

DIFFERENTIATION AF POTENSFUNKTIONER

Læs og forstå i fællesskab nedenstående bevis evt. ved brug af en tavle.

Visk tavlen ren og lav beviset igen ved tavlen. OBS: Del beviset op sådan at alle spiller en rolle i bevisførelsen.

Forbered en fremlæggelse af jeres arbejde med opgaven. Alle skal selvfølgelig have en rolle.

Når I har rimeligt styr på beviset, skal I lave opgaven nederst på papiret.

SÆTNING 11 DEL

Potensfunktioner $h(x) = x^a$ har den afledede funktion

$$h'(x) = ax^{a-1}.$$

BEVIS DEL

Vi ønsker at bestemme differentialkvotienten for funktionen $h(x) = x^a$. Potensfunktioner er defineret for $x > 0$, og vi kan derfor omskrive forskriften for $h(x)$ på følgende måde:

$$h(x) = x^a = (e^{\ln x})^a = e^{a \ln x}.$$

$h(x) = e^{a \ln x}$ er en sammensat funktion bestående af den ydre funktion $f(x) = e^x$ og den indre funktion $g(x) = a \ln x$.

Vi bestemmer nu $h'(x)$ ved brug af reglen for differentiation af sammensat funktion:

$$h'(x) = (e^{a \ln x}) \cdot (a \ln x)' = (e^{\ln x})^a \cdot a \cdot \frac{1}{x} = x^a \cdot a \cdot \frac{1}{x} = a \cdot x^{a-1}.$$

Bemærkning: Definitionsmængden for potensfunktionen x^a udvides til alle reelle tal, når eksponenten a er et helt, positivt tal og til alle reelle tal, bortset fra 0, når a er et helt, negativt tal. I disse tilfælde gælder sætningen også, men det viser vi ikke hér.

Opgave uden hjælpemidler

En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = \ln(x^2 + 1).$$

- a) Bestem en ligning for tangenten til grafen for f i punktet $P(0, f(0))$.

DIFFERENTIATION AF DEN NATURLIGE LOGARITMEFUNKTION

Læs og forstå i fællesskab nedenstående bevis evt. ved brug af en tavle.

Visk tavlen ren og lav beviset igen ved tavlen. OBS: Del beviset op sådan at alle spiller en rolle i bevisførelsen.

Forbered en fremlæggelse af jeres arbejde med opgaven. Alle skal selvfølgelig have en rolle.

Når I har rimeligt styr på beviset, skal I lave opgaven nederst på papiret.

SÆTNING 10 DEL

Den naturlige logaritmefunktion $f(x) = \ln x$ har den afledede funktion

$$f'(x) = \frac{1}{x}.$$

BEVIS DEL

For at bestemme den afledede funktion af $f(x) = \ln x$ betragter vi funktionen $h(x) = x$, som har den afledede funktion $h'(x) = 1$.

Ud fra definitionen af den naturlige logaritme, kan vi for $x > 0$ skrive forskriften for $h(x)$ på følgende måde:

$$h(x) = x = e^{\ln x}.$$

Dette er en sammensat funktion med den ydre funktion $g(x) = e^x$ og den indre funktion $f(x) = \ln x$. Vi differentierer ved brug af reglen for sammensat funktion:

$$h'(x) = e^{\ln x} \cdot (\ln x)' = x \cdot (\ln x)'$$

Ovenfor så vi imidlertid, at $h(x)$ har den afledede funktion $h'(x) = 1$. Det må derfor gælde, at

$$x \cdot (\ln x)' = 1,$$

hvilket er ensbetydende med, at

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}.$$

Vi kan altså slutte, at funktionen $f(x) = \ln x$ har den afledede funktion $f'(x) = \frac{1}{x}$.

Bemærkning: I beviset ovenfor har vi uden videre antaget, at $f(x) = \ln x$ er differentiabel. Selve differentiableiteten af $\ln x$ er derfor ikke godtgjort med ovenstående bevis. Vi har altså kun vist, at hvis $\ln x$ er differentiabel, har funktionen den angivne afledede funktion.

Opgave uden hjælpemidler

En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = \ln(x^2 + 1).$$

- a) Bestem en ligning for tangenten til grafen for f i punktet $P(0, f(0))$.

DIFFERENTIATION AF EKSPONENTIALFUNKTIONER

Læs og forstå i fællesskab nedenstående bevis evt. ved brug af en tavle.

Visk tavlen ren og lav beviset igen ved tavlen. OBS: Del beviset op sådan at alle spiller en rolle i bevisførelsen.

Forbered en fremlæggelse af jeres arbejde med opgaven. Alle skal selvfølgelig have en rolle.

Når I har rimeligt styr på beviset, skal I lave opgaven nederst på papiret.

SÆTNING 9 DEL

Funktionen $h(x) = a^x$ har den afledede funktion

$$h'(x) = \ln a \cdot a^x.$$

BEVIS DEL

Vi skal bestemme differentialkvotienten for funktionen $h(x) = a^x$, hvor $a > 0$. Ifølge definitionen af den naturlige logaritme $\ln x$, gælder, at $a = e^{\ln a}$, hvor $a > 0$. Vi kan derfor skrive forskriften for $h(x)$ på følgende måde:

$$h(x) = a^x = \left(e^{\ln a}\right)^x = e^{x \ln a}.$$

$h(x)$ er nu skrevet som en sammensat funktion, hvor den ydre funktion er $f(x) = e^x$, og den indre funktion er $g(x) = x \ln a$.

Den indre funktion $g(x)$ har $g'(x) = \ln a$, og vi kan nu differentiere $h(x)$ ved hjælp af reglen for sammensat funktion og en potensregneregul:

$$h'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x) = e^{x \ln a} \cdot \ln a = \ln a \cdot a^x.$$

Sætning 9 er dermed bevist.

Opgave uden hjælpemidler

En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = \ln(x^2 + 1).$$

- a) Bestem en ligning for tangenten til grafen for f i punktet $P(0, f(0))$.

Ekstratræning efter lyst og behov

Udfyld "sildebenet":

$f(x)$	k	x	$ax + b$	x^2	$ax^2 + bx + c$	x^a	$\sqrt{x}$	$\frac{1}{x}$	e^x	a^x	$\ln(x)$
$f'(x)$											

Bestem den afledede funktion $f'(x)$ til hver af følgende funktioner:

11. $f(x) = 5x^3 - e^x$

12. $f(x) = 8e^x$

13. $f(x) = e^{5x}$

14. $f(x) = 5^x - \ln(x)$

15. $f(x) = x^3 \cdot \ln(x)$

16. $f(x) = x^{5.2} - 4 \cdot \ln(x)$

17. $f(x) = e^{kx}$ (her betegner k en vilkårlig konstant)

18. $f(x) = 5x^3 - e^x$

19. $f(x) = \ln(5x + 1)$

20. $f(x) = \frac{1}{x^3 - 4x}$