

II. Integralregning

3. Areal og stamfunktion

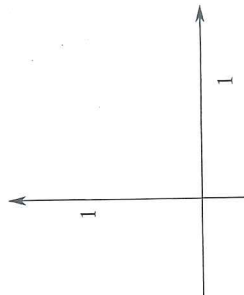
Areal af en trekant kan beregnes ved hjælp af en velkendt formel. Da en polygon kan opdeles i trekanter, kan vi derfor også beregne arealet af enhver polygon. I dagligdags sammenhænge er vi ikke i tvivl om at et plant område har et areal, også selv om området er kompliceret, som for eksempel det sorte på denne side. Det er her meget besværligt at finde arealet, men vi ved at det bestemmer hvor meget sværte der skal bruges ved trykningen.

Ved matematisk beskrivelse punktmængder kan det forholde sig anderledes. Betragt følgende punktmængde:

$$M = \{ (x, y) \mid 0 \leq x \leq 1 \wedge 0 \leq y \leq 1 \wedge x \in \mathbb{Q} \wedge y \in \mathbb{Q} \}$$

hvor $\mathbb{Q}$ er mængden af rationale tal.

M er en del af et kvadrat med sidelængde 1, så det er klart at arealet af M ikke kan være større end 1. Men har det overhovedet mening at tale om "arealet af M "?



Spørgsmålet om hvilke punktmængder der har et areal, viser sig at være vanskeligt at besvare udtømmende, og det vil vi ikke gøre her.

Vi vil nøjes med at konstatere at det arealbegreb vi kender fra polygoner, kan generaliseres på en sådan måde at der gælder følgende

3.1

Sætning

Lad f og g være kontinuerte funktioner hvis definitionsmængde omfatter intervallet $[a; b]$. Hvis der gælder

$$g(x) \leq f(x) \text{ for } x \in [a; b]$$

så har punktmængden

$$M = \{ (x, y) \mid a \leq x \leq b \wedge g(x) \leq y \leq f(x) \}$$

et areal.

Vi vil bruge betegnelsen $\alpha(M)$ for arealet af en punktmængde M .

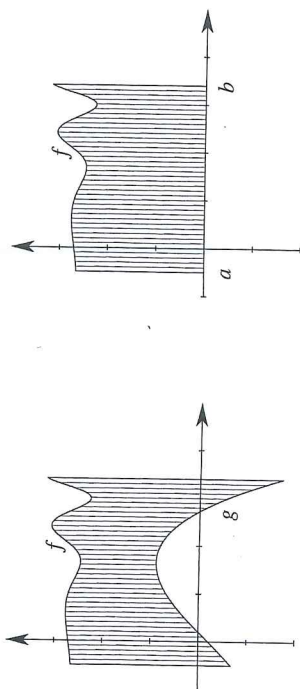
Thomas Hebsgaard og Hans Sloth

Højniveau matematik 2

Forlaget Trip,

1. udgave, 2. oplag 2001

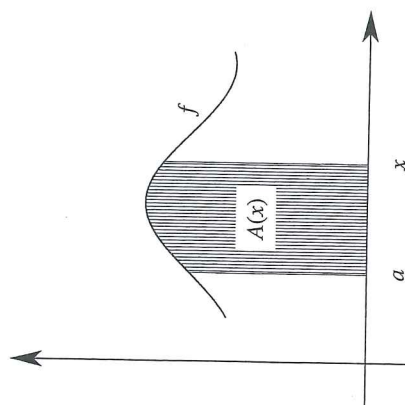
Figur 3.2 viser et billede af en punktmængde som omtalt i 3.1. Vi vil i det følgende vise hvordan arealet af en sådan punktmængde kan beregnes ved hjælp af stamfunktioner til f og g .



Figur 3.2

Figur 3.3

Indledningsvis vil vi koncentrere os om den situation hvor g er 0-funktionen som vist på figur 3.3. Vi vil altså studere punktmængder begrænset af grafen for en kontinuert ikke-negativ funktion, førsteaksen og de lodrette linjer $x = a$ og $x = b$. En sådan punktmængde vil vi kalde et *grundområde*.



Figur 3.4

Vi betragter nu en ikke-negativ, kontinuert funktion f , og et tal a i definitionsmængden for f . For ethvert tal x i $\text{Dm}(f)$ som er større end eller lig med a , betragter vi den punktmængde der begrænses af førsteaksen, grafen for f og de lodrette linjer ved a og x , se figur 3.4. Da f er kontinuert, har denne punktmængde ifølge 3.1 et areal. Det areal afhænger naturligvis af x , og det betegnes $A(x)$. Herved fastlægges en funktion A som kaldes *arealfunktionen for f med udgangspunkt a* .

3.10

Sætning

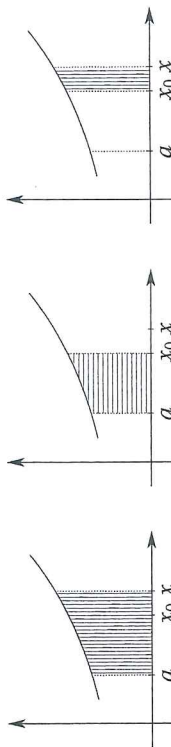
Lad f være en ikke-negativ, kontinuert funktion defineret i $[a; b]$, og lad A være arealfunktionen for f med udgangspunkt a . Da er A en stamfunktion til f :

$$A'(x) = f(x).$$

Bevis. Vi vil nøjes med at bevise sætningen i det tilfælde hvor f er en voksende funktion.

Først vil vi bevise at differenskquotienten $\frac{A(x) - A(x_0)}{x - x_0}$ for funktionen A har grænseværdien $f(x_0)$ for x gående imod x_0 for ethvert x_0 i det åbne interval $]a; b[$.

Vi starter med at lade x gå imod x_0 fra højre; lad derfor tallet x være et tal der er større end x_0 .



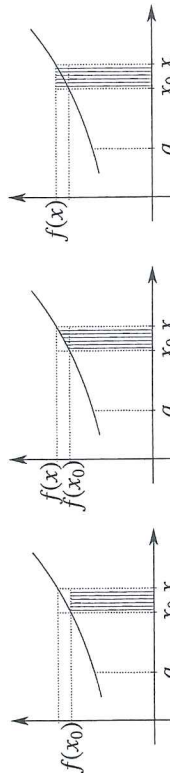
Figur 3.11

Figur 3.12

Figur 3.13

På figur 3.11 er $A(x)$ arealet af det område der er skraveret lodret, mens $A(x_0)$ er arealet af det område der er skraveret vandret på figur 3.12. Derfor er $A(x) - A(x_0)$ det areal der er skraveret lodret på figur 3.13. Da f er voksende, er dette areal som illustreret på figur 3.15 større end arealet af et rektangel med bredde $x - x_0$ og højde $f(x_0)$. Endvidere er $A(x) - A(x_0)$ mindre end arealet af et rektangel med bredde $x - x_0$ og højde $f(x)$. Der gælder altså

$$(x - x_0)f(x_0) < A(x) - A(x_0) < (x - x_0)f(x)$$



Figur 3.14

Figur 3.15

Figur 3.16

Da vi har forudsat at $x > x_0$, er tallet $x - x_0$ et positivt tal; derfor kan vi dividere denne ulighed igennem med $(x - x_0)$ uden at vende ulighedstegnene:

$$f(x_0) < \frac{A(x) - A(x_0)}{x - x_0} < f(x)$$

Differenskquotienten for A ligger altså som vist på tallinjen på figur 3.17, mellem $f(x)$ og $f(x_0)$.

Da f er kontinuert, gælder

$$f(x) \rightarrow f(x_0) \text{ for } x \rightarrow x_0$$

Da differenskquotienten ligger nærmere $f(x_0)$ end $f(x)$ gør, må der gælde:

$$\frac{A(x) - A(x_0)}{x - x_0} \rightarrow f(x_0) \text{ for } x \rightarrow x_0^+$$

Man kan på tilsvarende måde bevise (se øvelse 3.18) at grænseværdien er den samme for x gående imod x_0 fra venstre. Altså gælder $A'(x_0) = f(x_0)$ for $x_0 \in]a; b[$.

På helt tilsvarende måde vises at A er differentiable i endepunkterne, ved at vise

$$\frac{A(x) - A(a)}{x - a} \rightarrow f(a) \text{ for } x \rightarrow a^+$$

og

$$\frac{A(x) - A(b)}{x - b} \rightarrow f(b) \text{ for } x \rightarrow b^-$$

Dermed er beviset slut.

3.18 Øvelse

Vis for $x_0 \in]a; b[$ at differenskquotienten $\frac{A(x) - A(x_0)}{x - x_0}$ ligger imellem $f(x)$ og $f(x_0)$ hvis $x < x_0$. Bevis derefter at $\frac{A(x) - A(x_0)}{x - x_0} \rightarrow f(x_0)$ for $x \rightarrow x_0^-$.

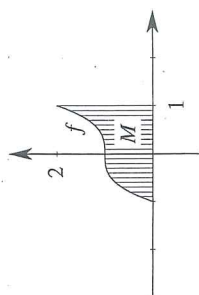
19 nicht

3.22 Øvelse

Figuren viser grafen for funktionen

$$f(x) = x^3 + 1, -1 \leq x \leq 1$$

Beregn arealet af det skraverede område M .



Figur 3.23

Ved hjælp af sætningerne 1.9, 3.1 og 3.10 kan vi bevise følgende:

3.24

Sætning

Enhver funktion f der er kontinuert i intervallet $[a; b]$, har en stamfunktion i dette interval.

Bevis. Da f er kontinuert i et lukket begrænset interval, har funktionen ifølge sætning 1.9 en mindsteværdi.

Der findes derfor en konstant k , så funktionen

$$g(x) = f(x) + k$$

er positiv for alle x i $[a; b]$, se figur 3.25

Lad nu $A(x)$ betegne arealfunktionen med udgangspunkt a for g , der er en positiv og kontinuert funktion. Da gælder ifølge sætning 3.10

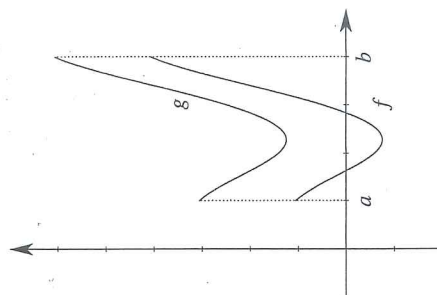
$$A'(x) = g(x) = f(x) + k$$

For funktionen $F(x) = A(x) - k \cdot x$ gælder derfor

$$F'(x) = A'(x) - k = (f(x) + k) - k = f(x)$$

Heraf følger at F er en stamfunktion til f , og dermed har vi vist at f har en stamfunktion.

Herved er sætningen bevist.



Figur 3.25

I beviset for 3.10 brugte vi en arealbetragtning til at bevise eksistensen af en stamfunktion til en kontinuert funktion. I anvendelser går man den omvendte vej idet man bruger stamfunktioner til at bestemme arealer:

3.19

Sætning

Lad f være en ikke-negativ, kontinuert funktion i intervallet $[a; b]$, og lad F være en vilkårlig stamfunktion til f . Med M betegnes grundområdet afgrænset af førsteaksen, linjerne $x = a$ og $x = b$ samt grafen for f . Arealet $\alpha(M)$ kan da findes som

$$\alpha(M) = F(b) - F(a)$$

Bevis. Arealfunktionen A for f med udgangspunkt a er ifølge sætning 3.10 en stamfunktion til f . Begge funktionerne F og A er derfor stamfunktioner til f . Der findes derfor ifølge sætning 2.6 en konstant k så der gælder:

$$A(x) = F(x) + k$$

Da $A(a) = 0$, finder vi:

$$F(a) + k = 0 \quad \text{og dermed} \quad k = -F(a)$$

Da $\alpha(M) = A(b)$, fås:

$$\alpha(M) = A(b) = F(b) + k = F(b) + (-F(a)) = F(b) - F(a).$$

Dermed er sætningen bevist.

3.20 Eksempel

Figur 3.21 viser en del af grafen for

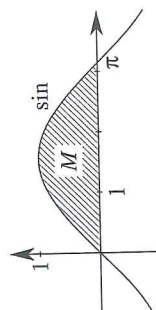
$$f(x) = \sin(x)$$

M er det skraverede område.

Da $F(x) = -\cos(x)$ er en stamfunktion til f , får vi af sætning 3.19

$$\begin{aligned} \alpha(M) &= -\cos \pi - (-\cos 0) \\ &= 1 - (-1) = 2. \end{aligned}$$

Arealet af M er altså 2.



Figur 3.21

4. Det bestemte integral

I sidste afsnit så vi at stamfunktionstilvæksten $\Delta F = F(b) - F(a)$ spiller en vigtig rolle i forbindelse med arealberegning. Vi vil indføre en speciel sprogbrug og et symbol der bruges i forbindelse med sådanne tilvækster.

4.1

Definition. *Det bestemte integral.*

Lad f være en funktion der er kontinuert i et interval I , og lad a og b være to vilkårlige tal i I . Med F betegnes en stamfunktion til f . Tallet

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

kaldes det bestemte integral fra a til b af f .

For at indse at definitionen er brugbar, skal vi vise at $F(b) - F(a)$ ikke afhænger af hvilken stamfunktion til f der anvendes. Hvis både F og G er stamfunktioner til f , findes der ifølge sætning 2.6 en konstant k så

$$G(x) = F(x) + k$$

Men så har F og G ens funktionstilvækster:

$$G(b) - G(a) = (F(b) + k) - (F(a) + k) = F(b) - F(a)$$

Herved har vi vist at man får samme værdi for integralet uanset hvilken stamfunktion til f man benytter.

Den funktion man beregner integralet af, altså her funktionen f , kaldes *integranden*, og tallene a og b kaldes henholdsvis integralets *nedre* og *øvre grænse*.

Det bemærkes at det *ikke* i definitionen er forudsat at f er ikke-negativ. Der er heller ingen forudsætning om den indbyrdes beliggenhed af a og b ; definitionen har god mening også hvis a og b er ens eller hvis a er størst. Ordet *nedre* går altså på at denne grænse står nederst i symbolet, den nedre grænse kan godt være større end den øvre grænse.

Da vi skal beregne mange integraler, skal vi ofte opskrive en funktionstilvækst for en stamfunktion. Derfor har man en særlig skrivemåde hertil hvor funktionen skrives i en kantet parentes med grænser:

$$[F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

4.2 Eksempel

Med brug af denne skrivemåde finder vi

$$\int_1^3 (x^3 + x) dx = \left[\frac{1}{4} x^4 + \frac{1}{2} x^2 \right]_1^3 = \frac{1}{4} 3^4 + \frac{1}{2} 3^2 - \left(\frac{1}{4} 1^4 + \frac{1}{2} 1^2 \right) = 24$$

4.3 Øvelse

Beregn ved hjælp af stamfunktioner nedenstående integraler

a) $\int_0^4 (x^2 - 2x) dx$ b) $\int_0^2 \exp(x) dx$

c) $\int_0^2 \frac{1}{e^{-4x}} dx$ d) $\int_0^\pi \sin(2x) dx$

4.4 Eksempel

Funktionen $f(x) = x^{-1}$ er kontinuert med $\text{Dm}(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ og har stamfunktion $\ln|x|$. Da integranden skal være kontinuert i intervallet mellem øvre og nedre grænse, må vi med f som integrand forlange at øvre og nedre grænse har samme fortegn. For eksempel finder vi:

$$\int_1^4 x^{-1} dx = [\ln|x|]_1^4 = \ln|4| - \ln|1| = \ln 4 - 0 \approx 1,3863$$

$$\int_{-4}^{-2} x^{-1} dx = [\ln|x|]_{-4}^{-2} = \ln|-2| - \ln|-4| = \ln 2 - \ln 4 = \ln \frac{1}{2} \approx -0,6931$$

Formelt kunne man godt beregne integralet fra -1 til 2 af x^{-1} , men det fremkomne tal tillægges *ikke* nogen mening: *det er forbudt at "integrere hen over" huller i integrandens definitionsmængde!*

4.5 Øvelse

Beregn integralet $\int_t^1 x^{-1} dx$ for $t = 0,1$, $t = 0,001$ og for $t = 10^{-99}$.

Integralet $\int_t^1 x^{-1} dx$ er en funktion af t .

Gør rede for at $\int_t^1 x^{-1} dx \rightarrow \infty$ for $t \rightarrow 0^+$.

4.6 Øvelse

For ethvert t betegner $g(t)$ tallet

$$g(t) = \int_0^t \sin(x) dx$$

Beregn tallene $g(\pi)$ samt $g(1)$.

Løs ligningen $g(t) = 0,123$ for $t \in [0; 2\pi]$.

Ud fra definitionen kan vi bevise følgende sætning om bestemte integraler

4.7

Regneregler for bestemte integral I

Lad f være en funktion som er kontinuert i intervallet I , og lad a, b og c være vilkårlige tal i I . Da gælder:

- $\int_a^a f(x) dx = 0$
- $\int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx$
- $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$

Bevis. Lad F være en stamfunktion til f . Ifølge definitionen af bestemt integral gælder da

$$\int_a^a f(x) dx = F(a) - F(a) = 0$$

Hermed er a) bevist. Beviserne for b) og c) overlades til læseren.

Den sidste regel kaldes ofte *indskudssætningen* for bestemte integraler idet c så at sige *indskydes* som ekstra grænse. Den er eksempel nyttig når der indgår numerisk værdi i integranden.

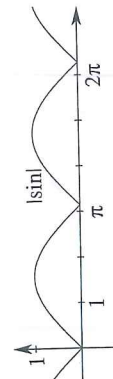
4.8 Eksempel

Vi skal beregne $\int_0^{2\pi} |\sin(x)| dx$.

Da der er numerisk tegn omkring $\sin(x)$, kan vi ikke umiddelbart finde en stamfunktion til integranden.

Af fortegnsvariationen for $\sin x$ følger

$$|\sin x| = \begin{cases} \sin x & \text{for } x \in [0; \pi] \\ -\sin x & \text{for } x \in [\pi; 2\pi] \end{cases}$$



Figur 4.9

Ved derefter at bruge indskudssætningen fås

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} |\sin(x)| dx &= \int_0^{\pi} \sin(x) dx + \int_{\pi}^{2\pi} -\sin(x) dx = [-\cos(x)]_0^{\pi} + [\cos(x)]_{\pi}^{2\pi} \\ &= (-(-1)) - (-1) + 1 - (-1) = 4. \end{aligned}$$

4.10 Øvelse

Brug indskudssætningen til at vise at $\int_0^5 |x - 2| dx = 6\frac{1}{2}$.

Vi sammenfatter nogle af de vigtige resultater om areal og stamfunktion i følgende sætning:

4.11

Sætning

Lad f være en funktion som er kontinuert og ikke-negativ i intervallet $[a; b]$. Da har grundområdet

$$M = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b \wedge 0 \leq y \leq f(x)\}$$

et areal $\alpha(M)$. Hvis F er en stamfunktion til f , kan dette areal beregnes som

$$\alpha(M) = \int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

4.12 Eksempel

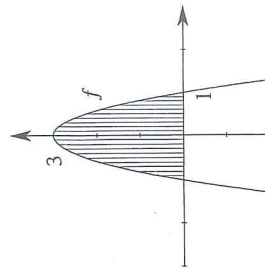
Figur 4.13 viser grafen for

$$f(x) = 3 - 3x^2$$

Ved indsettelse i forskriften ses at grafen skærer førsteaksen for $x = \pm 1$.

Da $f(x) \geq 0$ for $x \in [-1; 1]$, er arealet af det skraverede område derfor

$$\begin{aligned} \alpha(M) &= \int_{-1}^1 (3 - 3x^2) dx = [3x - x^3]_{-1}^1 \\ &= (3 - 1) - (-3 - (-1)) = 4 \end{aligned}$$



Figur 4.13

4.14 Øvelse

Skitsér grafen for funktionen

$$f(x) = 4x - x^3$$

Beregn ved hjælp af stamfunktioner arealet af det område i første kvadrant der afgrænses af grafen for f og førsteaksen.

4.15 Øvelse

Skitsér grafen for funktionen

$$f(x) = |x^2 - 1|, 0 \leq x \leq 2$$

Beregn ved hjælp af stamfunktioner arealet af det todelte område der afgrænses af grafen for f , førsteaksen, andenaksen og linjen $x = 2$.

4.16 Øvelse

Skitsér grafen for funktionen $f(x) = \sqrt{x}$.

Idet t er et positivt reelt tal, betegner M punktmængden

$$M = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq t \wedge 0 \leq y \leq f(x)\}$$

Beregn tallet t når arealet af M er 144.

4.17

Regneregler for bestemt integral 2

Lad f og g være kontinuerte funktioner defineret i et interval I . For $a, b \in I$ og for $k \in \mathbb{R}$ gælder:

- a) $\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$
- b) $\int_a^b (f(x) - g(x))dx = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx$
- c) $\int_a^b k \cdot f(x)dx = k \cdot \int_a^b f(x)dx$

Bevis. Da f og g er kontinuerte, har de hver en stamfunktion F og G . Ved at anvende differentiationsreglen for en sum fås

$$(F(x) + G(x))' = F'(x) + G'(x) = f(x) + g(x)$$

Altså er $F + G$ en stamfunktion til $f + g$, og derfor kan vi regne således

$$\begin{aligned} \int_a^b (f(x) + g(x))dx &= [F(x) + G(x)]_a^b = (F(b) + G(b)) - (F(a) + G(a)) = \\ &= F(b) - F(a) + G(b) - G(a) = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx \end{aligned}$$

Herved er a) bevist.

4.18 Øvelse

Bevis b) og c) i 4.17.

Regnereglerne er nyttige i teoretiske overvejelser, men de kan også bruges til at simplificere beregninger.

4.19 Øvelse

Udnyt nogle af regnereglerne ovenfor ved beregning af eksakte værdier af følgende integraler:

a) $\int_0^{132} (x^2 + 2)dx - \int_0^{132} x^2 dx$

b) $\int_0^{2\pi} (\sin(x))^2 dx + \int_0^{2\pi} (\cos(x))^2 dx$

4.20

Sætning

Lad f og g være kontinuerte funktioner som er defineret i intervallet $[a; b]$. Hvis $g(x) \leq f(x)$ for alle x i intervallet, så gælder

$$\int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b f(x)dx$$

Bevis. Den ulighed som skal bevises, kan omskrives på følgende måde

$$\int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b f(x)dx \Leftrightarrow 0 \leq \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx \Leftrightarrow 0 \leq \int_a^b (f(x) - g(x))dx$$

Da det forudsættes at $g(x) \leq f(x)$, er integranden til sidst en ikke-negativ, kontinuert funktion. Rigtigheden af uligheden følger nu af at arealet af et grundområde er ikke-negativt. Dermed er sætningen bevist.

4.21 Øvelse

Brug sætning 4.20 til at bevise at tallet

$$\int_2^4 (5 + e^{-x^2})dx$$

ligger i intervallet $[10; 10,04]$.

27 mdt

5. Areal og rumfang

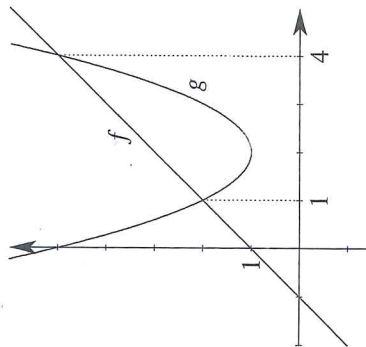
Sætning 4.9 fortæller hvordan arealet af et grundområde kan bestemmes som et integral. Her skal vi se på hvordan integralregning kan bruges til at bestemme arealet af andre punktmængder og til rumfangsberegning.

5.1 Øvelse

Figur 5.2 viser graferne for funktionerne

$$f(x) = x + 1 \text{ og } g(x) = x^2 - 4x + 5$$

På figuren ser det ud som om de to grafer skærer hinanden i punkter med x-koordinater 1 og 4. Ved indsettelse i forskrifterne ses at det er korrekt.



Figur 5.2

- Beregn arealet af det grundområde der afgrænses af grafen for f , førsteaksen og linjerne med ligninger $x = 1$ og $x = 4$.
- Beregn arealet af det grundområde der afgrænses af grafen for g , førsteaksen og linjerne med ligninger $x = 1$ og $x = 4$.
- Beregn arealet af det område som afgrænses af graferne for f og g .

Hvis graferne for to kontinuerte funktioner afgrænser et område i planen, kan vi finde arealet af dette ved hjælp af følgende sætning. Det bemærkes at de indgående funktioner gerne må antage negative værdier.

5.3

Sætning

Lad f og g være kontinuerte funktioner som er defineret i $[a; b]$ og som for ethvert x i dette interval opfylder

$$g(x) \leq f(x).$$

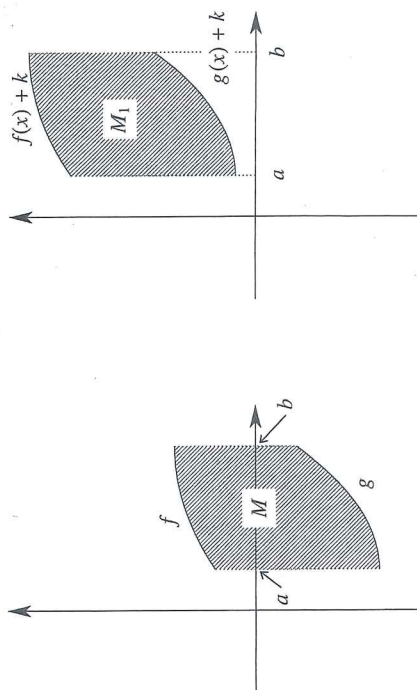
Arealet af punktmængden

$$M = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b \wedge g(x) \leq y \leq f(x)\}$$

kan da beregnes som

$$\alpha(M) = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx.$$

Bevis. Da g er kontinuert i et lukket begrænset interval, følger af sætning 1.9 at funktionen g har en mindsteværdi.



Figur 5.4

Figur 5.5

Det er derfor muligt at parallelforskyde graferne for f og g et passende stykke k opad så grafen for $g(x) + k$ og dermed også for $f(x) + k$ ligger helt over førsteaksen, se figur 5.5. Arealet af M_1 på denne figur er lig med arealet af M idet det er fremkommet ved at parallelforskyde M . Arealet af M_1 kan vi imidlertid bestemme som forskellen mellem arealet af to grundområder. Ved anvendelse af 4.17 b) (fra højre mod venstre) fås:

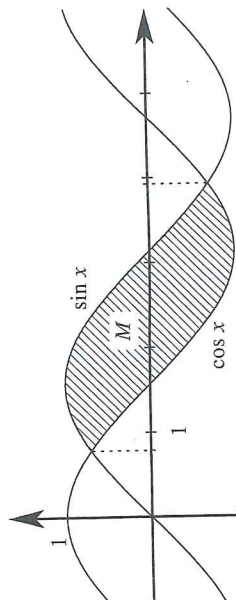
$$\begin{aligned} \alpha(M) &= \alpha(M_1) = \int_a^b (f(x) + k) dx - \int_a^b (g(x) + k) dx \\ &= \int_a^b ((f(x) + k) - (g(x) + k)) dx = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx. \end{aligned}$$

Dermed er sætningen bevist.

29 mdt

5.6 Eksempel

Vi vil beregne arealet af det skraverede område på figur 5.7.



Figur 5.7

Integrationsgrænserne er løsninger til ligningen $\sin(x) = \cos(x)$.

Ved at betragte enhedscirklen ses at denne ligning i intervallet $[0, 2\pi]$ har løsningerne $\frac{\pi}{4}$ og $\frac{5\pi}{4}$.

Det søgte areal er derfor:

$$\alpha(M) = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} (\sin x - \cos x) dx = \left[-\cos x - \sin x \right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}$$

Da $\sin(\frac{\pi}{4}) = \cos(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, og $\sin(\frac{5\pi}{4}) = \cos(\frac{5\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ fås

$$\alpha(M) = 2\sqrt{2}$$

5.8 Øvelse

Betragt funktionerne

$$f(x) = -\frac{1}{2}x + 1 \quad \text{og} \quad g(x) = 1 - \sqrt{x}.$$

Skitsér de to grafer i samme koordinatsystem og beregn den eksakte værdi af arealet af det område der afgrænses af de to grafer.

Figur 5.9 viser grafen for en negativ funktion g . Her kan arealet A af området mellem grafen for g og førsteaksen bestemmes ved hjælp af sætning 5.3.

Da førsteaksen er graf for funktionen $f(x) = 0$, fås

$$A = \int_a^b (0 - g(x)) dx \\ = - \int_a^b g(x) dx$$

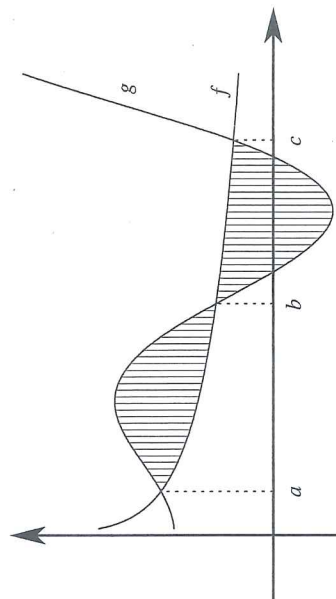
En anden formulering af resultatet er:

$$\int_a^b g(x) dx = -A.$$

Figur 5.9

For en negativ kontinuert funktion er integralet altså lig med *minus* arealet af området mellem grafen og førsteaksen (vi forudsætter at $a < b$).

5.10 Eksempel



Figur 5.11

For at bestemme et areal som det der er vist på figuren, må man først bestemme a , b , og c ved at løse ligningen $f(x) = g(x)$.

Da $g(x) \geq f(x)$ for $x \in [a; b]$ og $f(x) \geq g(x)$ for $x \in [b; c]$, er det søgte areal

$$\int_a^b (g(x) - f(x)) dx + \int_b^c (f(x) - g(x)) dx$$

5.12 Øvelse

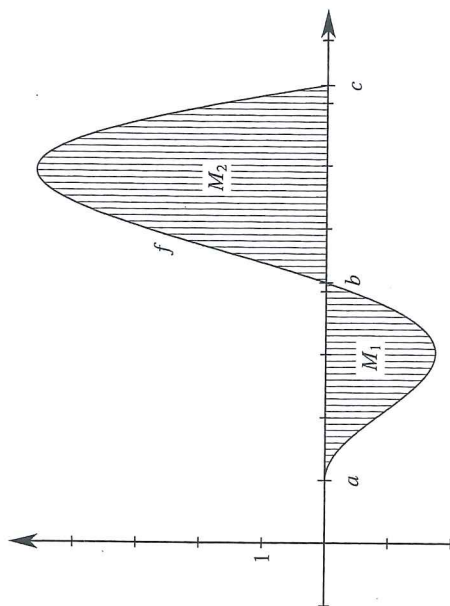
Bestem arealet af det todelte område mellem førsteaksen og grafen for funktionen $f(x) = \sin x$, $x \in [0; 2\pi]$.

5.13 Øvelse

Figuren viser grafen for en funktion f .

Om de skraverede områder på figuren oplyses at

$$\alpha(M_1) = 3 \quad \text{og} \quad \alpha(M_2) = 9.$$



Figur 5.14.

Angiv værdien af hvert af integralerne $\int_a^b f(x)dx$, $\int_b^c f(x)dx$ og $\int_a^c f(x)dx$.

5.15 Øvelse

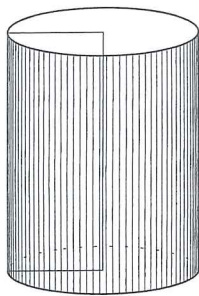
Tegn grafen for funktionen

$$f(x) = \begin{cases} -x+2 & \text{for } -1 \leq x \leq 4 \\ \frac{1}{2}x-4 & \text{for } 4 < x \leq 10 \end{cases}$$

Bestem ud fra figuren

$$\int_{-1}^{10} f(x)dx.$$

Ligesom visse punktmængder i planen har et areal, så har visse punktmængder i rummet et rumfang.



Figur 5.15.

Her vil vi kun betragte såkaldte omdrejningslegemer; et *omdrejningslegeme* er en punktmængde som kan fremkomme ved at rotere en *plan* punktmængde 360° omkring en akse. For eksempel er en cylinder et omdrejningslegeme fordi den kan fremkomme ved at rotere et rektangel omkring en af dets sider.



Figur 5.16. På et dækket bord kan der være mange omdrejningslegemer.

33 midt

Man kan vise at det omdrejningslegeme som fremkommer ved at rotere et grund-
område omkring førsteaksen, har et rumfang. Dette bevis vil vi ikke gå ind på.

5.17

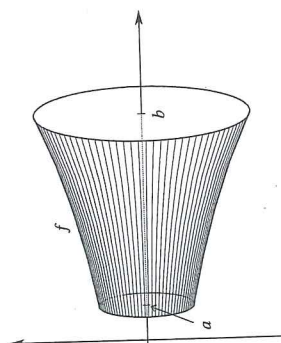
Rumfang af omdrejningslegeme.

Lad f være en kontinuert, ikke-negativ funktion defineret i det lukkede interval $[a; b]$, og lad M være grundområdet begrænset af linjerne med ligninger $x = a$, $x = b$, førsteaksen og grafen for f . Rumfanget V af det omdrejningslegeme der fremkommer når M roteres 360° omkring førsteaksen, er givet ved

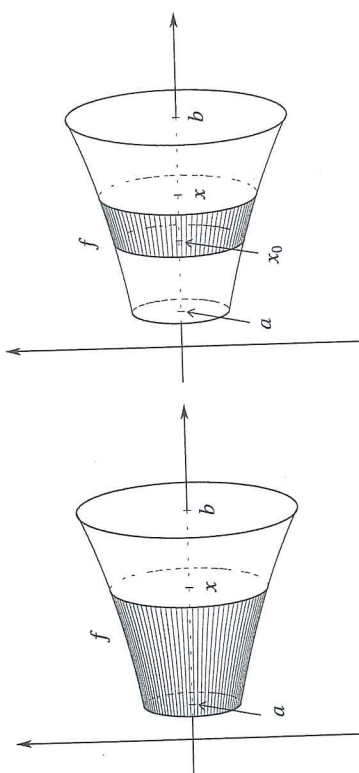
$$V = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx$$

Bevis. Vi vil nøjes med at bevise sætningen i det tilfælde hvor f er voksende. Svarende til arealfunktionen i afsnit 3 indfører vi her **volumenfunktionen med udgangspunkt a** . $V(x)$ betegner altså rumfanget af den del af omdrejningslegemet som ligger mellem a og x . Der gælder da at $V(a) = 0$, og $V(b)$ er det rumfang V vi søger.

Vi vil bevise at volumenfunktionen er stamfunktion til $\pi \cdot (f(x))^2$, altså at V er differentiel med $\pi \cdot (f(x))^2$ som afledet funktion.



Figur 5.18



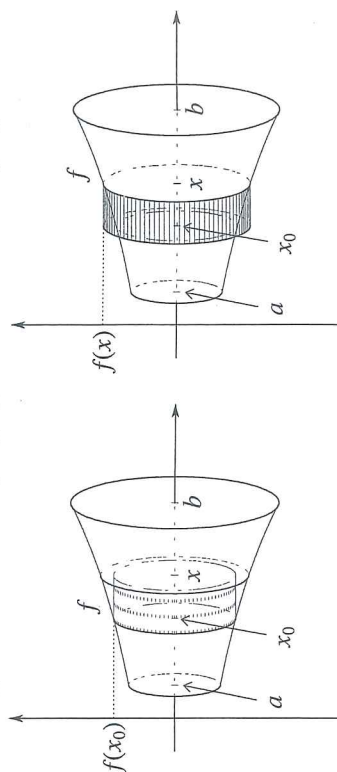
Figur 5.19.

Figur 5.20.

Lad altså x_0 være et vilkårligt tal i $[a; b]$ og lad x være større end x_0 . Funktionstilvæksten

$$V(x) - V(x_0)$$

er rumfanget af den del af omdrejningslegemet som er fremhævet på figur 5.20.



Figur 5.21.

Figur 5.22.

Da vi har antaget at funktionen f er voksende, er dette rumfang større end rumfanget af en cylinder med radius $f(x_0)$ og højde $x - x_0$. Endvidere er $V(x) - V(x_0)$ mindre end rumfanget af en cylinder med radius $f(x)$ og højde $x - x_0$. Da rumfanget af en cylinder med radius r og højde h er $\pi r^2 h$, fås heraf:

$$\pi \cdot (f(x_0))^2 \cdot (x - x_0) < V(x) - V(x_0) < \pi \cdot (f(x))^2 \cdot (x - x_0)$$

Ved at dividere igennem med det positive tal $x - x_0$ fås:

$$\pi \cdot (f(x_0))^2 < \frac{V(x) - V(x_0)}{x - x_0} < \pi \cdot (f(x))^2$$

Differenskvotienten for V ligger altså mellem $\pi \cdot (f(x_0))^2$ og $\pi \cdot (f(x))^2$.

Da f og dermed også $\pi \cdot (f(x))^2$ er kontinuert, gælder

$$\pi \cdot (f(x))^2 \rightarrow \pi \cdot (f(x_0))^2 \text{ for } x \rightarrow x_0$$

Derfor må det gælde at

$$\frac{V(x) - V(x_0)}{x - x_0} \rightarrow \pi \cdot (f(x_0))^2 \text{ for } x \rightarrow x_0^+$$

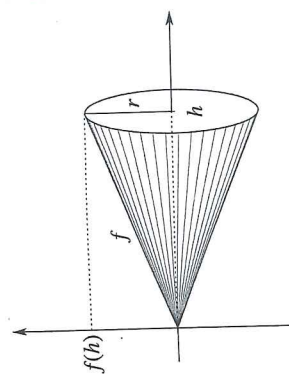
Dermed har vi bevist at V er differentiel fra højre i x_0 . Man kan på tilsvarende måde bevise at for $x_0 \in [a; b]$ har differenskvotienten for V en grænseværdi for x gående mod x_0 fra venstre, og at den også er $\pi \cdot (f(x_0))^2$.

Altså gælder at $V'(x) = \pi \cdot (f(x))^2$. Beviset for sætningen kan nu afsluttes på følgende måde:

$$V = V(b) - V(a) = [V(x)]_a^b = \int_a^b V'(x) dx = \int_a^b \pi \cdot (f(x))^2 dx = \pi \cdot \int_a^b (f(x))^2 dx$$

5.23 Eksempel

Vi vil bevise formelen for rumfanget af en kegle der har højde h og grundfladeradius r .



En sådan kegle kan fremkomme ved at rotere området begrænset af førsteaksen og grafen for den lineære funktion

$$f(x) = \frac{r}{h} \cdot x, \quad 0 \leq x \leq h$$

360° omkring førsteaksen. Ifølge sætning 5.17 er keglens volumen derfor

$$V = \pi \cdot \int_0^h \left(\frac{r}{h} \cdot x \right)^2 dx$$

Da r og h er konstanter, får vi nu:

$$V = \frac{\pi r^2}{h^2} \cdot \int_0^h x^2 dx = \frac{\pi r^2}{h^2} \cdot \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_0^h = \frac{1}{3} \pi h r^2$$

Vi ser at keglens rumfang kan bestemmes som en tredjedel af højden ganget med grundfladens areal.

5.24 Øvelse

Da $x^2 + y^2 = r^2 \Leftrightarrow y = \pm \sqrt{r^2 - x^2}$, kan vi se at grafen for funktionen

$$f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}, \quad -r \leq x \leq r$$

er en halvcirkel med centrum i $(0,0)$ og radius r . Ved at rotere området mellem førsteaksen og grafen for f omkring førsteaksen fremkommer en kugle med radius r . Vis at kuglen har rumfanget

$$V = \frac{4}{3} \pi r^3$$

5.25 Øvelse

Tegn i et koordinatsystem for $0 \leq x \leq 4$ graferne for funktionerne

$$f(x) = x + 1 \quad \text{og} \quad g(x) = 5$$

Beregn følgende tal

$$\text{a) } V_f = \pi \cdot \int_0^4 (f(x))^2 dx$$

$$\text{b) } V_g = \pi \cdot \int_0^4 (g(x))^2 dx$$

$$\text{c) } V_1 = V_g - V_f$$

$$\text{d) } V_2 = \pi \cdot \int_0^4 (g(x) - f(x))^2 dx$$

Hvert af de 4 tal kan fortolkes som rumfanget af et omdrejningslegeme. Gør i hvert tilfælde rede for hvilket omdrejningslegeme det er tale om.

Ved beregning af volumener er følgende regler nyttige:

- 5.26 Hvis området mellem graferne for to kontinuerte funktioner f og g hvor $0 \leq g(x) \leq f(x)$ for $a \leq x \leq b$ roteres 360° omkring førsteaksen, fremkommer et omdrejningslegeme med volumen

$$V_{f,g} = \pi \cdot \int_a^b (f(x))^2 dx - \pi \cdot \int_a^b (g(x))^2 dx = \pi \cdot \int_a^b ((f(x))^2 - (g(x))^2) dx$$

- 5.27 Hvis området mellem grafen for en kontinuert funktion f og linjen l med ligning $y = k$ hvor $k \leq f(x)$ for $a \leq x \leq b$ roteres 360° omkring l , fremkommer et omdrejningslegeme med volumen

$$V = \pi \cdot \int_a^b (f(x) - k)^2 dx$$

5.28 Øvelse

Benyt 5.17 til at bevise 5.26 og 5.27.

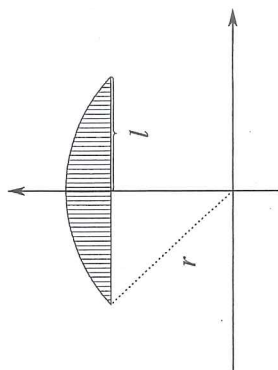
5.29 Øvelse

Figuren viser en cirkelbue der er en del af en cirkel med radius r .

a) Find en forskrift for den funktion f der har den viste cirkelbue som graf.

b) Vis at volumen af det omdrejningslegeme der fremkommer når det skraverede område drejes 360° omkring førsteaksen, er

$$V = \frac{4}{3} \pi r^3$$



Figur 5.30.

- c) Overvej at omdrejningslegemet ovenfor er det der bliver tilbage af en kugle hvis man borer et hul gennem centrum af kuglen. Sammenlign resultatet med formelen for en kugles rumfang.

5.31 Øvelse

a) Tegn grafen for funktionen $f(x) = -x^2 + 5$ for $0 \leq x \leq 2$.

b) Beregn volumen af det omdrejningslegeme der fremkommer når området mellem førsteaksen og grafen drejes 360° omkring førsteaksen.

c) Lad l være linjen med ligning $y = 1$. Beregn volumen af det omdrejningslegeme der fremkommer når området mellem l og grafen for f drejes 360° omkring l .

d) Lad m være linjen med ligning $y = -2$. Beregn volumen af det omdrejningslegeme der fremkommer når området mellem m og grafen for f drejes 360° omkring m .

6.6

Integration ved substitution

Lad g være en funktion som er differentiabel i et interval I med kontinuert afledet. Lad endvidere f være en funktion som er kontinuert i værdimængden for g . For $a, b \in I$ gælder da

$$\int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x) dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t) dt$$

Bevis. Da f er kontinuert, har den en stamfunktion F . Ifølge reglen for differentiation af sammensat funktion gælder:

$$(F(g(x)))' = F'(g(x)) \cdot g'(x) = f(g(x)) \cdot g'(x)$$

Heraf fremgår at $F(g(x))$ er en stamfunktion til $f(g(x)) \cdot g'(x)$, og derfor gælder:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x) dx &= [F(g(x))]_a^b = F(g(b)) - F(g(a)) \\ &= [F(t)]_{g(a)}^{g(b)} = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t) dt \end{aligned}$$

Hermed er sætningen bevist.

Når man skal anvende integration ved substitution, udnyttes sædvanligvis at reglen formelt svarer til at man erstatter (substituerer) $g(x)$ med t og $g'(x)dx$ med dt . Desuden ændres integrationsgrænserne fra "x-grænser" til "t-grænser".

Substitution:	$t = g(x)$ $dt = g'(x)dx$
Ny nedre grænse:	$g(a)$
Ny øvre grænse:	$g(b)$

6.7 Eksempel

Vi vil beregne integralet $\int_0^{\pi/2} (\sin x)^3 \cos x dx$ ved hjælp af substitution.

Vi sætter $t = g(x) = \sin x$. Så er $g'(x) = \cos x$.

Substitution:	$t = \sin(x)$ $dt = \cos(x)dx$
Ny nedre grænse:	$\sin(0) = 0$
Ny øvre grænse:	$\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$

Heraf fås:

$$\int_0^{\pi/2} (\sin x)^3 \cos x dx = \int_0^1 t^3 dt = [\frac{1}{4}t^4]_0^1 = \frac{1}{4}$$

6.8 Eksempel

Vi vil beregne integralet $\int_1^2 \frac{2x+3}{\sqrt{x^2+3x}} dx$

Ved hjælp af potensregnearbejde kan vi omskrive på følgende måde:

$$\int_1^2 \frac{2x+3}{\sqrt{x^2+3x}} dx = \int_1^2 (x^2+3x)^{-\frac{1}{2}} \cdot (2x+3) dx$$

Ved hjælp af substitutionen $t = x^2 + 3x$, $dt = (2x+3)dx$ finder vi nu:

$$\int_1^2 \frac{2x+3}{\sqrt{x^2+3x}} dx = \int_4^{10} t^{-\frac{1}{2}} dt = [2t^{\frac{1}{2}}]_4^{10} = 2\sqrt{10} - 4 \approx 2,325$$

6.9 Eksempel

Nogle gange kan vi ikke umiddelbart bruge substitution, men ved at gange med en konstant og med konstantens reciprokke tal kan vi få en integrand frem hvor substitution kan anvendes. Vi ved fra regnearbejdet 4.17 c) at det er lige meget om en faktor står uden for eller inden for integraltegnet.

For eksempel fås med substitutionen $t = 2x + 3$, $dt = 2dx$:

$$\begin{aligned} \int_{-2}^1 e^{2x+3} dx &= \int_{-2}^1 e^{2x+3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 dx = \frac{1}{2} \int_{-2}^1 e^{2x+3} 2 dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{-1}^5 e^t dt = \frac{1}{2} [e^t]_{-1}^5 = \frac{1}{2} (e^5 - e^{-1}) \approx 74,02. \end{aligned}$$

6.10 Øvelse

Beregn ved hjælp af stamfunktioner hvert af integralerne

a) $\int_0^2 (6x^2 + 8x) \sqrt{x^3 + 2x^2 + 20} dx$ b) $\int_0^{\frac{1}{4}} (4x+1)^7 dx$

6.11 Øvelse

Beregn den eksakte værdi af hvert af integralerne

a) $\int_4^5 \frac{x^2}{(x^3+1)^2} dx$ b) $\int_1^3 \frac{x^3 + \ln(x)}{x} dx$

Vink til b): Omskriv først til to integraler.

Tilnærmelsen bliver bedre og bedre jo mindre Δx vælges. Deraf fås idet f er differentiable at der gælder:

$$\frac{\Delta l}{\Delta x} \rightarrow \sqrt{1 + (f'(x))^2} \text{ for } \Delta x \rightarrow 0$$

Buylængdefunktionen $l(x)$ der angiver længden af buen fra a til x er altså differentiable med differentialkvotient

$$l'(x) = \sqrt{1 + (f'(x))^2}$$

Derfor er længden af buen fra a til b lig med

$$l_{ab} = l(b) - l(a) = \int_a^b l'(x) dx = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

Altså netop den længdeformel der står i sætning 8.11.

510v

550 m. dH

En cirkel med radius r har som bekendt en omkreds givet ved formelen $O = 2\pi r$. Man kan også tale om længden af andre krumme kurver, blot disse ikke er alt for sære. Der gælder:

8.11

Sætning

Lad f være en funktion som er differentiable med kontinuerligt differentialkvotient i et lukket interval $[a; b]$. Længden af grafen er

$$l_{ab} = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

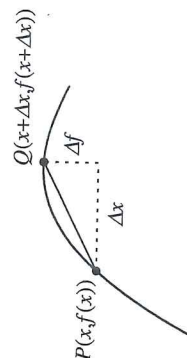
Vi vil give et løst argument for sætning 8.11. Figur 8.12 viser en del af grafen for en funktion der opfylder betingelserne i sætning 8.11. Figuren viser også det linjestykke som forbinder punkterne $P(x, f(x))$ og $Q(x + \Delta x, f(x + \Delta x))$ på grafen, $\Delta x > 0$.

Her gælder

$$|PQ| = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{(\Delta x)^2 + \left(\Delta x \cdot \left(1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2\right)\right)} = \Delta x \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}$$

Hvis Δx er tilstrækkeligt lille, er kurvelængden Δl mellem P og Q med god tilnærmelse lig med længden af linjestykket PQ :

$$\Delta l \approx \Delta x \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2} \Leftrightarrow \frac{\Delta l}{\Delta x} \approx \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}$$



Figur 8.12