Keglens rumfang

Vi vil bestemme rumfanget af en såkaldt *ret cirkulær kegle* med grundfladeradius r og højde h. Navnet skyldes, at grundfladen er en cirkel, og at centrum for cirklen ligger lodret under toppunktet.

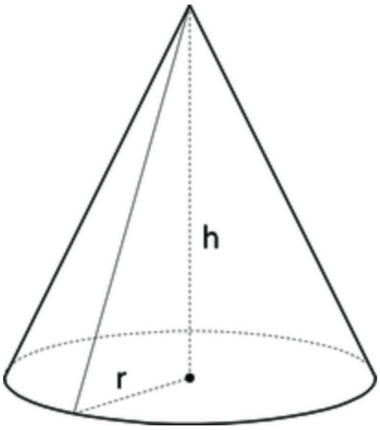


Fig. 5.10A

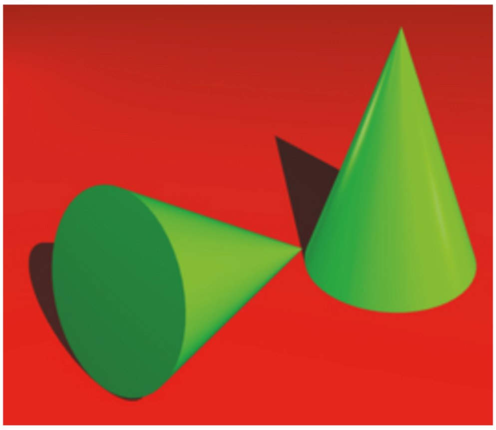


Fig. 5.10B

Keglen kan frembringes som et omdrejningslegeme ved at dreje den retvinklede trekant på fig. 5.10A omkring x-aksen. Den rette linje går gennem (0, 0) og (h, r), så den tilsvarende funktion er

$$f(x) = \frac{r}{h}x\,,$$

så rumfanget kan bestemmes sådan

$$\begin{aligned}\pi\int_0^h \left(\frac{r}{h}x\right)^2 dx &= \pi\int_0^h \frac{r^2}{h^2}x^2 dx = \pi\frac{r^2}{h^2}\int_0^h x^2 dx \\ &= \pi\frac{r^2}{h^2}\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^h = \pi\frac{r^2}{h^2}\left(\frac{1}{3}h^3 - 0\right) \\ &= \frac{1}{3}\pi r^2 h\,.\end{aligned}$$

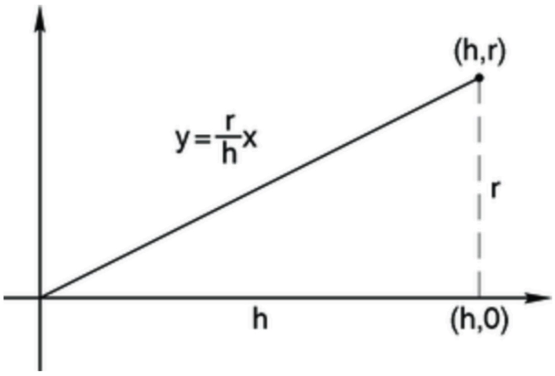


Fig. 5.11

Vi har altså

$$\text{Keglens rumfang} = \frac{1}{3}\cdot\text{grundfladeareal}\cdot\text{højde}\,.$$

Allerede Archimedes (287-212 f.Kr.) kendte dette resultat.

Kuglens rumfang

En kugle fremkommer ved at dreje en halvcirkel med radius r og centrum (0, 0) omkring x-aksen.

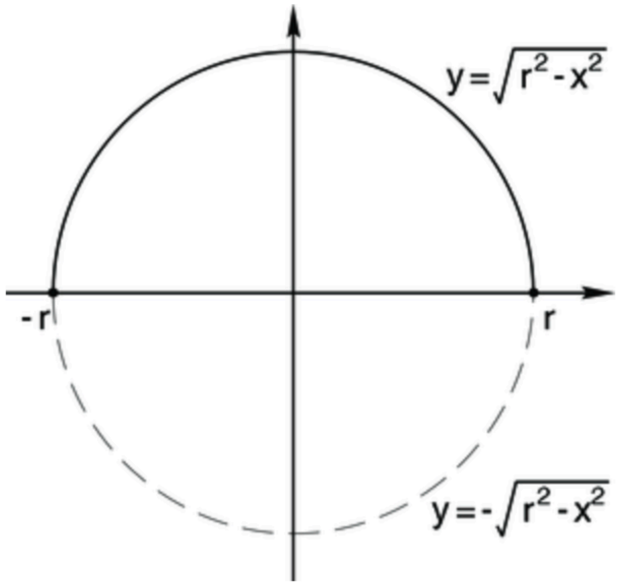


Fig. 5.12

Cirklen med radius r og centrum i (0, 0) har ligningen

$$x^2 + y^2 = r^2 \iff y^2 = r^2 - x^2 \iff y = \pm\sqrt{r^2 - x^2}\,.$$

Den funktion, hvis graf er halvcirklen over x-aksen, er altså

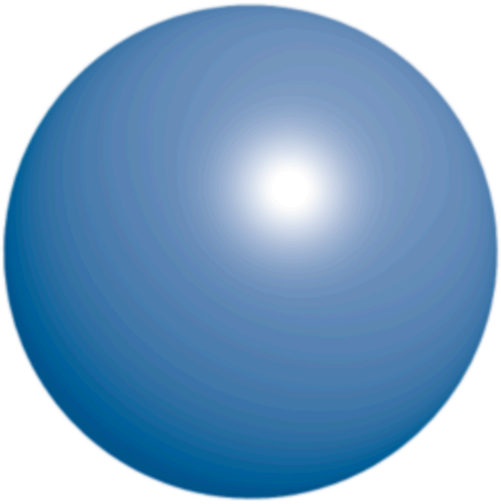
$$f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}\,.$$

Derfor er kuglens rumfang

$$\pi \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}^2 dx = \pi \int_{-r}^{r} (r^2 - x^2) dx = \pi \left[r^2 x - \frac{1}{3} x^3 \right]_{-r}^{r}$$
$$= \pi \left(\left(r^2 \cdot r - \frac{1}{3} r^3 \right) - \left(r^2 \cdot (-r) - \frac{1}{3} (-r)^3 \right) \right)$$
$$= \frac{4}{3} \pi r^3 \, .$$

Altså har vi

$$\text{Kuglens rumfang: } \frac{4}{3} \pi r^3 \, .$$



Læg iøvrigt mærke til formlerne

Cirklens areal : $A(r) = \pi r^2$	Cirklens omkreds : $O(r) = 2\pi r$
Kuglens rumfang: $V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$	Kuglens overflade $O(r) = 4\pi r^2$.

Den sidste formel har vi ikke vist. Vi ser, at vi ved differentiation får

- for cirklen : $A'(r) = O(r)$,
- for kuglen : $V'(r) = O(r)$.

Ved differentiation forvandles for cirklen arealmålet i to dimensioner til længdemål i en dimension. For kuglen forvandles rumfangsmålet i tre dimensioner til flademål i to dimensioner.