

Flemming Clausen, Bert Schomacker og
Jesper Tolnø:

Grundbog B1, Gyldendals Gymnasie matematik
Gyldendal 1. udgave, 1. oplag 2017

SÆTNING

SÆTNING 1.7: Beregning af a og b i $f(x) = b \cdot x^a$ ud fra to punkter

Når der er givet to punkter $P(x_1, y_1)$ og $Q(x_2, y_2)$ på grafen for $f(x) = b \cdot x^a$, kan tallene a og b beregnes på følgende måde:

$$\text{Første beregning: } a = \frac{\log\left(\frac{y_2}{y_1}\right)}{\log\left(\frac{x_2}{x_1}\right)} \quad \text{eller} \quad a = \frac{\ln\left(\frac{y_2}{y_1}\right)}{\ln\left(\frac{x_2}{x_1}\right)}$$

$$\text{Anden beregning: } b = \frac{y_1}{x_1^a}$$

$$\text{Formlerne for } a \text{ kan også skrives } a = \frac{\log(y_2) - \log(y_1)}{\log(x_2) - \log(x_1)} \quad \text{eller} \quad a = \frac{\ln(y_2) - \ln(y_1)}{\ln(x_2) - \ln(x_1)}.$$

BEVIS

Da P og Q ligger på grafen, gælder:

$$(\#) \quad \begin{cases} y_2 = b \cdot x_2^a \\ y_1 = b \cdot x_1^a \end{cases}$$

Vi dividerer den første ligning med den sidste og får:

$$\frac{y_2}{y_1} = \frac{b \cdot x_2^a}{b \cdot x_1^a}$$

$$\frac{y_2}{y_1} = \frac{x_2^a}{x_1^a}$$

$$\frac{y_2}{y_1} = \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^a.$$

For at løse denne ligning er det nødvendigt at anvende en logaritmefunktion. Vi vælger $\log$, men kunne gennemføre lignende beregninger med $\ln$.

$$\frac{y_2}{y_1} = \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^a$$

$$\log\left(\frac{y_2}{y_1}\right) = \log\left(\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^a\right)$$

$$\log\left(\frac{y_2}{y_1}\right) = a \cdot \log\left(\frac{x_2}{x_1}\right)$$

$$a = \frac{\log\left(\frac{y_2}{y_1}\right)}{\log\left(\frac{x_2}{x_1}\right)}.$$

Ifølge regneregel (2) for log kan dette omskrives til

$$a = \frac{\log(y_2) - \log(y_1)}{\log(x_2) - \log(x_1)}.$$

Da a nu er kendt, er b den eneste ubekendte i ligningerne (#). Vi vælger den sidste af ligningerne og isolerer b :

$$y_1 = b \cdot x_1^a$$

$$b = \frac{y_1}{x_1^a}.$$

Hermed er sætningen bevist.