Eksempel 10.7

Uligheden $5x - 8 \leq 2x + 3$ løses således:

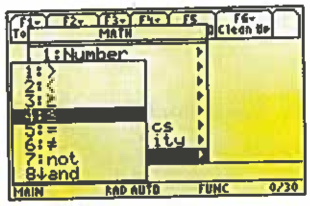
$5x - 8 \leq 2x + 3$	træk $2x$ fra på begge sider
$3x - 8 \leq 3$	læg 8 til på begge sider
$3x \leq 11$	divider med 3 på begge sider
$x \leq 11/3$	

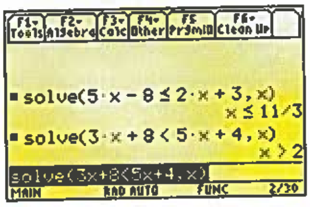
Anden generations computer
I slutningen af 1950'erne begyndte man at anvende transistorer i computerne. En transistor kan erstatte et radiorør. Den er mindre, har længere levetid og bruger langt mindre energi. Resultatet blev mindre og billigere computere.

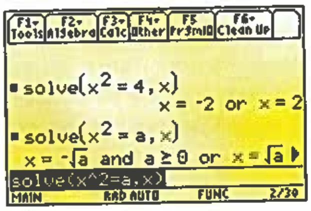
Eksempel 10.8

Uligheden $3x + 8 < 5x + 4$ løses således:

$3x + 8 < 5x + 4$	træk $5x$ fra på begge sider
$-2x + 8 < 4$	træk 8 fra på begge sider
$-2x < -4$	divider med -2 på begge sider
$x > 2$	







Grafregneren kan løse både ligninger og uligheder

ANDENGRADSLIGNINGER

I dette afsnit skal vi løse en anden type af ligninger med én ubekendt. De kaldes *andengradsligninger*, fordi den ubekendte størrelse forekommer i anden potens.

Kvadratisk ligning

Vi vil løse ligningen $x^2 = 4$. Det er let at indse, at $x = 2$ og $x = -2$ begge er løsninger. Både $(-2)^2$ og 2^2 giver nemlig 4. Vi skriver facit således ved hjælp af tegnet $\vee$, der betyder "eller":

$$x = 2 \ \vee \ x = -2$$

eller sommetider blot $x = \pm 2$.

Betragter vi ligningen $x^2 = 3{,}7$, får vi tilsvarende to løsninger:

$$x = \sqrt{3{,}7} \vee x = -\sqrt{3{,}7}$$

En ligning af typen $x^2 = a$ har for $a > 0$ altid de to løsninger:

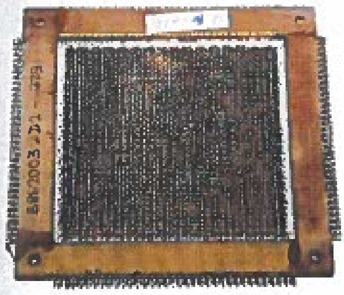
$$x = \sqrt{a} \vee x = -\sqrt{a}$$

Ligninger som $x^3 = 8$ har derimod kun én løsning, nemlig:

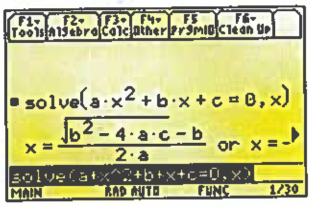
$$x = \sqrt[3]{8} = 2$$

Knud Erik Nielsen og Esper Fogh
Vejen til matematik A1
1. udgave 2. oplag 2005
HAX

En af de mest kendte andengenerations-computere var GIER, der blev fremstillet af det danske firma Regnecentralen i 1960'erne. På billedet ses GIER's styrepult. Selve regnemaskinen befinder sig i „klædeskabet" til venstre. Steno Museet



En lille bid af GIER's hukommelse. Billedet viser et ferritkernelager, der kan „huske" ca. 128 bytes. Steno Museet



Øvelse 10.9: Kvadratiske ligninger
Løs om muligt følgende ligninger:

1. $x^2 = 16$	2. $x^2 = 87$	3. $x^2 = 0$
4. $x^2 = -4$	5. $x^2 = 2\pi$	6. $x^2 = 625$

Generel andengradsligning

Generelt kan en andengradsligning skrives på formen:

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a \neq 0$$

Konstanterne a, b og c er bestemte tal, og x er ligningens ubekendte størrelse. Hvis konstanten a er nul, giver første led ax^2 nul, og i så fald er der ikke tale om en andengradsligning, men en førstegradsligning. Derfor må vi forlange, at a er forskellig fra nul. Konstanterne b og c kan derimod være alle mulige tal. Et konkret eksempel på en andengradsligning:

$$2x^2 - 7x - 4 = 0$$

Vi ser, at konstanterne i denne ligning er $a = 2$, $b = -7$ og $c = -4$.

Det er muligt ved hjælp af omskrivninger at isolere x i en andengradsligning, men da disse omskrivninger er ret besværlige, vil vi benytte lejligheden til at vise, at man også kan løse ligninger ved at anvende en *løsningsformel.*

Man kan én gang for alle bevise, at andengradsligninger har de løsninger, der er anført i rammen nedenfor.

Sætning 10.10: Løsning af andengradsligning

Løsning af andengradsligningen: $ax^2 + bx + c = 0, \quad a \neq 0$

Diskriminanten $d = b^2 - 4ac$ udregnes.

Hvis $d < 0$:		ingen løsninger
Hvis $d > 0$:	$x = \dfrac{-b \pm \sqrt{d}}{2a}$	to løsninger
Hvis $d = 0$:	$x = \dfrac{-b}{2a}$	én løsning

Bevis for sætning 10.10: Andengradsligning
Vi begynder med nogle omskrivninger af ligningen:

$ax^2 + bx + c = 0$	gang med $4a$ på begge sider
$4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0$	læg $b^2 - 4ac$ til på begge sider
$4a^2x^2 + 4abx + b^2 = b^2 - 4ac$	sæt $b^2 - 4ac = d$
$4a^2x^2 + 4abx + b^2 = d$	brug kvadratsætning 1
$(2ax + b)^2 = d$	

Den sidste omskrivning følger af kvadratsætning 1. Hvis man synes, det er svært at se, kan man i stedet vise, at omskrivningen er rigtig ved at gange den nederste parentes ud. Den skal give $4ax^2 + 4abx + b^2$ som i linien ovenfor. Sådan:

$$\begin{aligned}(2ax + b)^2 &= (2ax + b)(2ax + b)\\ &= 4a^2x^2 + 2axb + 2axb + b^2\\ &= 4a^2x^2 + 4axb + b^2\end{aligned}$$

Undervejs indførte vi størrelsen $d = b^2 - 4ac$, som man kalder andengradsligningens *diskriminant*. Vi nåede frem til ligningen $(2ax + b)^2 = d$, som er af typen $y^2 = d$, altså en kvadratisk ligning. Da d kan antage alle mulige værdier afhængigt af værdierne af a, b og c, må vi dele op i tre tilfælde efter d's fortegn, nemlig $d < 0$, $d = 0$ og $d > 0$:

Tilfælde 1, $d < 0$:
Da kvadratet $(2ax + b)^2$ ikke kan blive negativt, er der ingen løsninger.

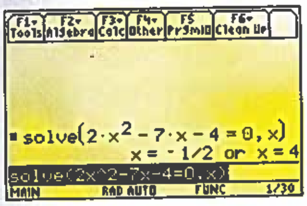
Tilfælde 2, $d = 0$:
Indsætter vi $d = 0$ i ligningen, får vi $(2ax + b)^2 = 0$. Denne ligning er opfyldt, hvis $2ax + b = 0$, dvs.:

$$\begin{aligned}2ax + b &= 0\\ 2ax &= -b\\ x &= \frac{-b}{2a}\end{aligned}$$

I dette tilfælde er der altså én løsning.

Tredie generations computer
I slutningen af 1960'erne begyndte man at bruge integrerede kredsløb i computere. Den nye teknik gjorde det muligt at fremstille mange kredsløb på et lille stykke silicium. Resultatet blev igen mindre, billigere og mere effektive computere.

Fjerde generations computer
Midt 1970'erne begyndte man at anvende mikroprocessorer i computere. En mikroprocessor indeholder mange tusinde transistoriserede kredsløb opbygget på et enkelt stykke silicium, som er mindre end en lillefingernegl. Resultatet blev igen mindre, billigere og mere effektive computere, som har ført os ind i en informationstidsalder.



Tilfælde 3, $d > 0$:

En kvadratisk ligning $y^2 = d$ har altid to løsninger $y = \pm\sqrt{d}$, når $d > 0$.

Vi får derfor:

$$2ax + b = \pm\sqrt{d}$$

Eller ved at flytte b over på den anden side og dividere igennem med $2a$:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{d}}{2a}$$

Andengradsligningen har altså to løsninger i dette tilfælde. Hermed er sætning 10.10 bevist.

Eksempel 10.11: Andengradsligning

Vi anvender formlen til at løse andengradsligningen:

$$2x^2 - 7x - 4 = 0$$

Først udregnes diskriminanten d:

$$\begin{aligned} d &= b^2 - 4ac \\ &= (-7)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-4) \\ &= 49 - (-32) = 81 \end{aligned}$$

Da diskriminanten er større end nul, ved vi, at ligningen har to løsninger. Vi indsætter konstanterne a, b og c i den tidligere nævnte formel og får:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{d}}{2a} = \frac{-(-7) \pm \sqrt{81}}{2 \cdot 2} = \frac{7 \pm 9}{4}$$

$$x = 4 \vee x = -\tfrac{1}{2}$$

Øvelse 10.12

Løs andengradsligningerne:

1. $x^2 - 5x + 6 = 0$
2. $x^2 + x + 4 = 0$
3. $2x^2 - 4x - 16 = 0$
4. $x^2 - 4x + 4 = 0$
5. $3x^2 + 9x + 6 = 0$
6. $-8x^2 - 4x + 1 = 0$
7. $12x^2 - x + 23 = 0$
8. $-7x^2 - 5x + 6 = 0$