $\vec{b} = \binom{6}{14}$

c) $\vec{a} = \binom{-1}{4}$ og $\vec{b} = \binom{-4}{-3}$

d) $\vec{a} = \binom{-7}{3}$ og $\vec{b} = \binom{6}{14}$

Opgave 7 En trekants vinkelspidser ligger i punkterne $A(10{,}10)$, $B(-3,-8)$ og $C(-15{,}0)$.

Afgør om $\triangle ABC$ er spids–, ret– eller stumpvinklet.

Opgave 8 Vektorerne $\vec{a} = \binom{4}{8}$ og $\binom{5}{1}$ udspænder et parallelogram.

Bestem vinklerne i parallelogrammet.

Opgave 9 En trekant er udspændt af punkterne $A(1{,}1), B(8{,}2)$ og $C(4{,}10)$.

a) Bestem vektorerne $\overrightarrow{AB}$ og $\overrightarrow{AC}$.

b) Benyt formlen for vinkler mellem vektorer til at bestemme vinkel A.

c) Bestem vha. vektorregning længden af siden BC.

Opgave 10 En trekant er udspændt af punkterne $A(1{,}1), B(-3{,}2)$ og $C(7{,}6)$.

a) Bestem vektorerne $\overrightarrow{AB}$ og $\overrightarrow{AC}$.

b) Benyt formlen for vinkler mellem vektorer til at bestemme vinkel A.

c) Bestem vha. vektorregning længden af siden BC.

Opgave 11 Bevis regel 2) og 3) i Sætning 1.3.2.

Opgave 12 Bevis Sætning 1.3.6

Hint: Brug formlen fra Sætning 1.3.4

$$\cos(v) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$

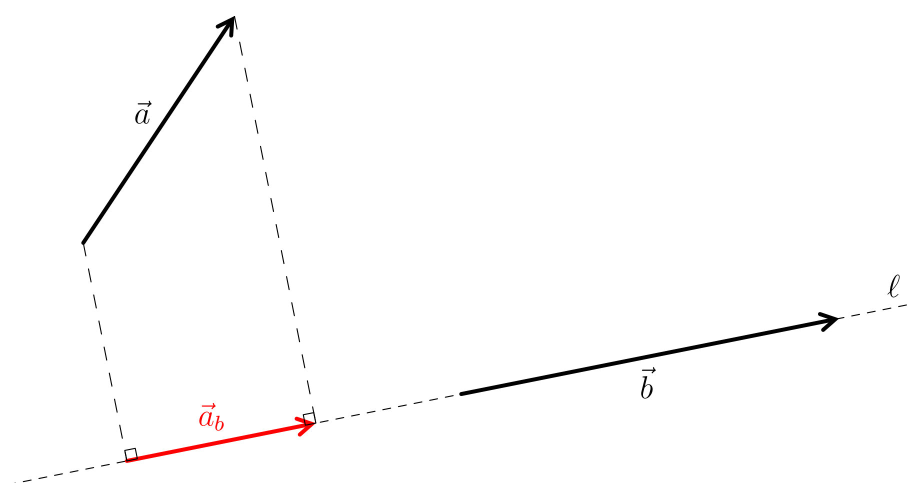
og brug din viden om fortegnet for $\cos(v)$ afhængigt af størrelsen på v. Husk desuden på at $|\vec{a}||\vec{b}| > 0$ *altid*.

1.4 Projektionsformlen

Vi skal i dette afsnit arbejde med et nyt begreb, nemlig *projektioner*. Det følgende kan have en tendens til at blive anelse teknisk, så vær omhyggelig med at bruge tegningerne som hjælp til at forstå begreberne.

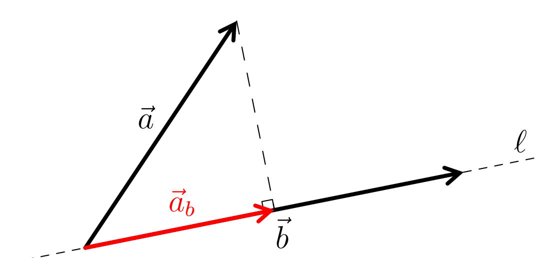
1.4.1 Definition af projektionen af en vektor på en vektor

Definition 1.4.1 (Projektion af vektor på vektor)**.** Hvis $\vec{a},\vec{b} \in \mathbb{R}^2$ er to egentlige vektorer og ℓ er linjen, der indeholder $\vec{b}$, så kaldes den vektor der fremkommer ved at nedfælde $\vec{a}$ vinkelret på linjen ℓ, for *projektionen af* $\vec{a}$ *på* $\vec{b}$. Vi skriver $\vec{a}_b$.

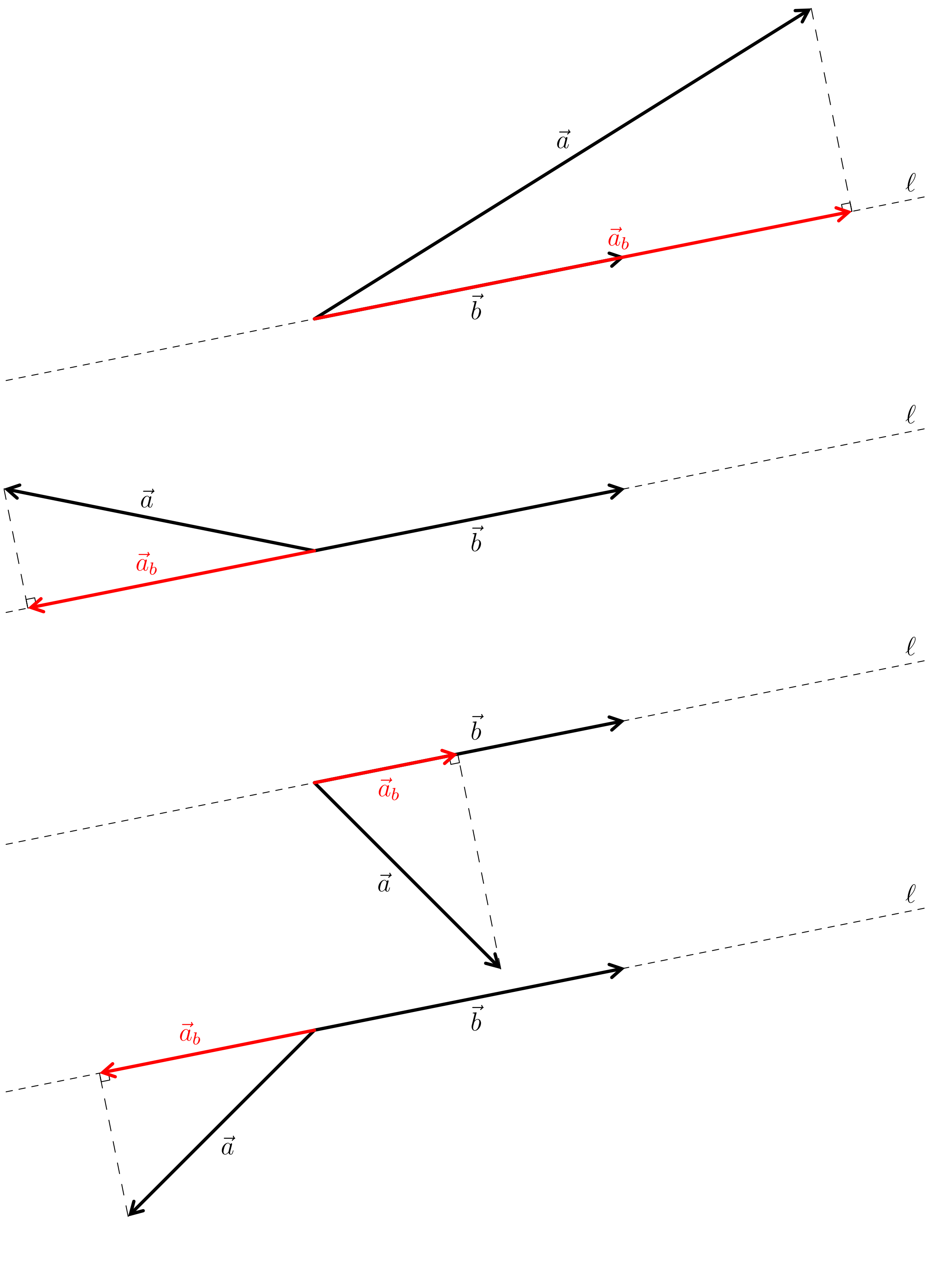


Man kan tænke på projektionen $\vec{a}_b$ som den skygge $\vec{a}$ kaster på linjen gennem $\vec{b}$, hvis der belyses vinkelret ned på denne linje.

Det kan være simplere (og smartere) at tegne projektioner, hvor alle vektorer så at sige "starter samme sted". Ovenstående situation er altså helt ækvivalent med nedenstående:



På denne måde er alle røde vektorer projektioner af $\vec{a}$ på $\vec{b}$:



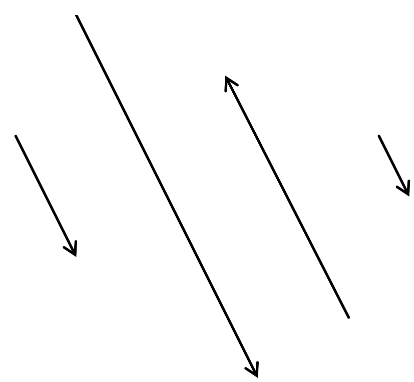
Figur 1.4: Alle de røde vektorer er projektioner af en vektor $\vec{a}$ på $\vec{b}$. Læs mærke til at det er retningen på $\vec{a}$, der afgør retningen på projektionen $\vec{a}_b$.

1.4.2 Projektionsformlen

Inden vi går videre, skal vi lige præcisere, hvad det vil sige, at to vektorer er parallelle.

Definition 1.4.2 (Parallelle vektorer)**.** To egentlige vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$ siges at være *parallelle*, hvis de enten har samme retning eller hvis de har modsat retning.
Vi skriver $\vec{a} \parallel \vec{b}$.

Alle vektorer herunder er parallelle:



Vi vil uden bevis postulere følgende sætning:

Sætning 1.4.1. *Hvis $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er to egentlige vektorer, så gælder det, at:*

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \iff \text{der findes et tal } t \in \mathbb{R}, \text{ så } \vec{a} = t\vec{b}.$$

Resultatet er ikke overraskende. Hvis to vektorer har samme retning, så må den ene jo naturligvis kunne ganges op til at blive den anden. Og hvis de er modsatrettede, så gælder det samme selvfølgelig, her bliver skalafaktoren bare negativ.

Vi er nu klar til at bevise projektionsformlen:

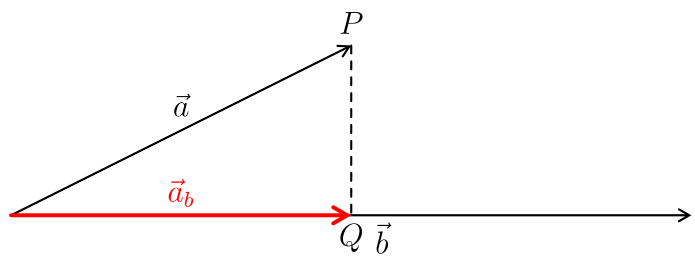
Sætning 1.4.2 (Projektionsformlen). *Hvis $\vec{a}$,$\vec{b}$ er vektorer, hvor $\vec{b} \neq \vec{o}$ så findes projektionen af $\vec{a}$ på $\vec{b}$ ved formlen:*

$$\vec{a}_b = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2}\,\vec{b}$$

Desuden gælder, at længden af projektionen er:

$$|\vec{a}_b| = \frac{|\vec{a} \cdot \vec{b}|}{|\vec{b}|}$$

Bevis. Vi tager udgangspunkt i følgende tegning af en projektion af $\vec{a}$ på $\vec{b}$:



Vi kalder som sædvanligt vektoren fra Q til P for $\overrightarrow{QP}$. Ifølge definitionen på vektoraddition gælder der, at

$$\vec{a} = \vec{a}_b + \overrightarrow{QP}.$$

Da $\vec{a}_b$ og $\vec{b}$ er parallelle, så findes et tal, t, så $\vec{a}_b = t\vec{b}$ (Sætning 1.4.1). Vi kan således skrive

$$\vec{a} = t\vec{b} + \overrightarrow{QP}.$$

Vi regner nu på prikproduktet $\vec{a} \cdot \vec{b}$:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (t\vec{b} + \overrightarrow{QP}) \cdot b = t\vec{b} \cdot \vec{b} + \overrightarrow{QP} \cdot \vec{b} = t|\vec{b}|^2 + 0 = t|\vec{b}|^2.$$

Heri isoleres t:

$$t = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|b|^2},$$

hvor vi således har bevist, at:

$$\vec{a}_b = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2}\,\vec{b}$$

Dette viser projektionsformlen. Nu mangler vi længden af projektionen. Bruger vi reglen $|t\vec{a}| = |t||\vec{a}|$ på ovenstående opnås:

$$|\vec{a}_b| = \left|\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2}\,\vec{b}\right| = \left|\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2}\right||\vec{b}| = \frac{|\vec{a} \cdot \vec{b}|}{|\vec{b}|}.$$

□

1.4.3 Opgaver

Opgave 1 I et koordinatsystem er følgende vektorer givet:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 7 \end{pmatrix}, \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \text{og} \qquad \vec{c} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

a) Bestem koordinatsættet til projektionen af $\vec{a}$ på $\vec{b}$.

b) Bestem koordinatsættet til projektionen af $\vec{b}$ på $\vec{c}$

c) Bestem koordinatsættet til projektionen af $\vec{a} - \vec{c}$ på $\vec{a}$.

Opgave 2 Der er givet to vektorer $\vec{a} = \binom{3}{1}$ og $\vec{b} = \binom{-2}{6}$.

a) Tegn vektorerne (i hånden).

b) Gør rede for at $\vec{a} \perp \vec{b}$.

c) Bestem projektionen af $\vec{a}$ på $\vec{b}$ (kan du gætte resultatet på forhånd?)

Opgave 3 Bestem, vha. længdeformlen for projektioner, længden af projektionen af $\vec{a}$ på $\vec{b}$. Bestem desuden koordinatsættet til både projektionen af $\vec{a}$ på $\vec{b}$ samt projektionen af $\vec{b}$ på $\vec{a}$. Tegn til slut alle vektorerne i hånden, når:

a)
$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ og } \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \end{pmatrix}$$

b)
$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ og } \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

c)
$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \end{pmatrix} \text{ og } \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

d)
$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ og } \vec{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

e)
$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ og } \vec{b} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix}$$

f)
$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ og } \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

g)
$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ og } \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

De næste to opgaver er mest for særligt interesserede. De åbner (en smule) op for noget af det, man vil se om vektorer i videregående matematik.

Opgave 4 Vi husker de to basisvektorer $\vec{i} = \binom{1}{0}$ og $\vec{j} = \binom{0}{1}$. Vi husker desuden, at vektorers koordinater er givet ud fra basisvektorerne $\vec{i}$ og $\vec{j}$, altså at der for en ubekendt vektor $\vec{v} = \binom{v_1}{v_2}$ gælder $\vec{v} = v_1\vec{i} + v_2\vec{j}$.

a) Vis, at projektionen af $\vec{v}$ på $\vec{i}$ er $v_1\vec{i}$ og at projektionen af $\vec{v}$ på $\vec{j}$ er $v_1\vec{j}$.

b) Forklar, at der derfor må gælde, at $\vec{v} = \vec{v}_i + \vec{v}_j$.

Opgave 4 fortæller, at vi kan skrive enhver vektor som en sum projektionerne af vektoren på basisvektorerne $\vec{i}$ og $\vec{j}$. Det vil vise sig i næste opgave, at hvis vi erstatter basisvektorerne $\vec{i}$ og $\vec{j}$ af to andre ortogonale vektorer, så kan vi gøre det samme.

Opgave 5

a) Lad nu to andre vektorer være givet ved $\vec{b}_1 = \binom{2}{1}$ og $\vec{b}_2 = \binom{-1}{2}$. Gør rede for at $\vec{b}_1 \perp \vec{b}_2$.

b) Find projektionen af $\vec{v} = \binom{5}{5}$ på $\vec{b}_1$ og $\vec{b}_2$.

c) Vis, at $\vec{v} = \vec{v}_{b_1} + \vec{v}_{b_2}$

d) Lad nu $\vec{v} = \binom{v_1}{v_2}$ være en ubekendt vektor. Vis, at $\vec{v}_{b_1} = \frac{2v_1+v_2}{5}\binom{2}{1}$ og $\vec{v}_{b_2} = \frac{2v_2-v_1}{5}\binom{-1}{2}$. Vis desuden, at $\vec{v} = \vec{v}_{b_1} + \vec{v}_{b_2}$.

e) Tallene $\frac{2v_1+v_2}{5}$ og $\frac{2v_2-v_1}{5}$ kaldes *koordinaterne med hensyn til basen* $\{\vec{b}_1,\vec{b}_2\}$. Lad nu $\vec{v} = \binom{-25}{5}$. Gør ved hjælp af ovenstående koordinater rede for, at $\vec{v} = -9\vec{b}_1 + 7\vec{b}_2$.

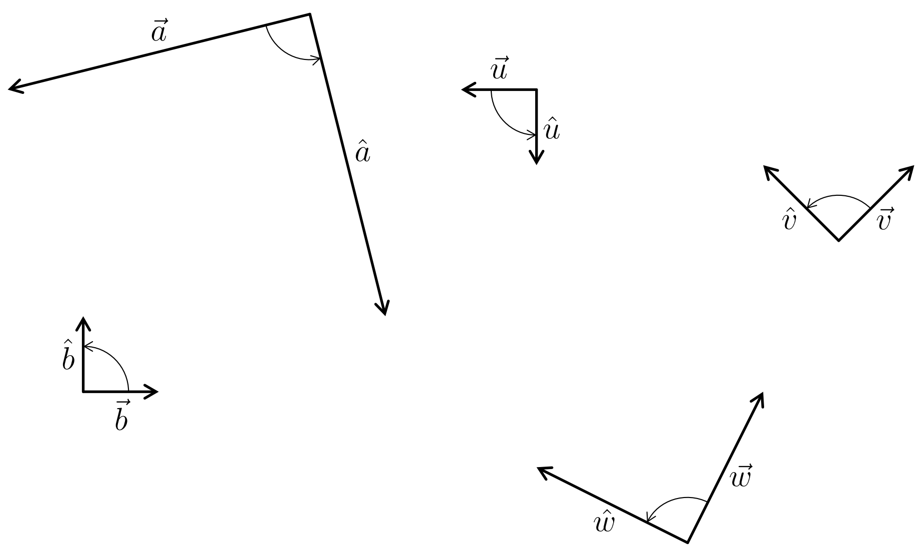
f) Lad $\vec{v} = \binom{33}{-16}$. Bestem x og y, når $\vec{v} = x\vec{b}_1 + y\vec{b}_2$

1.5 Determinant

1.5.1 Tværvektor

Definition 1.5.1 (Tværvektor)**.** Tværvektoren $\hat{a}$ til en egentlig vektor $\vec{a}$ er den vektor man opnår ved at dreje $\vec{a}$ 90° i positiv omløbsretning (mod uret).

Herunder ses en række vektorer og deres tværvektorer:



Det er klart at en vektor en dens tværvektor må have samme længde, altså at

$$|\vec{a}| = |\hat{a}|$$

Det viser sig at være dejligt let at finde koordinaterne til tværvektorer, hvilket følgende sætning viser:

Sætning 1.5.1. *Tværvektoren $\hat{a}$ til en egentlig vektor $\vec{a} = \binom{a_1}{a_2}$ findes ved:*

$$\hat{a} = \begin{pmatrix} -a_2 \\ a_1 \end{pmatrix}.$$

Bevis. Lad en egentlig vektor $\vec{a} = \binom{a_1}{a_2}$ være givet. Vi skriver denne på den polære form:

$$\vec{a} = |\vec{a}| \begin{pmatrix} \cos(v) \\ \sin(v) \end{pmatrix}.$$

Her er altså $a_1 = |\vec{a}|\cos(v)$ og $a_2 = |\vec{a}|\sin(v)$. Da tværvektoren er drejet 90° i positiv retning, men har samme længde, må der gælde, at

$$\hat{a} = |\vec{a}|\begin{pmatrix}\cos(v+90^\circ)\\ \sin(v+90^\circ)\end{pmatrix} = |\vec{a}|\begin{pmatrix}-\sin(v)\\ \cos(v)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-a_2\\ a_1\end{pmatrix}.$$

Hvilket var det der skulle vises. Vi brugte undervejs, at $\cos(v+90^\circ) = -\sin(v)$ og $\sin(v+90^\circ) = \cos(v)$ (se Sætning 1.2.1). □

1.5.2 Definition af determinant

Determinanten af et vektorpar defineres således:

Definition 1.5.2 (Determinant)**.** Hvis $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er to vektorer, så defineres *determinanten af* $\vec{a}$ *og* $\vec{b}$, ved:

$$\det(\vec{a},\vec{b}) = \hat{a} \cdot b$$

Vi kan se at for vektorerne $\vec{a} = \binom{a_1}{a_2}$ og $\vec{b} = \binom{b_1}{b_2}$, er

$$\det(\vec{a},\vec{b}) = \begin{pmatrix}-a_2\\ a_1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}b_1\\ b_2\end{pmatrix} = -a_2b_1 + a_1b_2 = a_1b_2 - a_2b_1$$

Det kan være smart at bruge en anden måde at skrive determinanten op:

$$\det(\vec{a},\vec{b}) = \begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1.$$

De lodrette streger i ovenstående er blot en anden skrivemåde for determinanten. Det kan være praktisk at skrive determinanten op på denne måde, da man så kan udregne den ved at følge den lille røde sløjfe, der ses herunder:

$$\det(\vec{a},\vec{b}) = \begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1$$

Eksempel 1.5.1. Vi beregner determinanten af $\vec{v} = \binom{2}{9}$ og $\vec{u} = \binom{-6}{4}$:

$$\det(\vec{v},\vec{u}) = \begin{vmatrix}2 & -6\\ 9 & 4\end{vmatrix} = 2 \cdot 4 - 9 \cdot (-6) = 8 + 54 = 62.$$

Vi prøver også at udregne $\det(\vec{u},\vec{v})$:

$$\det(\vec{u},\vec{v}) = \begin{vmatrix}-6 & 2\\ 4 & 9\end{vmatrix} = -6 \cdot 9 - 4 \cdot 2 = -54 - 8 = -62.$$

Vi kan se, at $\det(\vec{v},\vec{u}) = -\det(\vec{u},\vec{v})$. Vi skal senere vise, at dette gælder generelt.

1.5.3 Grundlæggende egenskaber ved determinanten

Følgende sætning angiver nogle af de grundlæggende egenskaber ved determinanten.

Sætning 1.5.2. *Hvis $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er to vektorer, hvor w er den vinkel, der går* ***fra*** *$\vec{a}$* ***til*** *$\vec{b}$ (regnet med fortegn), så gælder:*

1. $\det(\vec{a},\vec{b}) = -\det(\vec{b},\vec{a})$
2. $\det(\vec{a},\vec{b}) = |\vec{a}||\vec{b}|\sin(w)$
3. $\det(\vec{a},\vec{b}) = 0 \iff \vec{a} \parallel \vec{b}$

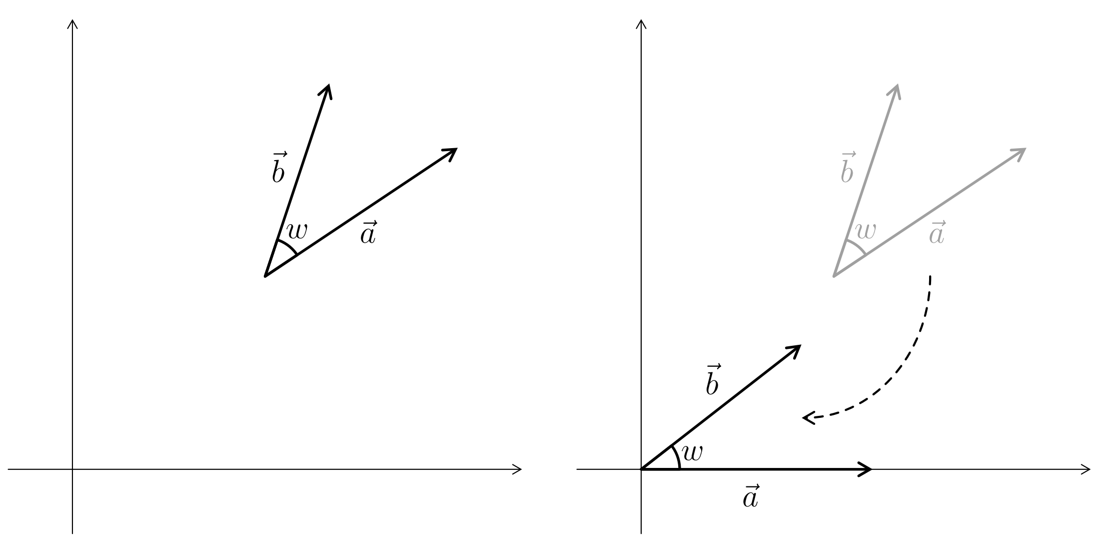
Bevis. Lad $\vec{a} = \binom{a_1}{a_2}$ og $\vec{b} = \binom{b_1}{b_2}$.

Del 1) bevises let ved at udregne højre– og venstresiden og se at de er ens:

$$\det(\vec{a},\vec{b}) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1.$$
$$-\det(\vec{b},\vec{a}) = -\begin{vmatrix} b_1 & a_1 \\ b_2 & a_2 \end{vmatrix} = -(b_1a_2 - b_2a_1) = a_1b_2 - a_2b_1.$$

For at bevise del 2) skal vi være lidt mere snedige. Vi laver et lille trick, som vi har set før i beviset for Sætning 1.3.4.

Da determinanten af $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er defineret som *prikproduktet* mellem $\hat{a}$ og $\vec{b}$, og da Sætning 1.3.3 siger, at prikprodukter er uafhængige af vektorernes placering i koordinatsystemet, kan vi flytte vektorerne på en snu facon:



Vi kan desuden bruge den polære notation for vektorer (se Definition 1.2.7) og skrive vektorerne således:

$$\vec{a} = |\vec{a}|\begin{pmatrix}\cos(0^\circ)\\ \sin(0^\circ)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}|\vec{a}|\\ 0\end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \vec{b} = |\vec{b}|\begin{pmatrix}\cos(w)\\ \sin(w)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}|\vec{b}|\cos(w)\\ |\vec{b}|\sin(w)\end{pmatrix}$$

Vi kan nu finde determinanten:

$$\det(\vec{a},\vec{b}) = \begin{vmatrix}|\vec{a}| & |\vec{b}|\cos(w)\\ 0 & |\vec{b}|\sin(w)\end{vmatrix} = |\vec{a}||\vec{b}|\sin(w) + 0 = |\vec{a}||\vec{b}|\sin(w),$$

hvilket var det der skulle vises.

Beviset for del 3) er en række biimplikationer:

$$\begin{aligned}\det(\vec{a},\vec{b}) = 0 &\iff \hat{a}\cdot\vec{b} = 0\\ &\iff \hat{a}\perp\vec{b}\\ &\iff \vec{a}\parallel\vec{b}\end{aligned}$$

□

Det er især værd at bemærke regel 3), der giver en mulighed for at tjekke om vektorer er parallelle, ligesom prikproduktet giver mulighed for at tjekke ortogonalitet.

Eksempel 1.5.2. Vi bestemmer t, så vektorerne $\vec{a} = \binom{2t}{4}$ og $\vec{b} = \binom{2+t}{1}$ er parallelle.

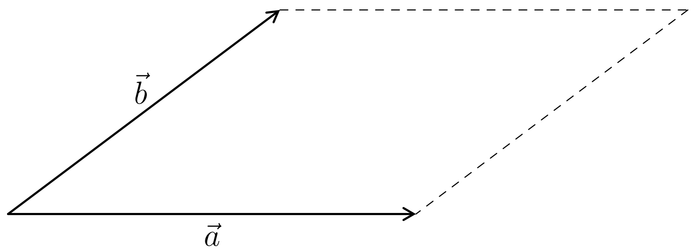
Hvis vektorerne skal være parallelle, skal deres determinant være nul. Vi løser derfor ligningen $\det(\vec{a},\vec{b}) = 0$ for t.

$$\begin{aligned}\det(\vec{a},\vec{b}) = 0 &\iff \begin{vmatrix}2t & 2+t\\ 4 & 1\end{vmatrix} = 0\\ &\iff 2t\cdot 1 - 4\cdot(2+t) = 0\\ &\iff 2t - 8 - 4t = 0\\ &\iff -2t = 8\\ &\iff t = -4\end{aligned}$$

Vi kan derfor konkludere, at $\vec{a}\parallel\vec{b}$ når $t = -4$.

1.5.4 Determinanter og arealer

Som vi har omtalt tidligere, så udspænder to (egentlige) vektorer altid et parallelogram:

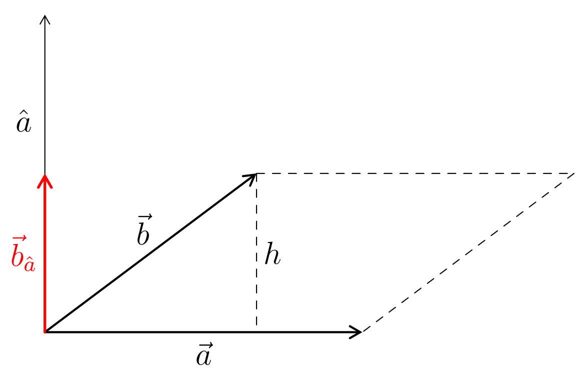


Der gælder følgende sætning:

Sætning 1.5.3. *Hvis $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er egentlige vektorer, så er arealet af det parallelogram som vektorerne udspænder givet ved*

$$A_{parallelogram} = \left|\det(\vec{a},\vec{b})\right|.$$

Bevis. Udgangspunktet er en udvidelse af ovenstående tegning:



Vi ved på forhånd at arealet af parallelogrammet er højden gange grundlinjen:

$$A_{\text{parallelogram}} = h \cdot g$$

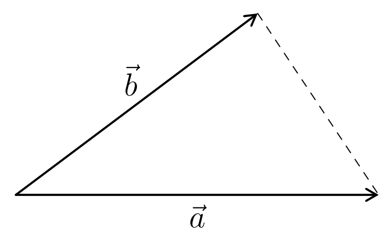
Her er $\left|\vec{b}_{\hat{a}}\right| = h$ og $|\vec{a}| = g$, og dermed giver længdeformlen for projektioner (Sætning 1.4.2, at

$$A_{\text{parallelogram}} = |\vec{b}_{\hat{a}}||\vec{a}| = \frac{|\vec{b}\cdot\hat{a}|}{|\hat{a}|}|\vec{a}| = \left|\hat{a}\cdot\vec{b}\right| = \left|\det(\vec{a},\vec{b})\right|,$$

hvilket var det der skulle vises. Vi brugte undervejs længdeformlen ved andet lighedstegn, og at $|\hat{a}|$ går ud med $|\vec{a}|$ i tredje lighedstegn, da $|\hat{a}| = |\vec{a}|$, samt til slut definitionen på determinanten.

□

Af denne sætning fremgår det nu umiddelbart, at arealet af trekanten udspændt af to vektorer, er givet ved halvdelen af den numeriske værdi af determinanten, idet trekantens areal er præcist halvdelen af parallelogrammets:



Sætning 1.5.4. *Hvis $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er egentlige vektorer, så er arealet af den trekant som vektorerne udspænder givet ved*

$$A_{trekant} = \frac{1}{2}\left|\det(\vec{a},\vec{b})\right| .$$

1.5.5 Determinanter og ligningssystemer

Vi skal i dette afsnit se, hvordan man kan bruge determinanten til at løse to (lineære) ligninger med to ubekendte, altså er ligningssystem som f.eks.:

$$\begin{aligned} 3x + 2y &= 10 \\ -x + 4y &= 6 \end{aligned}$$

Mere generelt kan vi skrive:

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y &= c_1 \\ a_2x + b_2y &= c_2 \end{aligned}$$

eller på vektorform:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} y = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

og endnu mere kompakt:

$$\vec{a}x + \vec{b}y = \vec{c}$$

Vi kan løse ligningssystemer med *substitutionsmetoden* eller *lige store koefficienters metode*, men følgende sætning giver også løsningen. Vi kan kalde metoden, for *determinantmetoden*:

Sætning 1.5.5. *Lad* $\vec{a} = \binom{a_1}{a_2}, \vec{b} = \binom{b_1}{b_2}$ *og* $\vec{c} = \binom{c_1}{c_2}$*. Hvis* $\det(\vec{a},\vec{b}) \neq 0$*, så har ligningssystemet*

$$a_1 x + b_1 y = c_1$$
$$a_2 x + b_2 y = c_2$$

løsningen

$$x = \frac{\det(\vec{c},\vec{b})}{\det(\vec{a},\vec{b})} \quad og \quad y = \frac{\det(\vec{a},\vec{c})}{\det(\vec{a},\vec{b})}$$

Bevis. Vi skriver ligningssystemet på den kompakte vektorform:

$$\vec{a}x + \vec{b}y = \vec{c}$$

Heri isoleres først x

$$\begin{aligned}
\vec{a}x + \vec{b}y = \vec{c} \;&\Rightarrow\; \hat{b} \cdot \vec{a}x + \hat{b}\vec{b}y = \hat{b}\vec{c} \\
&\Leftrightarrow\; \det(\vec{b},\vec{a})x + 0 = \det(\vec{b},\vec{c}) \\
&\Leftrightarrow\; x = \frac{\det(\vec{b},\vec{c})}{\det(\vec{b},\vec{a})} \\
&\Leftrightarrow\; x = \frac{-\det(\vec{c},\vec{b})}{-\det(\vec{a},\vec{b})} \\
&\Leftrightarrow\; x = \frac{\det(\vec{c},\vec{b})}{\det(\vec{a},\vec{b})}
\end{aligned}$$

Vi brugte undervejs, at $\hat{b} \cdot \vec{b} = 0$, da $\hat{b} \perp \vec{b}$, samt definitionen på determinanter (Definition 1.5.2). Desuden brugte vi til sidst, at $\det(\vec{a},\vec{b}) = -\det(\vec{b},\vec{a})$ (Sætning 1.5.2).

På tilsvarende måde isoleres y:

$$\begin{aligned}
\vec{a}x + \vec{b}y = \vec{c} \;&\Rightarrow\; \hat{a} \cdot \vec{a}x + \hat{a}\vec{b}y = \hat{a}\vec{c} \\
&\Leftrightarrow\; 0 + \det(\vec{a},\vec{b})y = \det(\vec{a},\vec{c}) \\
&\Leftrightarrow\; y = \frac{\det(\vec{a},\vec{c})}{\det(\vec{a},\vec{b})}
\end{aligned}$$

Dette viser, at *hvis* ligningssystemet $\vec{a}x + \vec{b}y = \vec{c}$ har en løsning, *så* er løsningen på ovenstående form (når $\det(\vec{a},\vec{b}) \neq 0$). Vi mangler da at vise, at de fundne udtryk for x og y faktisk *er* en løsning. Dette kan gøres ved indsættelse og udregning med koordinater, men det gør vi ikke her (se opgaveafsnittet). $\square$

Bemærkning 1.5.1. Ovenstående sætning udtaler sig kun om det tilfælde, hvor $\vec{a} \nparallel \vec{b}$, hvilket betyder, at ligningssystemet har netop én løsning. Hvis $\vec{a} \parallel \vec{b}$, så kan ligningssystemet enten have uendeligt mange løsninger, eller også har ligningssystemet ingen løsninger.

$\diamondsuit$

Bemærkning 1.5.2 (For specielt interesserede)**.** Ud over muligheden for at løse et lineært ligningssystem med to variable, så giver sætningen også opskriften på at skrive enhver vektor som sum af to givne ikke-parallelle vektorer. Det vil altså sige, at man f.eks. i stedet for at vælge de to standard basisvektorer $\vec{i}$ og $\vec{j}$, så kan vi vælge to helt andre ikke-parallelle vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$, og bruge dem som basisvektorer. Man kan også indføre vektorkoordinater med hensyn til de to nye basisvektorer; det bliver så tallene x og y.

$\diamondsuit$

Lad os slutte med et eksempel på løsning af to ligninger med to ubekendte:

Eksempel 1.5.3. Vi løser ligningssystemet

$$\begin{aligned} -3x + 2y &= 7 \\ 4x - 2y &= -6 \end{aligned}$$

Her er $\vec{a} = \binom{-3}{4}$, $\vec{b} = \binom{2}{-2}$ og $\vec{c} = \binom{7}{-6}$. Vi udregner først $\det(\vec{a}, \vec{b})$:

$$\det(\vec{a},\vec{b}) = \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = -3 \cdot (-2) - 4 \cdot 2 = 6 - 8 = -2$$

Determinanten er ikke nul, så der ér en løsning. Vi udregner de to resterende determinanter:

$$\det(\vec{a},\vec{c}) = \begin{vmatrix} -3 & 7 \\ 4 & -6 \end{vmatrix} = -3 \cdot (-6) - 4 \cdot 7 = 18 - 28 = -10$$

$$\det(\vec{c},\vec{b}) = \begin{vmatrix} 7 & 2 \\ -6 & -2 \end{vmatrix} = 7 \cdot (-2) - (-6) \cdot 2 = -14 + 12 = -2$$

Løsningerne er da:

$$x = \frac{\det(\vec{c},\vec{b})}{\det(\vec{a},\vec{b})} = \frac{-2}{-2} = 1 \quad \text{og} \quad y = \frac{\det(\vec{a},\vec{c})}{\det(\vec{a},\vec{b})} = \frac{-10}{-2} = 5.$$

1.5.6 Opgaver

Opgave 1 Bestem tværvektoren, $\hat{a}$, til vektoren $\vec{a}$:

a) $\vec{a} = \binom{3}{4}$ b) $\vec{a} = \binom{0}{1}$ c) $\vec{a} = \binom{1}{0}$

d) $\vec{a} = \binom{-10}{2}$ e) $\vec{a} = \binom{-5}{-8}$ f) $\vec{a} = \binom{-3}{9}$

Opgave 2 Bestem determinanten af $\vec{a}$ og $\vec{b}$, når

a) $\vec{a} = \binom{3}{4}$ og $\vec{b} = \binom{-5}{7}$ b) $\vec{a} = \binom{0}{1}$ og $\vec{b} = \binom{10}{-6}$

c) $\vec{a} = \binom{1}{0}$ og $\vec{b} = \binom{-5}{-2}$ d) $\vec{a} = \binom{-10}{2}$ og $\vec{b} = \binom{-1}{1}$

e) $\vec{a} = \binom{-5}{-8}$ og $\vec{b} = \binom{2}{2}$ f) $\vec{a} = \binom{-3}{9}$ og $\vec{b} = \binom{1}{-3}$

Opgave 3 Bestem t, så vektorerne $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er parallelle, når:

a) $\vec{a} = \binom{4-t}{3}$ og $\vec{b} = \binom{t}{1}$ b) $\vec{a} = \binom{t-1}{t}$ og $\vec{b} = \binom{10}{2}$

c) $\vec{a} = \binom{7}{3t}$ og $\vec{b} = \binom{1}{6}$ d) $\vec{a} = \binom{t}{t+1}$ og $\vec{b} = \binom{10}{5}$

e) $\vec{a} = \binom{t}{2}$ og $\vec{b} = \binom{2}{t}$ f) $\vec{a} = \binom{2t-1}{1}$ og $\vec{b} = \binom{2(t^2-4)}{t}$

Opgave 4 Lad to vektorer være givet ved:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} t \\ t+4 \end{pmatrix}$$

a) Bestem t, så $\vec{a} \parallel \vec{b}$.

b) Bestem for $t = 4$ arealet af parallelogrammet udspændt af $\vec{a}$ og $\vec{b}$.

c) Bestem de værdier af t, hvorom det gælder, at arealet af trekanten udspændt af $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er 1.

Opgave 5 En trekant har sine vinkelspidser i punkterne $A(1,1)$, $B(8,3)$ og $C(6,7)$.

a) Bestem arealet af trekanten.

b) Et andet punkt $D(5,y)$ ligger på linjen $x = 5$. Bestem y, så arealet af $\triangle ABD$ er dobbelt så stort som arealet af $\triangle ABC$.

Opgave 6 Om en trekant ABC gælder, at $A = 40^\circ$, $b = 10$ og $c = 5$.

a) Tegn trekanten i et passende koordinatsystem.

b) Beregn arealet af trekanten.

Opgave 7 Løs følgende ligningssystemer med determinantmetoden:

a)

$$\begin{aligned} 2x - 4y &= -8 \\ -3x + 5y &= 9 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} x - y &= -7 \\ 2x + 2y &= -6 \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} -10x - 3y &= 9 \\ -x + 2y &= 17 \end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned} -x - y &= -3 \\ -4x + y &= 12 \end{aligned}$$

e)

$$\begin{aligned} 6x - 3y &= -4 \\ -x + 4y &= 3 \end{aligned}$$

Opgave 8 Lad $\vec{a} = \binom{-1}{3}$, $\vec{b} = \binom{4}{1}$ og $\vec{c} = \binom{13}{-13}$.

a) Find x og y, så $\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}$.

b) Samme spørgsmål, men med $\vec{c} = \binom{1}{0}$ og $\vec{c} = \binom{0}{1}$.

Opgave 9 (Bevis for anden del af Sætning 1.5.5) Lad $\vec{a} = \binom{a_1}{a_2}$, $\vec{b} = \binom{b_1}{b_2}$ og $\vec{c} = \binom{c_1}{c_2}$ være givet. Vis ved indsættelse, at tallene

$$x = \frac{\det(\vec{c},\vec{b})}{\det(\vec{a},\vec{b})} \quad \text{og} \quad y = \frac{\det(\vec{a},\vec{c})}{\det(\vec{a},\vec{b})}$$

er løsninger til ligningsystemet

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y &= c_1 \\ a_2x + b_2y &= c_2 \end{aligned}$$

Kapitel 2

Linjer og cirkler

I dette kapitel skal vi udnytte vores kendskab til vektorer til at udvikle (udvide) teorien om rette linjer, og indføre teori om et andet vigtigt geometrisk objekt, nemlig cirkler.

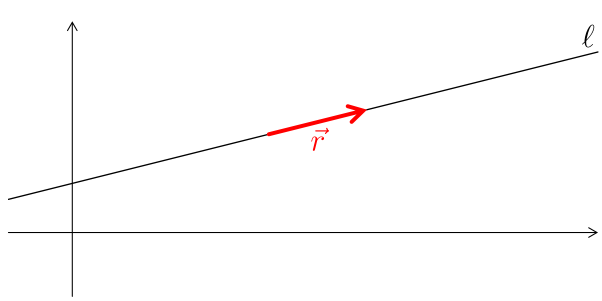
2.1 Linjer og vektorer

2.1.1 Linjens parameterfremstilling

Indtil nu har vi beskrevet rette linjer som grafer for lineære funktioner. Dette har sine fordele, men også ulemper. F.eks. er lodrette linjer ikke mulige grafer for lineære funktioner. Med vektorværktøjskassen på plads kan vi udvide mulighederne for at beskrive rette linjer.

Først skal vi se på linjens parameterfremstilling. Hertil defineres først et vigtigt begreb, nemlig retningsvektoren for en linje:

Definition 2.1.1 (Retningsvektor)**.** Hvis ℓ er en ret linje i planen, så kaldes enhver vektor, $\vec{r}$, der er parallel med ℓ, for en *retningsvektor* for ℓ.

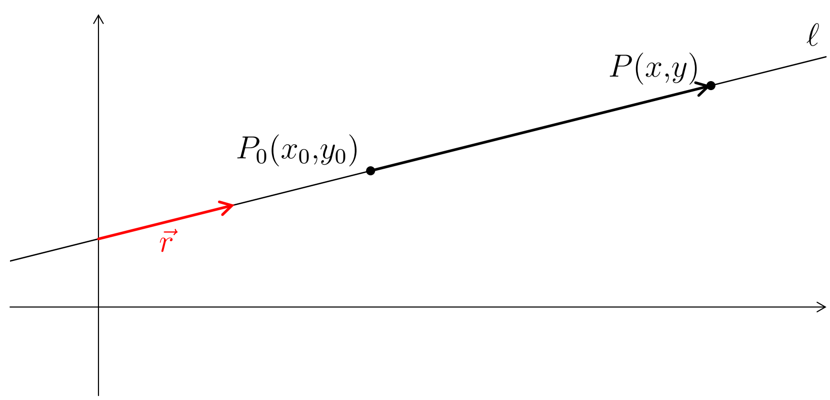


Sætning 2.1.1 (Linjens parameterfremstilling). *Hvis ℓ er en ret linje i planen, $\vec{r} = \binom{r_1}{r_2}$ er en retningsvektor for ℓ og $P_0(x_0,y_0)$ er et punkt på ℓ, så gælder der, at et punkt, $P(x,y)$, ligger på ℓ, præcis når der findes et $t \in \mathbb{R}$, så*

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}.$$

Ovenstående kaldes for parameterfremstillingen *for ℓ.*

Bevis. Vi tager udgangspunkt i følgende situation, hvor en linje ℓ er givet, og hvor $\vec{r} = \binom{r_1}{r_2}$ er en retningsvektor for ℓ og $P_0(x_0,y_0)$ er et (fast) punkt på ℓ, mens $P(x,y)$ er et variabelt punkt (der kan ligge hvor som helst, men her er tegnet på ℓ).



Når $\overrightarrow{P_0P} = \binom{x-x_0}{y-y_0}$ betegner vektoren fra P_0 til P, så gælder der, at:

$$\begin{aligned} P(x,y) \text{ ligger på } \ell &\iff \overrightarrow{P_0P} \parallel \vec{r} \\ &\iff \text{der findes et } t \in \mathbb{R}, \text{ så } \overrightarrow{P_0P} = t\vec{r} \\ &\iff \text{der findes et } t \in \mathbb{R}, \text{ så } \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} \\ &\iff \text{der findes et } t \in \mathbb{R}, \text{ så } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

hvilket var det, der skulle bevises. □

Bemærkning 2.1.1. Vi har hermed bevist, at stedvektoren for ethvert punkt, $P(x,y)$, på en linje, ℓ, kan beskrives ved:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}.$$

for et $t \in \mathbb{R}$. Samt omvendt, at enhver vektor beskrevet ved ovenstående parameterfremstilling er stedvektor for et punkt på linjen ℓ.

◊

Skal man bestemme en linjes parameterfremstilling, så har man altså brug for at kende:

- et punkt på linjen.
- en retningsvektor.

Dette ser vi et eksempel på her:

Eksempel 2.1.1. En linje går gennem punkterne (2,16) og $(13,-12)$. Vi bestemmer en parameterfremstilling for linjen.

Vi kender allerede et punkt (faktisk to) på linjen, så vi mangler kun en retningsvektor. Denne findes lettest som vektoren fra det ene punkt til det andet:

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} 13-2 \\ -12-16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ -28 \end{pmatrix}$$

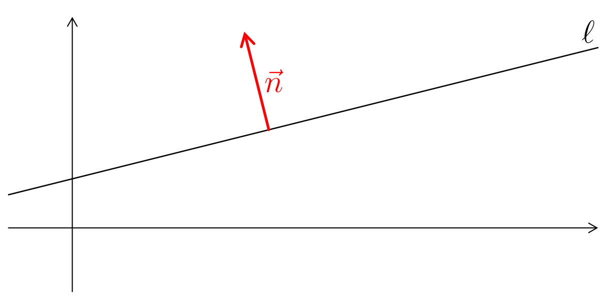
og dermed er en parameterfremstilling for linjen:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 16 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 11 \\ -28 \end{pmatrix}.$$

2.1.2 Linjens ligning

Vi starter med at definere endnu et vigtigt begreb:

Definition 2.1.2 (Normalvektor)**.** Hvis ℓ er en ret linje i planen, så kaldes enhver vektor, $\vec{n}$, der står vinkelret på ℓ, for en *normalvektor* for ℓ.



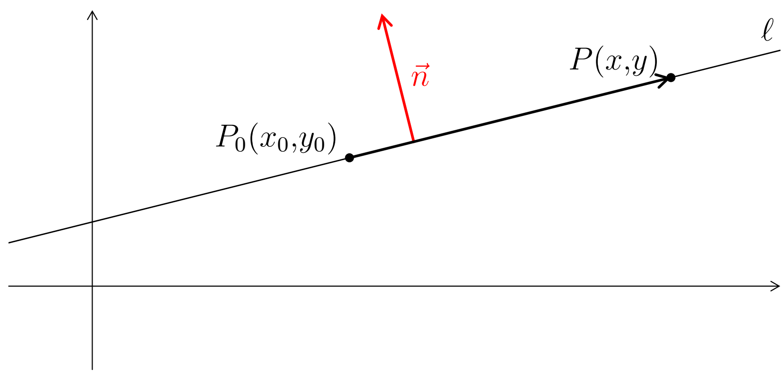
Normalvektoren kan bruges til endnu en beskrivelse af en ret linje, nemlig linjens ligning:

Sætning 2.1.2 (Linjens ligning). *Hvis ℓ er en ret linje i planen, $\vec{n} = \binom{a}{b}$ er en normalvektor for ℓ og $P_0(x_0,y_0)$ er et punkt på ℓ, så gælder der, at et punkt $P(x,y)$ ligger på ℓ præcist når $P(x,y)$ opfylder ligningen:*

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0.$$

Man kalder dette for linjens ligning.

Bevis. Vi lader en ret linje ℓ være givet. Desuden lader vi $\vec{n} = \binom{a}{b}$ være en normalvektor for ℓ ligesom vi lader $P_0(x_0,y_0)$ være et fast punkt på linjen, mens $P(x,y)$ er et variabelt punkt.



Når $\overrightarrow{P_0P} = \binom{x-x_0}{y-y_0}$ betegner vektoren fra P_0 til P, så gælder, der at:

$$\begin{aligned} P \text{ ligger på } \ell \iff & \overrightarrow{P_0P} \perp \vec{n} \\ \iff & \overrightarrow{P_0P} \cdot \vec{n} = 0 \\ \iff & \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0 \\ \iff & a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0, \end{aligned}$$

hvilket var det, der skulle vises. □

Linjens ligning på formen

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$$

har den fordel, at man direkte kan aflæse både en normalvektor og et punkt for linjen. Dermed kan man også direkte konstruere linjens ligning, hvis man kender

- et punkt på linjen.
- en normalvektor for linjen.

Bemærkning 2.1.2. Omskrivningen

$$\begin{aligned} a(x-x_0)+b(y-y_0) &= ax-ax_0+by-by_0 \\ &= ax+by+(-ax_0-by_0) \\ &= ax+by+c, \end{aligned}$$

hvor $c=-ax_0-by_0$, viser at linjens ligning også kan skrives på formen

$$ax+by+c=0,$$

hvor det kun er muligt at aflæse normalvektoren direkte. Begge udgaver af linjens ligning er almindelige.

$\diamondsuit$

Eksempel 2.1.2. Vi bestemmer en ligning for linjen fra eksempel 2.1.1, der havde en parameterfremstilling på formen:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 16 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 11 \\ -28 \end{pmatrix}.$$

Vi kender allerede et punkt på linjen: (2,16). Vi skal finde en normalvektor. Dette gøres let, da en normalvektor altid vil stå vinkelret på en retningsvektor, så vi kan bruge tværvektoren til retningsvektoren som normalvektor:

$$\vec{n}=\hat{r}=\begin{pmatrix} 28 \\ 11 \end{pmatrix}$$

Dermed er linjens ligning:

$$28(x-2)+11(y-16)=0$$

eller skrevet på den anden måde:

$$28x+11y-232=0.$$

Bemærk, at tallet -232 *ikke* kan fortolkes som skæring med y-aksen.

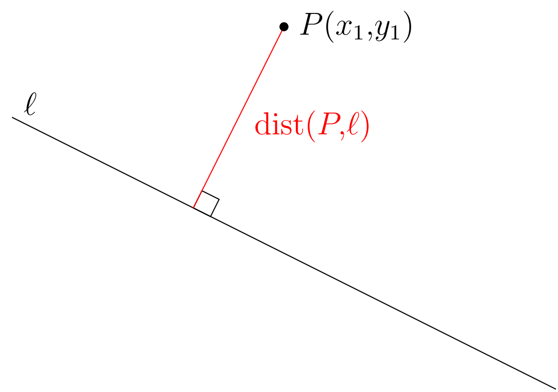
$\diamondsuit$

2.1.3 Afstand mellem punkt og linje

Vi ser nu på en linje, ℓ, i planen med normalvektoren $\vec{n}=\binom{a}{b}$ og ligningen $ax+by+c=0$, samt et punkt $P(x_1,y_1)$.

Vi ønsker at finde en formel, der angiver afstanden fra punktet P til linjen ℓ.

Definition 2.1.3 (Afstand mellem punkt og linje)**.** Hvis ℓ er en ret linje og $P(x_1,y_1)$ er et punkt i planen, så defineres *afstanden mellem P og ℓ*, som den korteste afstand mellem P og ℓ. Vi skriver $\text{dist}(P,\ell)$.

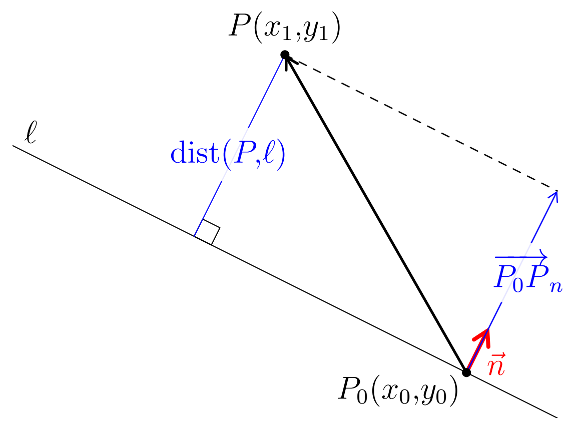


Følgende sætning giver formel for denne afstand:

Sætning 2.1.3 (Dist-formlen)**.** *Hvis ℓ er en ret linje med ligningen $ax+by+c=0$ og $P(x_1,y_1)$ er et punkt i planen, så er afstanden mellem P og ℓ givet ved:*

$$\text{dist}(P,\ell) = \frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Bevis. Vi lader linjen $\ell : ax+by+c=0$ med normalvektor $\vec{n} = \binom{a}{b}$ og punktet $P(x_1,y_1)$ være givet. Desuden lader vi $P_0(x_0,y_0)$ være et punkt på ℓ.



Vi tegner vektoren $\overrightarrow{P_0P} = \binom{x_1-x_0}{y_1-y_0}$ og projektionsvektoren af $\overrightarrow{P_0P}$ på $\vec{n}$: $\overrightarrow{P_0P}_n$.

Da gælder det, at afstanden fra P til ℓ netop er længden af projektionen af $\overrightarrow{P_0P}$ på normalvektoren $\vec{n}$:

$$\text{dist}(P,\ell) = \left|\overrightarrow{P_0P}_n\right|$$

Vi bruger længdeformlen for projektioner (Sætning 1.4.2: $|\vec{a}_b| = \frac{|\vec{a}\cdot\vec{b}|}{|\vec{b}|}$) til at opnå:

$$\begin{aligned}
\text{dist}(P,\ell) &= \left|\overrightarrow{P_0P}_n\right| \\
&= \frac{\left|\overrightarrow{P_0P}\cdot\vec{n}\right|}{|\vec{n}|} \\
&= \frac{\left|\binom{x_1-x_0}{y_1-y_0}\cdot\binom{a}{b}\right|}{\sqrt{a^2+b^2}} \\
&= \frac{|(x_1-x_0)a+(y_1-y_0)b|}{\sqrt{a^2+b^2}} \\
&= \frac{|ax_1+by_1-ax_0-by_0|}{\sqrt{a^2+b^2}}.
\end{aligned}$$

Da $P(x_0,y_0)$ er et punkt på linjen ℓ, så kan vi indsætte punktets koordinater i linjens ligning og få:

$$ax_0+by_0+c=0 \iff c=-ax_0-by_0$$

som kan indsættes i ovenstående udtryk for dist(P,ℓ), så vi får:

$$\text{dist}(P,\ell) = \frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

hvilket præcist var, hvad der skulle bevises.

□

Eksempel 2.1.3. Vi finder afstanden mellem linjen givet ved ligningen

$$\ell : 3x-4y+10=0$$

og punktet $P(2,-6)$. Vi bruger formlen:

$$\begin{aligned}
\text{dist}(P,\ell) &= \frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}} \\
&= \frac{|3\cdot 2-4\cdot(-6)+10|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}} \\
&= \frac{|6+24+10|}{\sqrt{9+16}} \\
&= \frac{40}{5} \\
&= 8
\end{aligned}$$

Så afstanden mellem P og ℓ er altså 8.

◇

2.1.4 Nogle opgaveløsningsstrategier

I og med at vi har to mulige beskrivelser af linjer, er der tre mulige kombinationer, vi skal kunne finde skæringspunkter for:

- To linjer givet ved parameterfremstillinger.
- To linjer givet ved linjens ligning.
- En linje givet ved en parameterfermstilling og en linje givet ved linjens ligning.

Fremgangsmåden for hver af de tre situationer forklares herunder:

Skæring mellem to linjer givet ved parameterfremstillinger:

Vi forklarer fremgangsmåden via et eksempel. Givet linjerne m og n med parameterfremstillingerne s

$$m: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad n: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Når linjerne skærer hinanden der findes både $s \in \mathbb{R}$ og $t \in \mathbb{R}$, så begge parameterfremstillinger giver samme resultat. Der skal dermed for et bestem s og et bestemt t gælde, at

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Opgaven går nu ud på at finde s eller t. Bemærk, at dette svarer til at løse ligningssystemet

$$\begin{aligned} 3 - 2s &= -1 + 4t \\ 1 + 5s &= -3 - 3t \end{aligned}$$

Dette ligningssystem kan løses på mange måder (her i blandt med `solve` i Nspire), og det vil vi ikke uddybe her. Resultatet er $s = -2$ og $t = 2$.

Der mangles blot nu at finde skæringspunktet, og dette gøres ved at indsætte s i parameterfremstillingen for m eller t i parameterfremstillingen for n (resultatet er det samme). Vi indsætter $s = -2$ i m:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ -10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -9 \end{pmatrix}$$

Skæringspunktet er altså $(7, -9)$.

Skæring mellem to linjer givet ved linjens ligning:

Givet linjerne m og n (det er samme linjer som i forrige afsnit) med ligningerne

$$m : -5x - 2y + 17 = 0 \quad \text{og} \quad n : 3x + 4y + 15 = 0$$

Når linjerne skærer hinanden, findes et x og et y, som opfylder begge ligninger. Vi skal finde disse værdier.

Bemærk, at dette svarer til at løse ligningssystemet

$$\begin{aligned} -5x - 2y &= -17 \\ 3x + 4y &= -15 \end{aligned}$$

Dette ligningssystem kan (igen) løses på mange måder (også med `solve` i Nspire). Resultatet er $x = 7$ og $y = -9$, hvilket stemmer overens med forrige afsnit.

Skæringspunktet er altså $(7, -9)$.

Skæring mellem en linje givet ved en parameterfremstilling og en linje givet ved en ligning:

Givet linjen m med parameterfremstillingen:

$$m : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

og n med ligningen:

$$n : 3x + 4y + 15 = 0$$

Vi finder det s, der får x og y fra m til at opfylde ligningen for n. Dette gøres lettest ved at indsætte udtryk for x og y fra m i n:

$$\begin{aligned} x &= 3 - 2s \\ y &= 1 + 5s \end{aligned}$$

indsættes i $3x + 4y + 15 = 0$:

$$3(3 - 2s) + 4(1 + 5s) + 15 = 0$$

Heri isoleres s (det springer vi over). Gør man dette opnår vi $s = -2$.

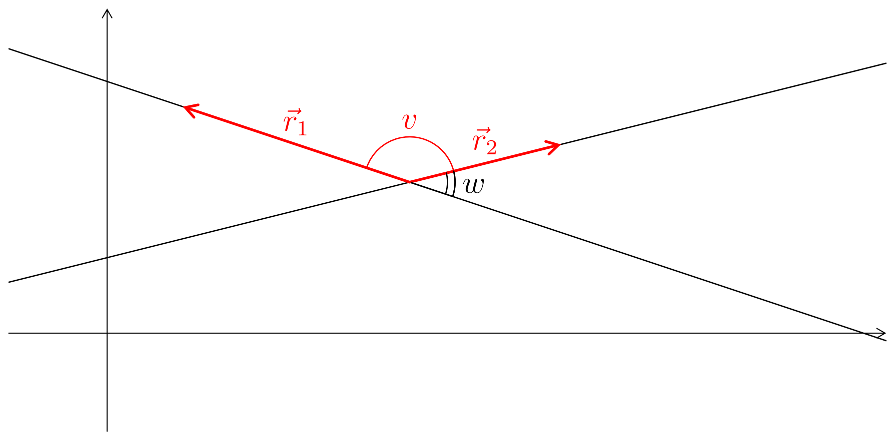
Der mangles blot nu at finde skæringspunktet. Dette gøres ved at indsætte $s = -2$ i m:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ -10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -9 \end{pmatrix}$$

Skæringspunktet er altså $(7, -9)$.

Vinkler mellem linjer

Skal man finde vinkler mellem linjer beskrevet ved enten deres parameterfremstilling eller ligning, kan det være meget smart at bruge linjernes retnings– eller normalvektorer.



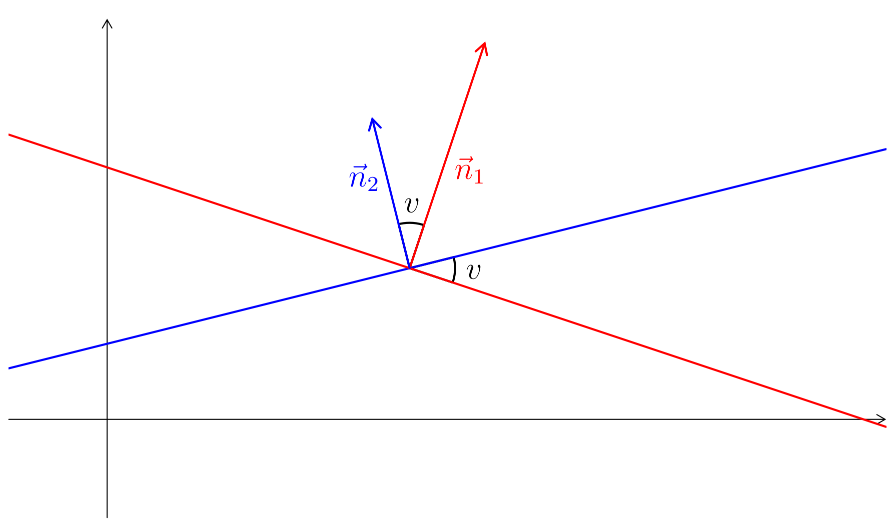
Skal man finde vinklen mellem to linjer er der altid to (og med mindre linjerne er vinkelrette, er den ene spids og den anden stump). Hvis v og w er de to vinkler, så gælder der altid, at

$$v + w = 180°$$

så man kan altid finde den ene, hvis man kender den anden.

Som det er illustreret på tegningen ovenfor, så kan man altid finde den ene vinkel (i dette tilfælde den stumpe), ved at finde vinklen mellem retningsvektorerne (se Sætning 1.3.4).

Hvis man kender normalvektorerne er situationen præcist den samme. Den ene vinkel (i dette tilfælde den spidse) mellem linjerne er præcist den samme som vinklen mellem linjernes normalvektorer:



2.1.5 Opgaver

Opgave 1 En linje går gennem $(-1{,}1)$ og $(8{,}3)$.

a) Bestem linjens parameterfremstilling.

b) Bestem linjens ligning.

Opgave 2 Tegn, i hånden, linjen med parameterfremstillingen

a)
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

b)
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

c)
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Opgave 3 Bestem et punkt, der ligger på linjen, og tegn derefter linjen i hånden, når linjens ligning er

a)
$$2x - 5y + 10 = 0$$

b)
$$-x + 10y + 5 = 0$$

c)
$$2x + 4y + 8 = 0$$

Opgave 4 Bestem afstanden mellem linjen med ligningen $3x - y + 9 = 0$ og punkterne:

a) $P(0{,}0)$

b) $P(5{,}5)$

c) $P(-1{,}6)$

Opgave 5 Givet linjerne med ligningerne $2x - y + 1 = 0$ og $6x - 3y - 10 = 0$.

a) Gør rede for at linjerne er parallelle.

b) Bestem afstanden mellem linjerne

Opgave 6 I et koordinatsystem i planen er givet en vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ og et punkt $P(3{,}8)$. Bestem en ligning for den linje l, der går gennem P og er parallel med $\vec{a}$.

Opgave 7 En linje har ligningen

$$3x - 5y + 1 = 0$$

Bestem en normalvektor for linjen.

Opgave 8 To linjer har parameterfremstillingerne

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Bestem den spidse vinkel mellem linjerne.

Opgave 9 To linjer har ligningerne

$$3x - 5y + 1 = 0 \quad \text{og} \quad -2x - 4y - 2 = 0$$

Bestem den spidse vinkel mellem linjerne.

Opgave 10 En linje har parameterfremstillingen

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Bestem en ligning for linjen.

Opgave 11 En linje har ligningen

$$2x + 3y - 4 = 0.$$

Bestem en parameterfremstilling for linjen.

Opgave 12 Bestem skæringspunktet mellem linjerne med parameterfremstillingerne

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Opgave 13 Bestem skæringspunktet mellem linjerne med ligningerne

$$5x - 2y + 1 = 0 \quad \text{og} \quad -2x + 2y + 8 = 0.$$

Opgave 14 Bestem skæringspunktet mellem linjen med ligningen

$$2x - y + 16 = 0$$

og linjen med parameterfremstillingen

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Opgave 15 En linje er givet ved ligningen $3x - 2y + 10 = 0$.

a) Bestem den spidse vinkel linjen danner med x-aksen.

b) Bestem skæringspunktet mellem linjen og y-aksen.

Opgave 16 En linje er givet ved parameterfremstillingen

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

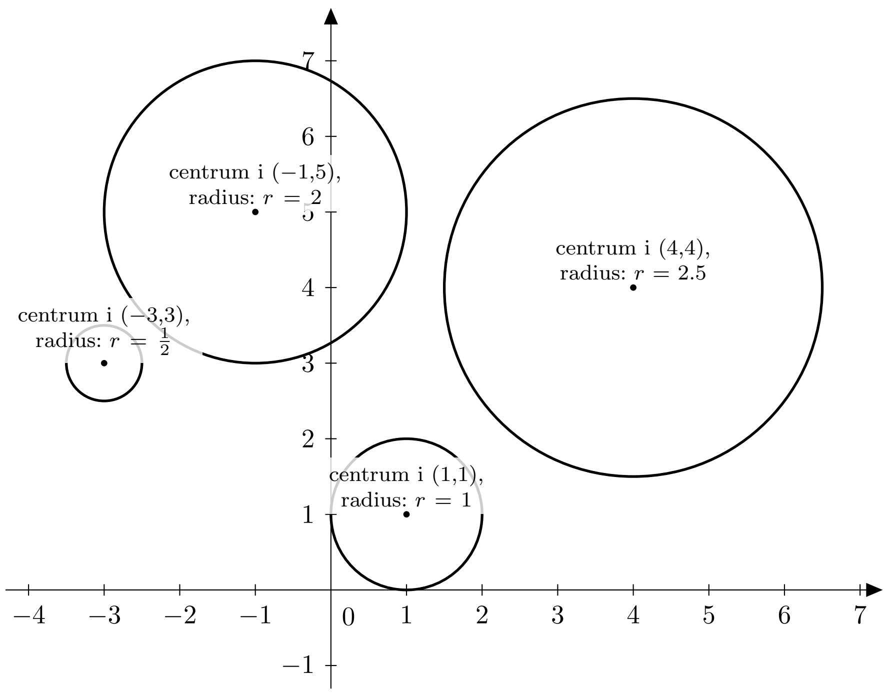
a) Bestem den spidse vinkel linjen danner med y-aksen.

b) Bestem skæringspunktet mellem linjen og x-aksen.

2.2 Vektorer og cirkler

2.2.1 Cirklens ligning

I dette afsnit udleder vi cirklens ligning. Vi ved at cirkler er bestemt ved deres centrum og radius:



Vi er interesserede i at finde en anden beskrivelse, der giver mulighed for at afgøre om et givent punkt ligger på cirklen eller ej.

Dertil bemærkes det, at punkterne på en cirkel, $\mathcal{C}$, med centrum i $C(x_0,y_0)$ og radius r, er karakteriseret ved følgende

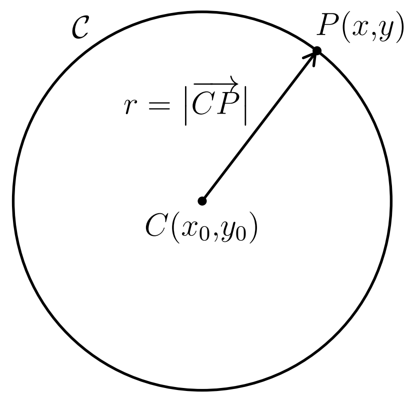
$$P(x,y) \text{ ligger på } \mathcal{C} \iff \text{dist}(C,P) = r.$$

Dette er udgangspunktet for beviset for følgende sætning:

Sætning 2.2.1 (Cirklens ligning)**.** *Et punkt $P(x,y)$ ligger på en cirkel med radius r og centrum (x_0,y_0), netop hvis punktet opfylder* cirklens ligning*:*

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

Bevis. Vi er givet en cirkel $\mathcal{C}$ med radius r og centrum $C(x_0,y_0)$. Vi lader $P(x,y)$ være et vilkårligt punkt (herunder tegnet på cirklen).



Da $\overrightarrow{CP} = \binom{x-x_0}{y-y_0}$, gælder der nu, da $r > 0$, at:

$$\begin{aligned} P(x,y) \text{ ligger på } \mathcal{C} &\iff \operatorname{dist}(C,P) = r \\ &\iff |\overrightarrow{CP}| = r \\ &\iff \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} = r \\ &\iff (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = r^2, \end{aligned}$$

hvilket var det vi skulle bevise. □

Givet centrum og radius for en cirkel, er det således let at opskrive ligningen for cirklen:

Eksempel 2.2.1. Vi bestemmer ligningen for cirklen med centrum i $(-2,7)$ og radius $r = 11$. Dette er hurtigt gjort ved indsættelse i cirklens ligning:

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = r^2$$

Vi får:

$$(x-(-2))^2 + (y-7)^2 = 11^2$$

hvilket giver

$$(x+2)^2 + (y-7)^2 = 11^2$$

Nogen gange vælger man at gange alting ud. Gør vi det, så får vi:

$$x^2 + 4x + 4 + y^2 + 49 - 14y = 121$$

som reduceres til

$$x^2 + y^2 + 4x - 14y - 68 = 0,$$

som altså er en anden måde at skrive cirklens ligning på.

◊

Ofte kan det også være opgaven at finde en cirkels centrum og radius, givet cirklens ligning. Dette er en interessant opgave, som kræver en lille smule snilde. Vi minder lige om de to første kvadratsætninger, der er meget anvendelige i denne sammenhæng:

1. $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
2. $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

Eksempel 2.2.2. Vi bestemmer centrum og radius for cirklen med ligningen

$$x^2 + y^2 - 12x + 2y = -1.$$

Det første vi bemærker, er, at vi *ikke* kan aflæse noget direkte. Vi skal omskrive ligningen til formen

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2.$$

Vi starter med at samle led med x og led med y:

$$x^2 - 12x + y^2 + 2y = -1.$$

Vi bemærker, at leddene $-12x$ og $2y$ svarer til de dobbelte produkter, der kommer fra kvadratsætningerne. Vi skal altså bruge parenteserne:

$$\begin{aligned}(x-6)^2 &= x^2 - 12x + 36\\ (y+1)^2 &= y^2 + 2y + 1\end{aligned}$$

hvor vi kan se at

$$\begin{aligned}x^2 - 12x &= (x-6)^2 - 36\\ y^2 + 2y &= (y+1)^2 - 1\end{aligned}$$

Dette indsættes i cirklens ligning:

$$(x-6)^2 - 36 + (y+1)^2 - 1 = -1$$

hvilket reduceres til (når farverne droppes):

$$(x-6)^2 + (y+1)^2 = 36$$

hvoraf det ses, at centrum er $(6, -1)$ og radius er 6.

$\diamondsuit$

2.2.2 Nogle opgaveløsningsstrategier

Skæring mellem linje og cirkel:

Uanset om linjen er beskrevet ved en parameterfremstilling eller en ligning, så findes skæringspunkter ved ligningsløsning.

Vi ser først på skæringspunkter mellem en *linje beskrevet ved en ligning og en cirkel*.

Eksempel 2.2.3. En linje er givet ved ligningen $x + y - 3 = 0$ og en cirkel er givet ved ligningen $x^2 + y^2 - 2y - 3 = 0$. Skæringspunkter findes ved at løse to ligninger med to ubekendte. Vi kan gøre det i hånden ved at isolere f.eks. y i linjens ligning og indsætte i cirklens:

$$x^2 + (-x + 3)^2 - 2(-x + 3) - 3 = 0$$

Dette giver (tjek selv mellemregninger!):

$$x^2 + x^2 + 9 - 6x + 2x - 6 - 3 = 0$$

Dette reduceres

$$2x^2 - 4x = 0$$

Denne ligning løses (gør det!), og man får $x = 0$ og $x = 2$. Dette er altså x-koordinaterne til skæringspunkterne. y-koordinaterne findes ved f.eks. at indsættes x-værdierne i linjens ligning og beregne y. For $x = 0$ giver dette $y = -0 + 3 = 3$ og for $x = 2$ giver det $y = -2 + 3 = 1$, altså er skæringspunkterne (0,3) og (2,1).

Dette kunne selvfølgelig klares hurtigt i Nspire:

$$\text{solve}\left(x+y-3=0 \text{ and } x^2+y^2-2\cdot y-3=0,x,y\right) \blacktriangleright x=0 \text{ and } y=3 \text{ or } x=2 \text{ and } y=1$$

◇

Nu ser på skæringspunkter mellem en linje beskrevet ved *en parameterfremstilling og en cirkel*.

Eksempel 2.2.4. Vi bruger samme linje og cirkel, $x^2+y^2-2y-3 = 0$, som ovenfor. En Parameterfremstilling for linjen er

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Udtrykkene for $x = 4 + t$ og $y = -1 - t$ fra parameterfremstillingen indsættes i cirklens ligning, der løses for t:

$$(4 + t)^2 + (-1 - t)^2 - 2(-1 - t) - 3 = 0$$

hvilket reduceret giver (lav mellemregningerne!)

$$2t^2 + 12t + 16 = 0$$

Løsningerne (tjek selv efter) til denne ligning er $t = -2$ og $t = -4$, som indsættes i parameterfremstillingen for at finde stedvektorerne for skæringspunkterne:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} - 4 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Konklusionen er som før, at skæringspunkterne er (2,1) og (0,3).

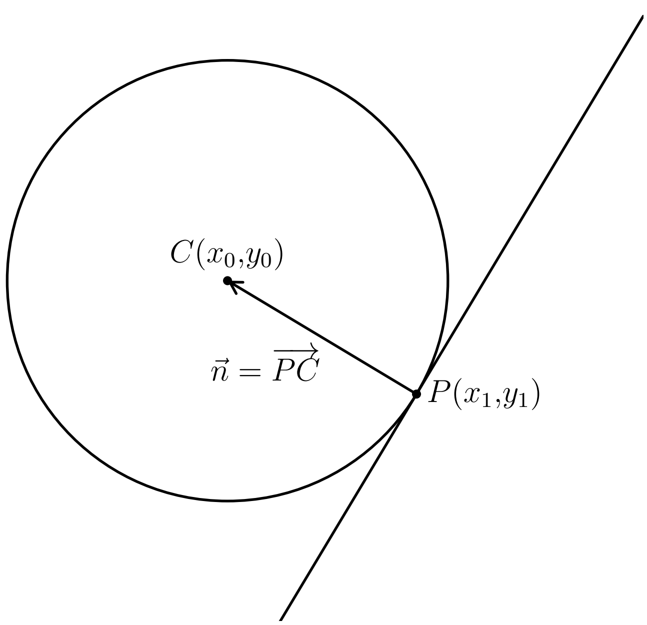
Dette kunne vi igen have gjort i Nspire:

solve$\left(x=4+t \text{ and } y=^-1-t \text{ and } x^2+y^2-2\cdot y-3=0,t,x,y\right)$
▸ $t=^-4$ and $x=0$ and $y=3$ or $t=^-2$ and $x=2$ and $y=1$

♢

Bestem en ligning for en tangent til en cirkel

Givet en cirkelligning, $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$ (er ciklens ligning på en anden form, så skal den omskrives til denne form) og et punkt $P(x_1,y_1)$, der ligger på cirklen, så kan ligningen for tangenten til cirklen i punktet P findes ved at danne en normalvektor til denne linje som vektoren fra P til cirklens centrum C, altså $\vec{n} = \overrightarrow{PC} = \binom{x_0-x_1}{y_0-y_1}$. Denne indsættes sammen med punktet P i linjens ligning, og dermed har man en tangentligning.



Vi laver et eksempel.

Eksempel 2.2.5. Givet en cirkelligning $(x-3)^2+(y+7)^2 = 25$, og et punkt $P(-1,-4)$. Vi skal bestemme en ligning for tangenten til cirklen i punktet P. Med mindre det eksplicit står i opgaven, at P ligger på cirklen, så bør man starte med at tjekke dette. Vi indsætter derfor koordinaterne fra P i cirkelligningen og ser om den går op:

$$(-1-3)^2+(-4+7)^2=(-4)^2+3^2=16+9=25.$$

Vi kan se at resultatet passer, så P ligger på cirklen.

Vi skal nu lave tangentens ligning. Dertil skal vi bruge punktet $P(-1,-4)$ og en normalvektor. Da vektoren fra P til cirklens centrum $C(3,-7)$ (aflæses direkte af cirkelligningen) står vinkelret på tangenten, bruger vi denne som normalvektor:

$$\vec{n}=\overrightarrow{PC}=\begin{pmatrix}3-(-1)\\-7-(-4)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix}$$

Nu indsættes $P(-1,-4)$ og $\vec{n}=\binom{4}{-3}$ i linjens ligning

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)=0$$

hvilket giver

$$4\big(x-(-1)\big)-3\big(y-(-4)\big)=0 \iff 4x-3y-8=0,$$

hvilket altså er en ligning for tangenten til cirklen i punktet P.

$\diamondsuit$

Bemærkning 2.2.1. Bliver man bedt om at finde en parameterfremstilling for tangenten, så er fremgangsmåden helt den samme, man skal blot bruge en retningsvektor, som findes som tværvektoren for normalvektoren:

$$\vec{r}=\hat{n}=\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$$

I ovenstående tilfælde er en parameterfremstilling så

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-4\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$$

$\diamondsuit$

Afgør om en linje er en tangent

Hvis vi har givet en linje og en cirkel, begge beskrevet ved ligninger, så kan vi bruges formlen for afstand mellem punkt og linje til at afgøre om linjen er en tangent.

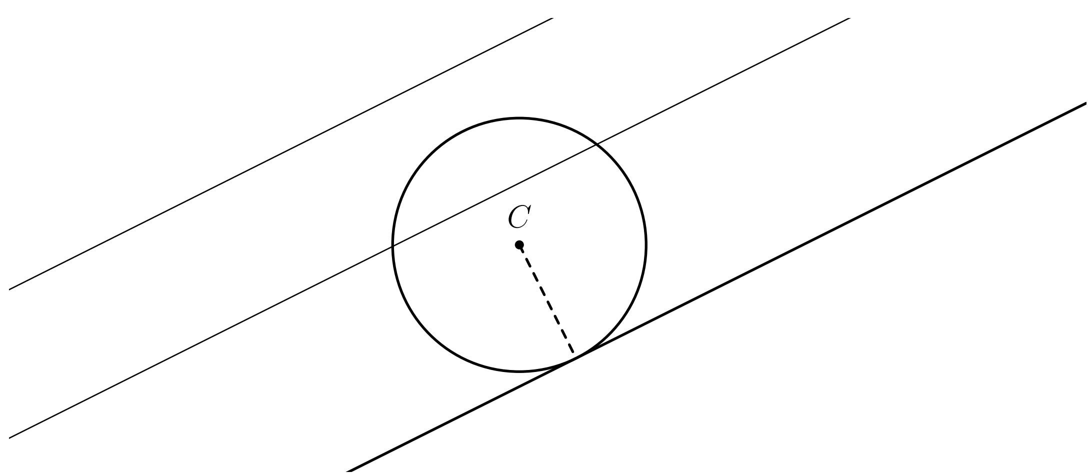
Metoden med formlen for afstand mellem punkt og linje.

1. Aflæs centrum og radius for cirklen (hvis cirklens ligning ikke er på den rette form, så må man omskrive den først). Aflæs også normalvekoren $\vec{n} = \binom{a}{b}$ for linjen.
2. Bestem afstanden mellem cirklen centrum og linjen ved formlen
$$\text{dist}(C,\ell) = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$
3. Hvis afstanden mellem centrum og linjen er præcist det samme som radius, så er linjen en tangent. Ellers er den ikke.

Hvis linjen er beskrevet ved en parameterfremstilling, eller hvis man bare gerne vil gøre noget andet, så kan man bruge skæringspunkter til at afgøre om linjen er en tangent:

Metoden med skæringspunkter mellem cirkel og linje.

1. Bestem skæringspunkterne (hvis de findes) mellem linjen og cirklen.
2. Nu kan der gælde tre ting:
   i) Der er **præcist et skæringspunkt**. Så er linjen en tangent.
   ii) Der er **ingen skæringspunkter**. Så ligger linjen helt udenfor cirklen, og er derfor (selvfølgelig) ikke en tangent.
   iii) Der er **to skæringspunkter**. Så skærer linjen igennem cirklen, og er derfor (selvfølgelig) heller ikke en tangent.



2.2.3 Opgaver

Opgave 1 En cirkel har centrum i $(3, -9)$ og radius 10. Bestem en ligning for cirklen.

Opgave 2 Bestem en ligning for cirklen med centrum i (2,3), hvor punktet (5,7) ligger på cirklen.

Opgave 3 Undersøg om punkterne $P(-6{,}7)$ og $Q(-3{,}5)$ ligger på cirklen med ligningen $(x+7)^2 + (y-2)^2 = 25$.

Opgave 4 Bestem centrum og radius for cirklerne beskrevet ved følgende ligninger:

a) $x^2 + y^2 - 25 = 0$

b) $x^2 + y^2 - 4x - 8y - 29 = 0$

c) $x^2 + y^2 + 2x - 2y - 7 = 0$

d) $x^2 + y^2 + 10x + 4y - 52 = 0$

Opgave 5 Bestem en ligning for tangenten til cirklen $(x+2)^2 + (y+3)^2 = 73$ i punktet (1,5).

Opgave 6 Bestem en parameterfremstilling for tangenten til cirklen $x^2 + y^2 - 12x + 2y = 3$ i punktet (0,1).

Opgave 7 Bestem skæringpunkterne mellem cirklen med ligningen $x^2+y^2-14x+10y+49 = 0$ og linjen med ligningen $-x+y+11 = 0$.

Opgave 8 Bestem eventuelle skæringpunkter mellem cirklen med ligningen

$$x^2 + y^2 - 4x + 6y = 7$$

og linjerne:

a) $-3x + y + 19 = 0$

b) $5x + 6y - 27 = 0$

c) $2x + y - 11 = 0$

Opgave 9 Undersøg om følgende tre linjer er tangenter til cirklen med ligningen $(x+3)^2+(y-2)^2=25$:

a) $-3x+y-6=0$

b) $2x+3y-29=0$

c) $4x+3y-19=0$

Opgave 10 (Uden hjælpemidler) En cirkel er bestemt ved ligningen

$$x^2+2x+y^2-4y=4.$$

Bestem cirklens radius og koordinatsættet til cirklens centrum.

Opgave 11 (Uden hjælpemidler) En cirkel har centrum i $C(1{,}0)$ og radius $\sqrt{8}$. En linje er bestemt ved ligningen

$$y=x-1.$$

Bestem koordinatsættet til hvert af skæringspunkterne mellem cirklen og linjen.

Opgave 12 (Uden hjælpemidler) En cirkel er givet ved ligningen

$$x^2+2x+y^2-4y=0,$$

og det oplyses, at punktet $P(1{,}1)$ ligger på cirklen.

Bestem en ligning for tangenten til cirklen i punktet P.

Opgave 13 I et koordinatsystem i planen er givet to punkter $C(-1{,}4)$ og $P(2{,}8)$.

a) Opskriv en ligning for den cirkel, der går gennem P og har centrum i C.

En linje i planen er givet ved parameterfremstillingen

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 15 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

b) Bestem koordinatsættet til hvert af linjens skæringspunkter med cirklen.

Opgave 14 I et koordinatsystem er givet to punkter $P(2{,}1)$ og $Q(20{,}7)$ samt en vektor $\vec{a} = \binom{4}{-2}$.

a) Bestem en ligning for den linje, ℓ, der går gennem P, og som står vinkelret på $\vec{a}$.

b) En cirkel har centrum i $(-4,-2)$ og radius 4. Afgør om ℓ er tangent til cirklen.

Opgave 15 En cirkel er givet ved ligningen $(x-2)^2+(y-4)^2 = 40$. Cirklen har to tangenter der er parallelle med linjen med ligningen $6x+2y-8=0$. Bestem disse to tangenters røringspunkt.

Kapitel 3

Vektorer og trigonometri

Vi skal i dette kapitel indføre grundlæggendee teori om trigonometri, så det teoretiske indhold svarer til det, der traditionelt blev indført i gymnasiet før 2017-reformen. Kapitlet er rent teoretisk, da eksempler og opgaver kan findes mange andre steder, og da emnet ikke i samme grad som tidligere (dvs. før reformen i 2017) er en del pensum.

3.1 Formler for sinus, cosinus og tangens i retvinklede trekanter

Vi vil bevise følgende sætning:

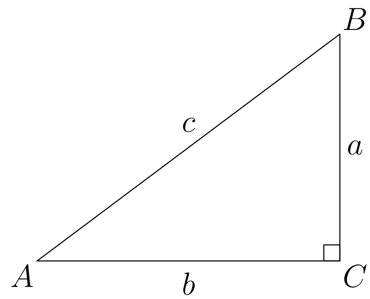
Sætning 3.1.1 (Cosinus, sinus og tangens i retvinklede trekanter)**.** *I en retvinklet trekant, gælder følgende formler*

$$\cos(v) = \frac{\textit{hosliggende katete}}{\textit{hypotenusen}} \quad \textit{og} \quad \sin(v) = \frac{\textit{modstående katete}}{\textit{hypotenusen}}.$$

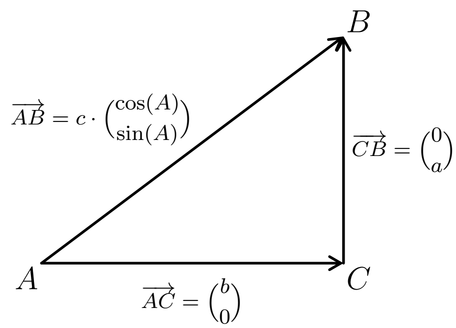
samt

$$\tan(v) = \frac{\textit{modstående katete}}{\textit{hosliggende katete}}.$$

Bevis. Vi tager udgangspunkt i en retvinklet trekant ABC tegnet nedenfor:



Vi beskriver nu trekantens sider ved hjælp af vektorer (her bruges den polære notation, se definition 1.2.7).



Indskudsregler giver nu, at

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$$

hvilket giver

$$c \cdot \begin{pmatrix} \cos(A) \\ \sin(A) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ a \end{pmatrix}$$

hvilket kan skrives som to ligninger:

$$\begin{aligned} &1) \quad c \cdot \cos(A) = b + 0 \iff \cos(A) = \frac{b}{c} \\ &2) \quad c \cdot \sin(A) = 0 + a \iff \sin(A) = \frac{a}{c} \end{aligned}$$

Da b er hosliggende katede, a er modstående katede og c er hypotenusen, viser dette formlerne for sinus og cosinus. Et tilsvarende argument kan selvfølgelig laves med udgangspunkt i vinkel B.

For at vise tangensformlen, bruger vi definitionen på tangens og indsætter:

$$\tan(A) = \frac{\sin(A)}{\cos(A)} = \frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}} = \frac{a}{c} \cdot \frac{c}{b} = \frac{a}{b}$$

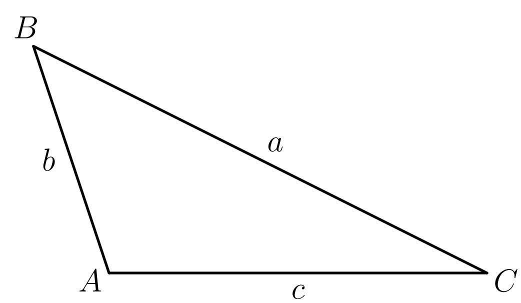
hvilket færdiggør beviset. $\square$

3.2 Arealformlen og sinusrelationerne

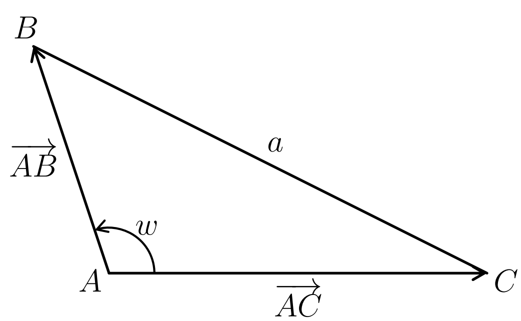
Sætning 3.2.1 (Arealformlen). *Arealet, T, af en vilkårlig trekant ABC, gælder*

$$T = \tfrac{1}{2}ab\sin(C) = \tfrac{1}{2}ac\sin(B) = \tfrac{1}{2}bc\sin(A)$$

Bevis. Lad en vilkårlig trekant ABC være givet. Vi viser, at $T = \frac{1}{2}bc\sin(A)$.



Vi indfører nu vektorerne fra A til B, $\overrightarrow{AB}$ og fra A til C, $\overrightarrow{AC}$, samt vinklen w mellem dem (målt fra $\overrightarrow{AC}$ til $\overrightarrow{AB}$):



Sætning 1.5.4 giver nu, at

$$T = \left|\tfrac{1}{2}\det(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB})\right|$$

og Sætning 1.5.2 giver at $\det(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB}) = |\overrightarrow{AC}||\overrightarrow{AB}|\sin(w)$, så vi får:

$$T = \left|\tfrac{1}{2}|\overrightarrow{AC}||\overrightarrow{AB}|\sin(w)\right|.$$

Da $0^\circ < w < 180^\circ$, så $\sin(w) > 0$, og da $b = |\overrightarrow{AC}|$, $c = |\overrightarrow{AB}|$ og $A = w$, får vi altså det ønskede:

$$T = \tfrac{1}{2}bc\sin(A).$$

De øvrige udtryk kan udledes på samme måde. □

Af denne sætning opnås let sinusrelationerne:

Sætning 3.2.2 (Sinusrelationerne). *I en vilkårlig trekant ABC, gælder*

$$\frac{\sin(A)}{a} = \frac{\sin(B)}{b} = \frac{\sin(C)}{c}$$

Bevis. Fra sætningen om arealet af trekanten (Sætning 3.2.1) har vi, at

$$\tfrac{1}{2}ab\sin(C) = \tfrac{1}{2}ac\sin(B) = \tfrac{1}{2}bc\sin(A)$$

Ved division med $\frac{1}{2}abc$ får vi:

$$\frac{\frac{1}{2}ab\sin(C)}{\frac{1}{2}abc} = \frac{\frac{1}{2}ac\sin(B)}{\frac{1}{2}abc} = \frac{\frac{1}{2}bc\sin(A)}{\frac{1}{2}abc}$$

hvilket giver

$$\frac{\sin(A)}{a} = \frac{\sin(B)}{b} = \frac{\sin(C)}{c}$$

som ønsket. □

Bemærkning 3.2.1. Sinusrelationerne kan også skrives på formen:

$$\frac{a}{\sin(A)} = \frac{b}{\sin(B)} = \frac{c}{\sin(C)}$$

Har man styr på brøker er dette naturligvis helt oplagt, men det kan selvfølgelig vises, ved at omskrive udtrykket med sinus i tælleren til udtrykket med sinus i nævneren et lighedstegn af gangen.

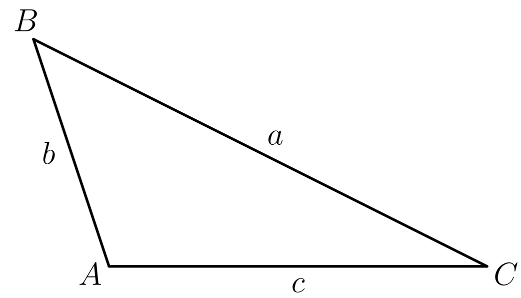
♢

3.3 Cosinusrelationerne

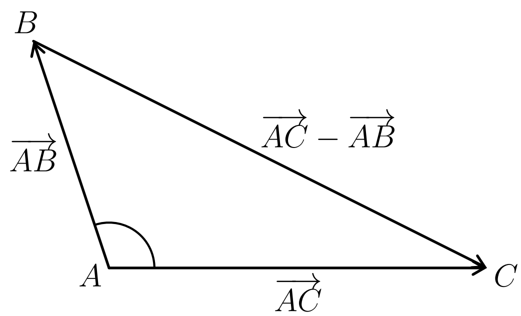
Sætning 3.3.1 (Cosinusrelationerne). *I en vilkårlig trekant ABC, gælder*

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos(A) \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac\cos(B) \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\cos(C) \end{aligned}$$

Bevis. Lad en vilkårlig trekant ABC være givet. Vi viser, at $a^2 = b^2+c^2-2bc\cos(A)$.



Vi indfører nu vektorerne fra A til B, $\overrightarrow{AB}$ og fra A til C, $\overrightarrow{AC}$:



Vi bemærker desuden at indskudsreglen (Sætning 1.1.4) giver at

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$$

således at

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB},$$

hvilket også er markeret på tegningen. Nu regner vi:

$$\begin{aligned} a^2 &= |\overrightarrow{BC}|^2 \\ &= \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BC} \\ &= (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) \cdot (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) \\ &= |\overrightarrow{AC}|^2 + |\overrightarrow{AB}|^2 - 2\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} \\ &= |\overrightarrow{AC}|^2 + |\overrightarrow{AB}|^2 - 2|\overrightarrow{AC}||\overrightarrow{AB}| \cos(A) \\ &= b^2 + c^2 - 2bc\cos(A). \end{aligned}$$

Hvilket viser det ønskede. Undervejs brugte vi anden kvadratsætning for vektorer (Sætning 1.3.2), samt at $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos(v)$ (Sætning 1.3.4). De to andre formler vises på tilsvarende måde. □

Bemærkning 3.3.1. Cosinusrelationerne skrives ofte således:

$$\cos(A) = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$
$$\cos(B) = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$
$$\cos(C) = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

Det er en fin øvelse at vise dette, ved at isolere cosinus i formlerne fra sætningen.

Kapitel 4

Vektorer og trigonometriske funktioner

Følgende afsnit kræver kendskab til trigonometriske funktioner, og vinkler målt i radianer.

Vi skal se, at visse trigonometriske formler udledes ganske elegant ved hjælp af vektorer. Formlerne kan f.eks. bruges til at lave et stringent bevis for, hvordan de trigonometriske funktioner cosinus og sinus differentieres.

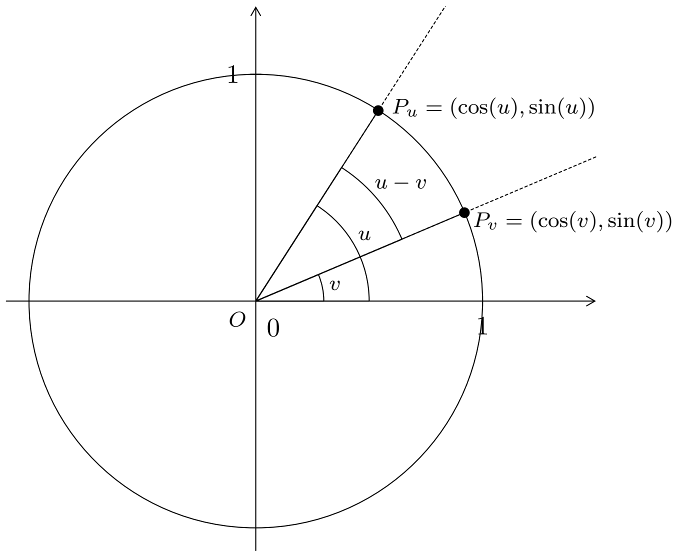
4.1 Additions- og logaritmeformler

Der findes ganske mange forskellige beviser for følgende formler. Her fremføres ét, der bygger på vektorer.

Sætning 4.1.1 (Additionsformler). *Der gælder følgende trigonometriske formler, hvor* $u,v \in \mathbb{R}$*:*

1. $\cos(u - v) = \cos(u)\cos(v) + \sin(u)\sin(v)$
2. $\cos(u + v) = \cos(u)\cos(v) - \sin(u)\sin(v)$
3. $\sin(u - v) = \cos(v)\sin(u) - \sin(v)\cos(u)$
4. $\sin(u + v) = \cos(v)\sin(u) + \sin(v)\cos(u)$

Bevis. Lad $u, v \in \mathbb{R}$ med $u > v$. Først beviser vi *1.*. Betragt enhedscirklen:



Husk på at vinklen, w, mellem to vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$, kan findes ved formlen $\cos w = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$ (se Sætning 1.3.4). Hvis vi betragter vinklen $u - v$ får vi

$$\cos(u-v) = \frac{\overrightarrow{OP_v} \cdot \overrightarrow{OP_u}}{|\overrightarrow{OP_v}||\overrightarrow{OP_u}|} = \frac{\begin{pmatrix}\cos(v)\\ \sin(v)\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}\cos(u)\\ \sin(u)\end{pmatrix}}{1 \cdot 1} = \cos(v)\cos(u) + \sin(v)\sin(u),$$

hvilket viser det ønskede.

Vi fortsætter med at bevise *2.*, som følger ved at bruge at $u+v = u-(-v)$ og bruge del *1.*. Vi får

$$\begin{aligned}\cos(u+v) &= \cos(u-(-v))\\ &= \cos(u)\cos(-v) + \sin(u)\sin(-v)\\ &= \cos(u)\cos(v) - \sin(u)\sin(v),\end{aligned}$$

da $\cos(-v) = \cos(v)$ og $\sin(-v) = -\sin(v)$.

For at bevise del *3.* skal vi bruge Sætning 1.5.2, der siger at $\hat{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\sin(w)$, hvor w er vinklen mellem $\vec{a}$ og $\vec{b}$ målt fra $\vec{a}$ til $\vec{b}$ i positiv omløbsretning. Dette kan omformuleres til $\sin(w) = \frac{\hat{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$, og bruger vi denne formel til vinklen $u - v$, får vi:

$$\sin(u-v) = \frac{\widehat{OP_v} \cdot \overrightarrow{OP_u}}{|\overrightarrow{OP_v}||\overrightarrow{OP_u}|} = \frac{\begin{pmatrix}-\sin(v)\\ \cos(v)\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}\cos(u)\\ \sin(u)\end{pmatrix}}{1 \cdot 1} = -\sin(v)\cos(u) + \cos(v)\sin(u),$$

hvilket var det ønskede.

For at vise *4.* gør vi som før

$$\begin{aligned}\sin(u+v) &= \sin(u-(-v)) \\ &= \cos(-v)\sin(u) - \sin(-v)\cos(u) \\ &= \cos(v)\sin(u) + \sin(v)\cos(u).\end{aligned}$$

□

Sætning 4.1.2 (Logaritmiske formler for cosinus og sinus)**.** *Der gælder følgende trigonometriske formler, hvor* $u,v \in \mathbb{R}$*:*

1. $\cos(s) - \cos(t) = -2\sin\left(\frac{s+t}{2}\right)\sin\left(\frac{s-t}{2}\right)$

2. $\sin(s) - \sin(t) = 2\sin\left(\frac{s-t}{2}\right)\cos\left(\frac{s+t}{2}\right)$

Bevis. Del 1.: Ved subtraktion af formel *2.* med formel *1.* fra Sætning 4.1.1 fås

$$\begin{aligned}&\cos(u+v) - \cos(u-v) \\ =\ &\cos(u)\cos(v) - \sin(u)\sin(v) - (\cos(u)\cos(v) + \sin(u)\sin(v)) \\ =\ &-2\sin(u)\sin(v)\end{aligned}$$

Hvis vi nu sætter $t = u - v$ og $s = u + v$, så bliver $s + t = 2u$ og $s - t = 2v$, altså $u = \frac{1}{2}(s+t)$ og $v = \frac{1}{2}(s-t)$. Indsat i ovenstående giver det

$$\cos(s) - \cos(t) = -2\sin\left(\frac{s+t}{2}\right)\sin\left(\frac{s-t}{2}\right),$$

som ønsket.

Del 2.: Ved subtraktion af formel *4.* med *3.* fra Sætning 4.1.1, fås

$$\begin{aligned}&\sin(u+v) - \sin(u-v) \\ =\ &\cos(v)\sin(u) + \sin(v)\cos(u) - (\cos(v)\sin(u) - \sin(v)\cos(u)) \\ =\ &2\sin(v)\cos(u).\end{aligned}$$

Sætter vi igen $t = u - v$ og $s = u + v$, så bliver (igen) $u = \frac{1}{2}(s+t)$ og $v = \frac{1}{2}(s-t)$. Indsat i ovenstående giver det

$$\sin(s) - \sin(t) = 2\sin\left(\frac{s-t}{2}\right)\cos\left(\frac{s+t}{2}\right),$$

hvilket skulle bevises. □

Bemærkning 4.1.1. Ovenstående additions– og logaritmeformler gælder både for vinkler målt i grader og vinkler målt i radianer.

♢

Indeks