

Note fra B2-bogen om differentiation af sammensat funktioner (kædereglen)

Sætning 7

Hvis $g(x)$ er differentiabel i x_0 , og $f(x)$ er differentiabel i $y_0 = g(x_0)$, er den sammensatte funktion $p(x) = f(g(x))$ differentiabel i x_0 med differentialkvotienten

$$p'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0).$$

Eksempel 10

Funktionen $h(x) = \sqrt{x^4 + 5x^2}$ er en sammensat funktion.

Den ydre funktion er $f(x) = \sqrt{x}$, og den indre funktion er $g(x) = x^4 + 5x^2$. Forskriften for $h(x)$ fremkommer således ved at indsætte forskriften for $g(x)$ på x 'ets plads i forskriften for $f(x)$:

$$h(x) = f(g(x)) = f(x^4 + 5x^2) = \sqrt{x^4 + 5x^2}.$$

For at differentiere $h(x)$ skal vi differentiere den indre og den ydre funktion hver for sig. Vi får

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad \text{og} \quad g'(x) = 4x^3 + 10x.$$

Vi kan nu bestemme $h'(x)$ på følgende måde:

$$h'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{g(x)}} \cdot g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^4 + 5x^2}} \cdot (4x^3 + 10x).$$

Vi har altså, at

$$h'(x) = \frac{4x^3 + 10x}{2\sqrt{x^4 + 5x^2}}.$$