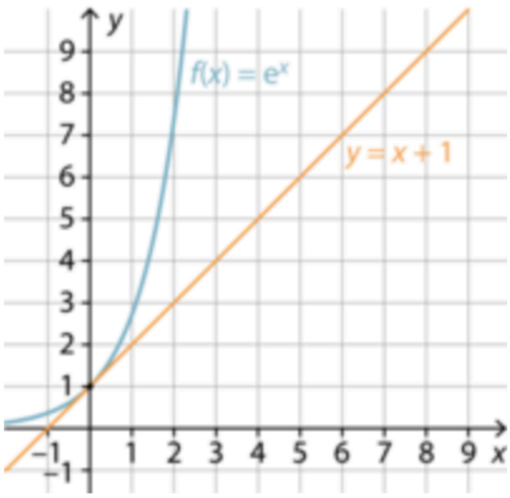
Note om den naturlige eksponentialfunktion e^x

Definition: Den naturlige eksponentialfunktion
Den naturlige eksponentialfunktion e^x, er den funktion blandt alle eksponentialfunktioner, a^x, hvis graf har hældningen 1, hvor grafen skærer y-aksen

Vi vil nu bestemme den afledte funktion til den naturlige eksponentialfunktion

$$f(x) = e^x .$$

Den naturlige eksponentialfunktion har grundtallet e. Denne eksponentialfunktion har den særlige egenskab, at dens graf i punktet (0, 1) har en tangent med hældning 1. Det vil sige, at funktionen $f(x) = e^x$ er differentiabel i 0 med differentialkvotienten $f'(0) = 1$ (se figur 15).



Figur 15

At funktionen $f(x) = e^x$ er differentiabel i punktet x_0 betyder, at

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \to f'(x_0) \text{ for } h \to 0 .$$

Da $f(x) = e^x$ er differentiabel i 0 med $f'(0) = 1$, ved vi derfor, at

$$\frac{f(0+h)-f(0)}{h} \to f'(0) \text{ for } h \to 0 .$$

Dette er ensbetydende med, at:

$$\frac{e^{0+h}-e^0}{h} \to 1 \text{ for } h \to 0 ,$$

eller

$$\frac{e^h-1}{h} \to 1 \text{ for } h \to 0 .$$

Vi kan nu benytte tretrinsreglen til at bestemme differentialkvotienten for $f(x) = e^x$ i punktet x_0:

1. Differenskvotienten opskrives:

$$\frac{\Delta y}{h} = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \frac{e^{x_0+h}-e^{x_0}}{h} .$$

2. Differenskvotienten omskrives/reduceres:

$$\frac{\Delta y}{h} = \frac{e^{x_0} \cdot e^{h}-e^{x_0}}{h} = e^{x_0} \cdot \frac{e^{h}-1}{h} .$$

3. Vi undersøger grænseværdien for $h \to 0$:

   Ovenfor så vi, at $\frac{e^h-1}{h} \to 1$ for $h \to 0$, og vi har derfor:

$$\frac{\Delta y}{h} = e^{x_0} \cdot \frac{e^h - 1}{h} \to e^{x_0} \cdot 1 \text{ for } h \to 0 .$$

Differentialkvotienten for $f(x) = e^x$ er altså

$$f'(x_0) = e^{x_0} .$$

Dette kan også formuleres således, at den afledede funktion til $f(x) = e^x$ er

$$f'(x) = e^x .$$

Vi formulerer følgende sætning:

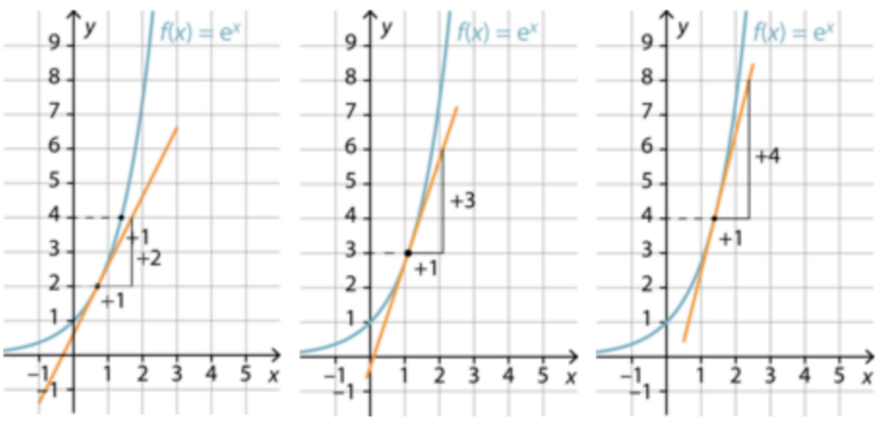
SÆTNING 8 DEL

Funktionen $f(x) = e^x$ er sin egen afledede:

$$f'(x) = e^x .$$

Eksempel

Indholdet af sætning 8 betyder, at funktionen $f(x) = e^x$ i ethvert punkt har samme tangenthældning som punktets y-værdi. Dette ses illustreret på figur 16, 17 og 18.



Figur 16 Figur 17 Figur 18