Note:
Bevis for volumen af omdrejningslegeme

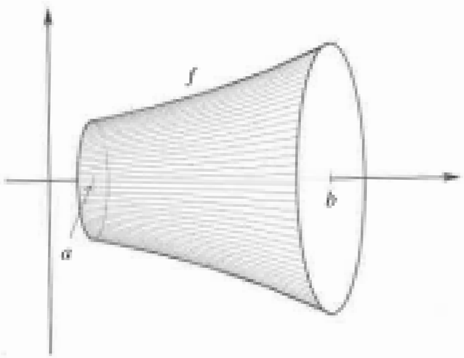
5.17 **_Rumfang af omdrejningslegeme._**

Lad f være en kontinuert, ikke-negativ funktion defineret i det lukkede interval $[a;b]$, og lad M være grundområdet begrænset af linjerne med ligninger $x = a$, $x = b$, førsteaksen og grafen for f. Rumfanget V af det omdrejningslegeme der fremkommer når M roteres 360° omkring førsteaksen, er givet ved

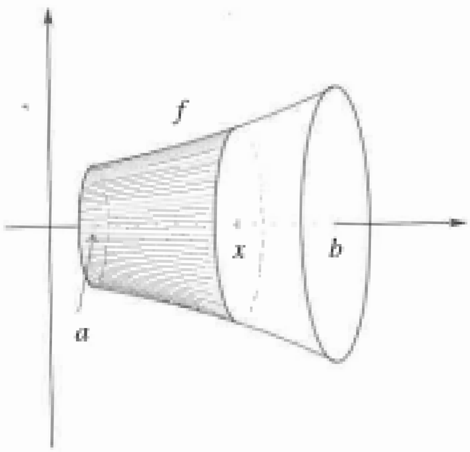
$$V = \pi \cdot \int_a^b (f(x))^2\,dx$$

Bevis. Vi vil nøjes med at bevise sætningen i det tilfælde hvor f er voksende. Svarende til arealfunktionen i afsnit 3 indfører vi her ***volumenfunktionen med udgangspunkt a***. $V(x)$ betegner altså rumfanget af den del af omdrejningslegemet som ligger mellem a og x. Der gælder da at $V(a) = 0$, og $V(b)$ er det rumfang V vi søger.

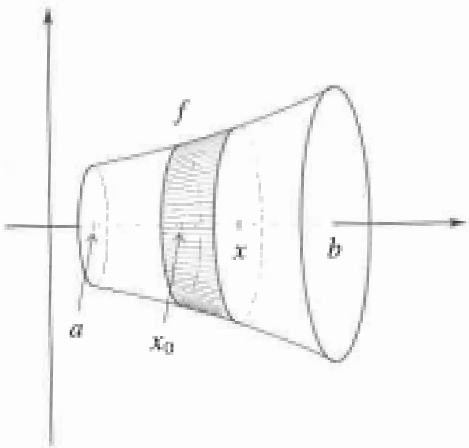
Vi vil bevise at volumenfunktionen er stamfunktion til $\pi \cdot (f(x))^2$, altså at V er differentiabel med $\pi \cdot (f(x))^2$ som afledet funktion.



Figur 5.18



Figur 5.19.

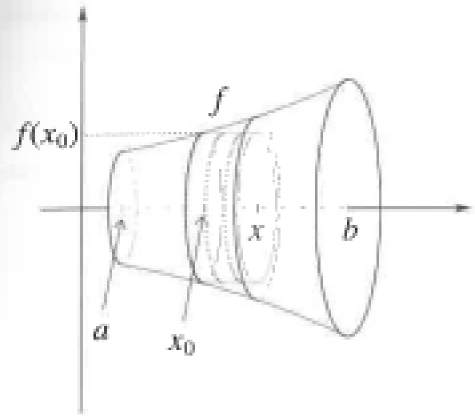


Figur 5.20.

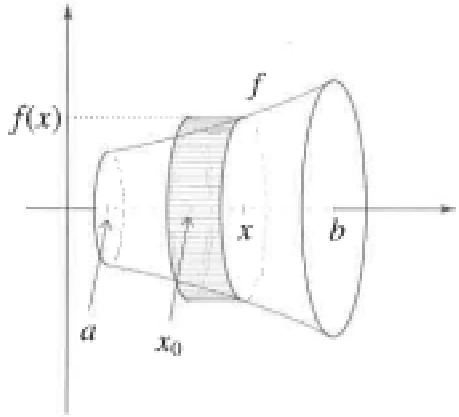
Lad altså x_0 være et vilkårligt tal i $[a;b[$ og lad x være større end x_0. Funktionstilvæksten

$$V(x) - V(x_0)$$

er rumfanget af den del af omdrejningslegemet som er fremhævet på figur 5.20.



Figur 5.21.



Figur 5.22.

Da vi har antaget at funktionen f er voksende, er dette rumfang større end rumfanget af en cylinder med radius $f(x_0)$ og højde $x - x_0$. Endvidere er $V(x) - V(x_0)$ mindre end rumfanget af en cylinder med radius $f(x)$ og højde $x - x_0$. Da rumfanget af en cylinder med radius r og højde h er $\pi r^2 h$, fås heraf:

$$\pi \cdot (f(x_0))^2 \cdot (x - x_0) < V(x) - V(x_0) < \pi \cdot (f(x))^2 \cdot (x - x_0)$$

Ved at dividere igennem med det positive tal $x - x_0$ fås:

$$\pi \cdot (f(x_0))^2 < \frac{V(x) - V(x_0)}{x - x_0} < \pi \cdot (f(x))^2$$

Differenskvotienten for V ligger altså mellem $\pi \cdot (f(x_0))^2$ og $\pi \cdot (f(x))^2$.

Da f og dermed også $\pi \cdot (f(x))^2$ er kontinuert, gælder

$$\pi \cdot (f(x))^2 \to \pi \cdot (f(x_0))^2 \text{ for } x \to x_0$$

Derfor må det gælde at

$$\frac{V(x) - V(x_0)}{x - x_0} \to \pi \cdot (f(x_0))^2 \text{ for } x \to x_0^+$$

Dermed har vi bevist at V er differentiabel fra højre i x_0. Man kan på tilsvarende måde bevise at for $x_0 \in]a;b]$ har differenskvotienten for V en grænseværdi for x gående mod x_0 fra venstre, og at den også er $\pi \cdot (f(x_0))^2$.

Altså gælder at $V'(x) = \pi \cdot (f(x))^2$. Beviset for sætningen kan nu afsluttes på følgende måde:

$$V = V(b) = V(b) - V(a) = [V(x)]_a^b = \int_a^b V'(x)dx = \int_a^b \pi \cdot (f(x))^2 dx = \pi \cdot \int_a^b (f(x))^2 dx$$