SÆTNING 3 DEL

Hvis funktionerne $f(x)$ og $g(x)$ er differentiable i x_0, er også funktionen $(f \cdot g)(x)$ differentiabel i x_0, og differentialkvotienten er

$$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0) \; .$$

BEVIS DEL

Sætningen bevises ved brug af tretrinsreglen.

1. Differenskvotienten opskrives:

$$\frac{\Delta y}{h} = \frac{f(x_0+h) \cdot g(x_0+h) - f(x_0) \cdot g(x_0)}{h} \; .$$

2. Vi omskriver/reducerer udtrykket for differenskvotienten:

   Da vi ikke kan sige noget om en eventuel grænseværdi, hvis vi lader h gå mod 0, omskriver vi differenskvotienten til noget, hvor vi kan afgøre, hvad der sker, når h går mod 0. Det gøres ved at lægge størrelsen

$$-f(x_0) \cdot g(x_0+h) + f(x_0) \cdot g(x_0+h),$$

   som er 0, til i tælleren:

$$\frac{\Delta y}{h} = \frac{f(x_0+h) \cdot g(x_0+h) - f(x_0) \cdot g(x_0+h) + f(x_0) \cdot g(x_0+h) - f(x_0) \cdot g(x_0)}{h} \; .$$

   Idéen er, at vi nu kan få differenskvotienterne for f og g frem. Vi kan nemlig sætte en fælles faktor uden for parentes i 1. og 2. led i tælleren og en fælles faktor uden for parentes i 3. og 4. led:

$$\frac{\Delta y}{h} = \frac{\big(f(x_0+h) - f(x_0)\big) \cdot g(x_0+h) + f(x_0) \cdot \big(g(x_0+h) - g(x_0)\big)}{h}$$

$$= \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \cdot g(x_0+h) + f(x_0) \cdot \frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h} \; .$$

   Hermed er differenskvotienterne for f og g fremkommet.

3. Vi undersøger, hvad der sker, når $h \to 0$:

   Vi ser på hver faktor i differenskvotienten for sig.

   Vi har forudsat, at $g(x)$ er differentiabel i x_0. Derfor er $g(x)$ også kontinuert i x_0, og det gælder dermed, at

   $$g(x_0 + h) \to g(x_0) \text{ for } h \to 0 \ .$$

   $f(x_0)$ er konstant og afhænger derfor ikke af h. Vi har derfor, at

   $$f(x_0) \to f(x_0) \text{ for } h \to 0 \ .$$

   De to brøkers grænseværdier er kendte, eftersom vi har antaget, at $f(x)$ og $g(x)$ begge er differentiable i x_0. Vi får derfor, at

   $$\frac{\Delta y}{h} \to f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0) \text{ for } h \to 0 \ .$$

Da differenskvotienten har en grænseværdi for $h \to 0$, er funktionen $(f \cdot g)(x)$ differentiabel i x_0 med denne grænseværdi som differentialkvotient:

$$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0) \ .$$

SÆTNING 4 DEL

Hvis k er et reelt tal, og $g(x)$ er differentiabel i x_0, så er funktionen $k \cdot g(x)$ differentiabel i x_0 med differentialkvotienten

$$(k \cdot g)'(x_0) = k \cdot g'(x_0) \ .$$

BEVIS DEL

Funktionen $k \cdot g(x)$ kan opfattes som et produkt af funktionerne $f(x) = k$ og $g(x)$. Funktionen $f(x) = k$ er en lineær funktion med hældningstal 0. Grafen er således en vandret ret linje, og funktionens differentialkvotient i ethvert punkt er 0.

Vi benytter nu produktreglen til at bestemme differentialkvotienten i x_0 for funktionen $k \cdot g(x)$:

$$(k \cdot g)'(x_0) = 0 \cdot g(x_0) + k \cdot g'(x_0) = k \cdot g'(x_0) \ .$$

Funktionen $k \cdot g(x)$ har således differentialkvotienten $k \cdot g'(x_0)$ i punktet x_0.