Jesper Frandsen
Delt) gyldne snit - i kunst,
natur og matematik
Systime 2. udgave 1. oplag 1999

Det gyldne snit

Vi indleder med en definition af det gyldne snit.

Definition. Hvis det om linjestykket AB på fig. 1 gælder, at det er delt af punktet C, så

$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b} ,$$

siges C at dele linjestykket AB i ***det gyldne snit.***

Fig. 1

Lidt mere populært kan definitionen udtrykkes sådan:

$$\frac{\text{hele linjestykket}}{\text{det største stykke}} = \frac{\text{det største stykke}}{\text{det mindste stykke}} .$$

På fig. 1 er a = 4,7 cm, b = 2,9 cm, så a+b = 7,6 cm. Brøkerne bliver i dette tilfælde

$$\frac{a+b}{a} = \frac{7,6}{4,7} = 1,6 \quad \text{og} \quad \frac{a}{b} = 1,6 ,$$

så i dette tilfælde deler C linjestykket AB i det gyldne snit.

---

[1] Denne teori stammer fra prof. O. Schmidt (1913–96). Måske hentydede han hermed til, at Martin Ohm i *Die reine Elementar–Mathematik*, 1835, som den formentlig første brugte navnet 'det gyldne snit'.

Eksempel 1. Linjestykket på fig. 2 er *ikke* delt i det gyldne snit, fordi

$$\frac{7+3}{7} = 1,43 \quad \text{og} \quad \frac{7}{3} = 2,33, \text{ så } \frac{7+3}{7} \neq \frac{7}{3} .$$

Fig. 2

Hvis det på fig. 1 gælder, at a = 8, og C deler AB i det gyldne snit, vil vi bestemme b. Vha. definitionen finder vi, at

$$\frac{8+b}{8} = \frac{8}{b} \Leftrightarrow 8b+b^2 = 64 \Leftrightarrow b^2 + 8b - 64 = 0$$

$$\Leftrightarrow b = \frac{-8 \pm \sqrt{8^2+4\cdot 64}}{2} \Leftrightarrow b = 4,94 ,$$

da b er et positivt tal.

Hvis det på fig. 1 gælder, at det korte stykke har længden 8, dvs. b = 8, vil vi bestemme a, så C deler AB i det gyldne snit:

$$\frac{a+8}{a} = \frac{a}{8} \Leftrightarrow 8a+64 = a^2 \Leftrightarrow a^2 - 8a - 64 = 0$$

$$\Leftrightarrow a = \frac{8 \pm \sqrt{8^2+4\cdot 64}}{2} \Leftrightarrow a = 12,94 .$$

Sætning 1. C deler linjestykket AB i det gyldne snit, se fig. 3, netop når

$$\frac{a}{b} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

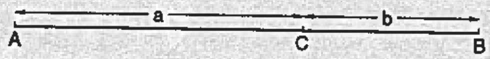


Fig. 3

Bevis. Med udgangspunkt i definitionen har vi, at

$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b} \Leftrightarrow ab + b^2 = a^2 \Leftrightarrow a^2 - ab - b^2 = 0 .$$

Nu er det hverken a eller b, vi skal bestemme, men forholdet $\frac{a}{b}$. Derfor divideres den sidste ligning med b^2, og den fremkomne andengradsligning løses med $\frac{a}{b}$ som den ubekendte :

$$\frac{a^2}{b^2} - \frac{ab}{b^2} - \frac{b^2}{b^2} = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{a}{b}\right)^2 - \frac{a}{b} - 1 = 0 \Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} .$$

Da a og b er længder, er $\frac{a}{b}$ positiv, så det er kun +, der kan bruges. ■

Bemærk, at da $\frac{a}{b} = \frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$, er iflg. definitionen $\frac{a+b}{a} = \frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$. Løsningerne til ligningen $x^2 - x - 1 = 0$, som vi mødte i beviset for sætning 1, møder vi igen og igen. De betegnes ofte, men desværre ikke altid, med Φ og Φ', hvor Φ er det græske bogstav store fi:

$$\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1{,}618034... \quad \text{og} \quad \Phi' = \frac{1-\sqrt{5}}{2} = -0{,}618034...$$

Bogstavet er måske valgt, fordi det er forbogstavet i den græske skrivemåde for den græske billedhugger Phidias (ca. 500–430 f. Kr.), som bl.a. ledede den skulpturelle udsmykning af Parthenon på Akropolis. Det fortælles, at han ofte brugte det gyldne snit i sine skulpturer.

Bemærk, at decimalerne i Φ og Φ' er de samme, og at

1) $\Phi^2 - \Phi - 1 = 0$ 2) $\Phi'^2 - \Phi' - 1 = 0$

3) $\Phi \cdot \Phi' = -1$ 4) $\Phi + \Phi' = 1$.

Netop hvis der er tale om et gyldent snit, gælder det altså iflg. sætning 1, at $\frac{a}{b} = \Phi$. Vi vil nu bestemme det reciprokke forhold $\frac{b}{a}$, og får

$$\frac{b}{a} = \frac{1}{\frac{a}{b}} = \frac{1}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} = \frac{2(1-\sqrt{5})}{(1+\sqrt{5})(1-\sqrt{5})} = \frac{2(1-\sqrt{5})}{-4} = -\frac{1-\sqrt{5}}{2} = -\Phi' = 0{,}6180...$$

Det bemærkelsesværdige ved dette resultat er, at når der er tale om et gyldent snit, er decimalerne i $\frac{a}{b}$ og $\frac{b}{a}$ ens, eller mere præcist, at

$$\frac{a}{b} - 1 = \frac{b}{a} . \qquad (1)$$

Vi vil undersøge, om der er andre tal, der opfylder dette, og sætter derfor $\frac{a}{b} = x$, hvorved (1) får udseendet

$$x - 1 = \frac{1}{x}$$

som løses:

$$x - 1 = \frac{1}{x} \Leftrightarrow x^2 - x = 1 \Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} .$$

Φ og Φ' er således de eneste tal med den egenskab, at hvis man trækker 1 fra tallet, fås det reciprokke tal, og Φ er det eneste *positive* tal med egenskaben. I fortsættelse af 1)–4) noteres

5) $\Phi - 1 = \frac{1}{\Phi}$ eller $\Phi = \frac{1}{\Phi - 1}$

6) $\Phi' - 1 = \frac{1}{\Phi'}$ eller $\Phi' = \frac{1}{\Phi' - 1}$.

Eksempel 2. Ovenstående får det til at se ud, som om Φ er noget specielt. Denne opfattelse underbygges af, at man ved udregninger med Φ og Φ' ofte får de samme decimaler:

a) $1{,}618^2 = 2{,}618$ dvs. $\Phi^2 = \Phi + 1$

b) $1{,}618^3 - 1{,}618^2 = 1{,}618$ dvs. $\Phi^3 - \Phi^2 = \Phi$

c) $0{,}618 \cdot 2{,}618 = 1{,}618$ dvs. $(\Phi-1)(\Phi+1) = \Phi$

d) $0{,}618^2 = 1 - 0{,}618$ dvs. $(\Phi-1)^2 = 1 - (\Phi-1)$

e) $2{,}618 \cdot 1{,}618 = 2{,}618 + 1{,}618$ dvs. $(\Phi+1)\Phi = \Phi + 1 + \Phi$

f) $\frac{1}{1{,}618^2} = 1 - 0{,}618$ dvs. $\frac{1}{\Phi^2} = 1 - (\Phi-1)$.

Da $\frac{\Phi}{1} = \Phi$ er linjerne på fig. 4 a–b iflg. sætning 1 begge delt i det gyldne snit, idet den korte del kan anbringes i begge ender.

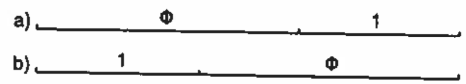


Fig. 4

Vha. situationen på fig. 4 kan det beregnes, hvor langt inde på et linjestykke de gyldne snit ligger. Det svarer nemlig til den brøkdel, 1 udgør af hele linjestykkets længde, dvs. $\Phi+1$:

$$\frac{1}{\Phi+1} = \frac{1}{2{,}618} = 0{,}382 \approx 38\% .$$

Det gælder altså, at

et linjestykkes gyldne snit ligger 38% inde på linjestykket.

Eksempel 3. Hvis et linjestykke har længden 7 cm, ligger de gyldne snit $0{,}38 \cdot 7$ cm = 2,67 cm inde på linjen. Tilsvarende fås, at de gyldne snit ligger 6,46 cm inde på en 17 cm lang linje.

Hvis det gyldne snit ligger 5 cm inde på et linjestykke, kan vi bestemme linjestykkets længde a:

$$0{,}38 \cdot a = 5 \Leftrightarrow a = \frac{5}{0{,}38} = 13{,}16.$$

2. Gyldne snit i billeder

Mens det gyldne snit i matematisk forstand er tæt knyttet til den eksakte værdi af Φ, fortolker man det mere bredt i kunst, så linjer, der ligger ca. 38% inde i en billedflade, kaldes gyldne snit. Da både de lodrette og de vandrette sider i billedet har to gyldne snit, bliver der på en rektangulær billedflade fire gyldne snit, se fig. 1. Hvis de gyldne snit i et billede er markante, danner de synlige nye rektangler, og i nogle af disse er de oprindelige gyldne snit også gyldne snit; eksempelvis er CG et gyldent snit i rektanglet BDHF, jvf. sætning 2, kap. 1.

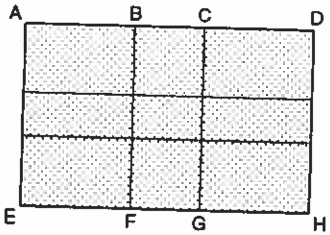


Fig. 1

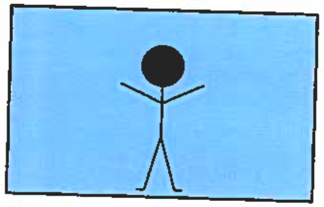


Fig. 2a

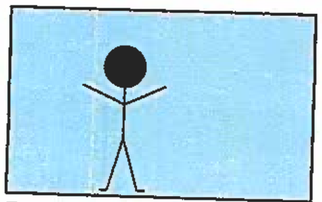


Fig. 2b

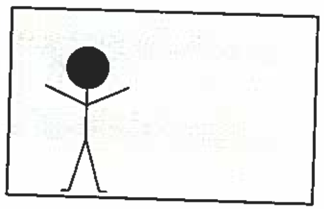


Fig. 2c

Når det gyldne snit er så omtalt og kendt, skyldes det, at det er et simpelt kompositorisk princip, der gennem tiderne igen og igen er benyttet i kunstværkers opbygning og til at pege på vigtige detaljer, der dermed kan få en større vægt i analyse og fortolkning. Når dette er almindeligt accepteret, skyldes det bl. a. tradition og psykologiske faktorer, men da noget tilsvarende senere omtales i forbindelse med *det gyldne rektangel*, vil vi ikke komme nærmere ind på det her.

De mange forekomster af gyldne snit kan skyldes, at hvis man på et billede anbringer motivet symmetrisk mht. billedfladens midterakse, giver det et statisk præg, se fig. 2a.

Anbringes det derimod lidt forskudt, får billedet et mere dynamisk udtryk. Da det gyldne snit kun afviger med ca. 12% fra midterlinjen, ses det, at ønsket om dynamik kan medvirke til den ofte forekommende brug af det gyldne snit som formskabende element, fig. 2b. Forskydes motivet ret meget mere vil billedet ofte 'vælte', fig. 2c.

En kendsgerning er det, at man, bevidst eller ubevidst, tiltrækkes af de steder i billedfladen, hvor de gyldne snit ligger, og dermed især af de fire punkter hvor de skærer hinanden. Det giver de elementer, der er anbragt disse steder, større betydningsindhold.

Når en kunstner komponerer sit værk, er det naturligvis de samme mekanismer, der – igen bevidst eller ubevidst – får kunstneren til at benytte de gyldne snit. Det skal hertil bemærkes, at (næsten) alle kunstnere kender begrebet, og vi skal senere se eksempler på, at kunstnere vedkender sig en bevidst anvendelse af det gyldne snit. Når ordet bevidst benyttes, er det fordi, der i perioder har været stillet så ubønhørlige krav om klassiske kompositioner i billeder, at det har virket som så snærende krav til kunstnerne, at det har været naturligt at gøre oprør – og i sådanne perioder og for sådanne kunstnere vil en anvendelse af det gyldne snit ofte være ubevidst. I Danmark var det fx tilfældet i en periode efter C.W.Eckersberg (1783–1853), der sammen med andre stillede store klassiske krav til komposition. Det var – og er stadig? – også tilfældet i tiden efter ca. 1960. Her passede det gyldne snit ikke med den fremherskende marxistiske ideologi, der ikke opererer med tidløse æstetiske værdier, da alt er historisk betinget. Det gyldne snit blev, sammen med andre klassiske kompositionsprincipper, opfattet som resterne af borgerskabets forsøg på at bestemme, hvad der er god smag. Man her ikke underkende betydningen af, at det gyldne snit er det eneste kompositoriske princip, der er kendt, og som har et specielt navn. Alene det gør, at man er mere bevidst om det.

Vi vil herefter se på nogle eksempler, hvor det gyldne snit er en del af det kompositoriske princip.

3

Konstruktion

Når en kunstner i ældre tid bevidst benyttede det gyldne snit, konstruerede vedkommende det ofte på en bestemt måde – formentlig pga. tradition. Vi vil derfor se nærmere på denne konstruktion, der i øvrigt kan ses i mange værker om billedanalyse. For at se hvori problemet består, laver vi først en analyse, derefter selve konstruktionen, og til sidst bevises så, at den er rigtig.

Analyse. Med udgangspunkt i fig. 12 skal vi bestemme punktet C, så det deler AB i det gyldne snit.

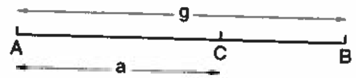


Fig. 12

Med figurens betegnelser skal det, jvf. sætning 1, kap. 1, gælde, at

$$\frac{|AB|}{|AC|} = \frac{g}{a} = \Phi \,.$$

Det er $|AB| = g$, der er kendt, og a der skal bestemmes. Vi laver derfor følgende omskrivninger, idet vi udnytter, at $\frac{1}{\Phi} = \Phi - 1$:

$$\frac{|AB|}{|AC|} = \frac{g}{a} = \Phi \Leftrightarrow \frac{1}{\Phi} \cdot g = a \Leftrightarrow (\Phi - 1)g = a \Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} - 1\right) \cdot g = a \Leftrightarrow \frac{\sqrt{5}-1}{2} \cdot g = a \Leftrightarrow \frac{\sqrt{5}}{2}g - \frac{1}{2}g = a \,.$$

Det ses heraf, at $|AC|$ kan konstrueres, hvis $\frac{1}{2}\sqrt{5}\,|AB|$ og $\frac{1}{2}|AB|$ kan konstrueres. Da $\frac{1}{2}|AB|$ er let at konstruere, består problemet i at konstruere den første. Hertil tegnes en retvinklet trekant, med kateterne $|AB| = g$ og $\frac{1}{2}|AB| = \frac{1}{2}g$, se fig. 13. Vha. Pythagoras læresætning kan hypotenusen nu bestemmes:

$$|AD|^2 = (\tfrac{1}{2}g)^2 + g^2 = \tfrac{1}{4}g^2 + g^2 = \tfrac{5}{4}g^2 \Leftrightarrow |AD| = \tfrac{\sqrt{5}}{2}|AB|$$

– hvilket netop var den ønskede længde, så analysen er slut.

Konstruktion. Idet AB er det givne linjestykke, vil vi gå frem i en række skridt, der henviser til fig. 14.

1. Punktet D afsættes, så BD er halvt så lang som AB, og så BD står vinkelret på AB.
2. Linjen AD tegnes.

3. Med centrum i D og radius $|DB|$ tegnes en cirkelbue. Det punkt, hvori den skærer AD, kaldes E, se fig. 14.
4. En ny cirkelbue tegnes. Denne gang med centrum i A og med radius $|AE|$. Punktet, hvor cirklen skærer AB, kaldes C.

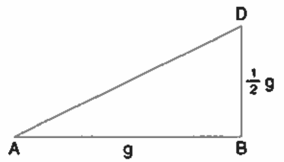


Fig. 13

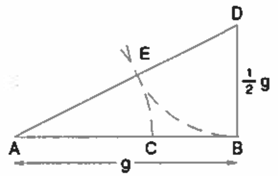


Fig. 14

Påstand. C deler AB i det gyldne snit.

Bevis. Idet vi som på fig. 13 sætter $|AB| = g$, er $|BD| = \frac{1}{2}g$ iflg. pkt. 1 i konstruktionen. Da ΔABD er retvinklet, svarer situationen til den, vi havde under analysen, så $|AD| = \frac{1}{2}\sqrt{5}g$. Idet $|DE| = |DB| = \frac{1}{2}g$ kan vi bestemme $|AE|$:

$$|AE| = |AD| - |DE| = \frac{\sqrt{5}}{2}g - \frac{1}{2}g .$$

Da $|AE| = |AC|$, har vi så, at $|AC| = \frac{1}{2}\sqrt{5}g - \frac{1}{2}g$, og vi kan nu se på det ønskede forhold:

$$\frac{|AB|}{|AC|} = \frac{g}{\frac{\sqrt{5}}{2}g - \frac{1}{2}g} = \frac{2}{\sqrt{5}-1} = \frac{2(\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = \Phi ,$$

hvormed det ønskede er vist. ■

Som omtalt i den korte indledning kendte grækerne det gyldne snit – selv om de ikke kaldte det sådan. De talte om at *dele et linjestykke i yderste og mellemste forhold*. Konstruktionen og beviset for dens rigtighed findes i Euklids Elementer, bog 2, sætning 11:

Euklid II. 11. At dele en given ret linje således, at det rektangel, der indesluttes af hele linjen og det ene af stykkerne, er lig med kvadratet på det andet stykke.

For at se sammenhængen med vores formulering, benyttes linjestykket på fig. 15, hvor C deler AB i det gyldne snit. Vha. definitionen fås

$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b} \quad \Leftrightarrow \quad (a+b)b = a^2 .$$

Her er a+b (hele linjen) og b (det ene af stykkerne) siderne i det rektangel Euklid omtaler, mens a^2 er kvadratet på det andet stykke.

Fig. 15

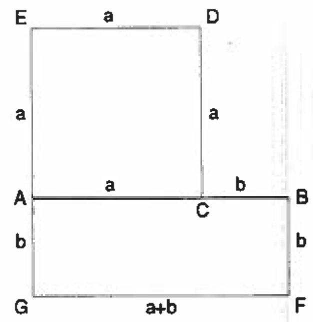


Fig. 16

Geometrisk kan Euklids formulering vha. fig. 15–16 illustreres således:

> *Idet AB er givet, skal punktet C bestemmes, så arealet af kvadratet ACDE er lig med arealet af rektanglet ABFG.*

For et nærmere studie af Euklids metode henvises til opgaverne.

Euklid levede ca. 300 f. Kr. Man mener ikke, at han var en original matematiker, men at hans fortjeneste bestod i at samle og udgive den på den tid kendte matematik. Det fylder 13 (!) bøger, der er præget af en imponerende logisk opbygning og ligeså imponerende resultater. Som omtalt i indledningen er det gyldne snit ikke omtalt som et kompositorisk princip hos grækerne, men 'kun', som det ses ovenfor, som et matematisk begreb. Når det af mange alligevel hævdes, at grækerne brugte det i arkitektur mm., kan det godt være rigtigt. Således mener mange, at det var kendt allerede på Pythagoras tid, men at Euklid fjernede dette og mange andre begreber, så der kun var den rene matematik tilbage; dette kan også gælde en del af den talmystik, der fandtes, og som vel især forbindes med Pythagoras navn. Det kan altså være, at det gyldne snit som æstetisk begreb bevidst er fjernet.

5

12. Fibonaccital

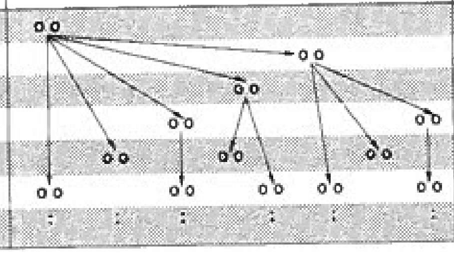
Vi vil nu foretage, hvad der ser ud til at være et stort spring mht. emne, idet vi vil se på de såkaldte Fibonaccital, der skyldes Leonardo af Pisa, 1175–1225(?). Han er mere kendt under sit tilnavn Fibonacci, der betyder søn af Bonacci. Han skrev i 1202 bogen *Liber abaci* (abacus: kugleramme), der kendes i en håndskrevet afskrift fra 1228. *Liber abaci* er en omfattende bog på 459 sider i 15 kapitler, og var især beregnet for mennesker, der skulle udføre praktiske beregninger, fx handelsmænd. Den indeholder den aritmetiske og algebraiske viden, man havde på den tid, og kom til at spille en afgørende rolle for matematikkens udvikling i Europa i de følgende århundreder. Mod den tids sædvane er der i bogen konsekvent benyttet arabertal, hvorfor den opfattes som 'skyldig' i, at vi i dag anvender arabertal. Det menes også, at det er Fibonacci, der indførte brøkstregen.

Fig. 1. Fibonacci af Bertel Thorvaldsen. Busten er lavet til opstilling i Pantheon i Rom, hvor den skulle stå sammen med buster af andre berømtheder – men den blev aldrig anbragt der. Den står nu i Thorvaldsens Museum. ©Thorvaldsens Museum.

Liber abaci indeholder en lang række problemer og deres løsning. Et af problemerne ser lidt omskrevet således ud:

En kaninbestand består fra begyndelsen af et kønsmodent par. Hver kønsmodent par føder et nyt par hver måned, og kaninerne bliver kønsmodne en måned efter fødslen.
Hvordan vokser antallet af kaninpar efterhånden som månederne går?

For at orientere sig i problemet er det som oftest en god idé at illustrere situationen; det er for de første 6 måneder gjort i skemaet.

Måned nr.	Kaninpar	Nye par	Par i alt
0		0	1
1		1	2
2		1	3
3		2	5
4		3	8
5		5	13
:	:	:	:

Det er løsningen af dette problem, der skaber Fibonaccitallene, og disse er for de første 12 måneder angivet i *Liber abaci*.

Vi vil først bestemme Fibonaccitallene, og senere se på en række af deres egenskaber – der er nemlig mange.

Hvis man fortsætter skemaet, opdager man (?), at de to talkolonner til højre vokser på samme måde, hvorfor vi kan nøjes med at betragte den ene. Det er traditionelt kolonnen under 'nye par' fra og med måned nr. 1:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, \ldots$$

Det er denne følge af tal, der kaldes *Fibonaccifølgen*, mens det enkelte tal kaldes et *Fibonaccital*. Det fremgår, at hvert Fibonaccital er summen af de to foregående Fibonaccital – dette slår vi fast i en definition.

Definition. Ved ***Fibonaccifølgen*** forstås den følge af tal $F_1, F_2, F_3, \ldots, F_n, \ldots$, hvor $F_1 = F_2 = 1$, og det for $n > 1$ gælder, at

$$F_{n+1} = F_{n-1} + F_n \,.$$

F_n kaldes det n'te ***Fibonaccital***.

I det efterfølgende vil vi af bekvemmelighedshensyn undertiden forkorte de to begreber til hhv. *Fi-tal* og *Fi-følgen* – vi skal snart se, at disse forkortelser er mere sigende, end det umiddelbart ser ud til.

Ovenstående måde at frembringe Fi-tallene på er den historisk korrekte, men modellen er for 'stiv', til at kunne overføres til naturen. Således forudsætter den skarpe grænser mellem generationerne, at søskende parrer sig, der tages

6

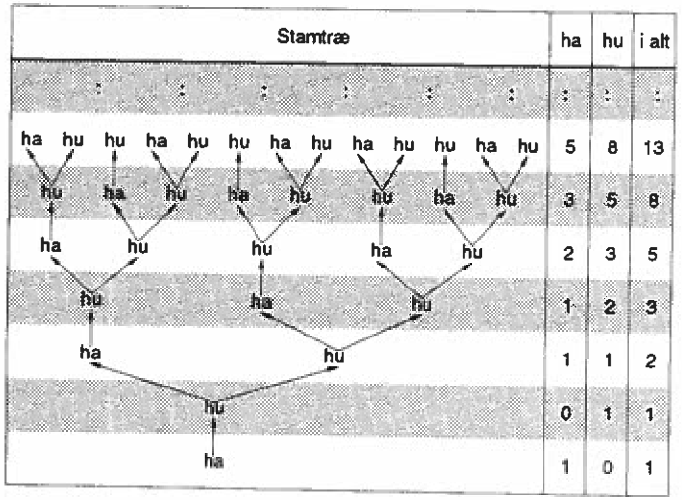
ikke højde for degeneration, mangel på føde og plads, forurening, menneskers eller dyrs jagt på kaninerne mm. Men tallene med deres egenskaber er en elegant løsning på det problem, der blev stillet.

Senere har det imidlertid vist sig, at Fi-tallene på en anden og mere spændende måde findes i naturen, nemlig i forbindelse med en hanbis stamtræ. Bierne hører til en gruppe af insekter på i alt ca. 110.000 arter. Et af denne gruppes karakteristika er den måde, hvorpå de formerer sig. En bidronning samler ret tidligt i sin karriere sæd fra et meget stort antal hanbier. Derefter begynder den så at producere æg, og reglen er nu, at

- et ubefrugtet æg bliver til en hanbi,
- et befrugtet bliver til en hunbi.

Det betyder, at en hanbi kun har en mor, mens en hunbi har såvel en mor som en far. Da dronningen er i stand til at gemme den indsamlede sæd i flere år, kan den på grundlag af oplysninger fra arbejderne (det er de ufrugtbare hunner) regulere kønsfordelingen i bikuben, så den imødekommer det akutte behov. Der er således ikke tvivl om, hvilket køn der er det mest værdifulde i bikuberne i denne sammenhæng. Groft sagt har hanbierne kun en funktion, nemlig at være dronningen behjælpelig med sæd, så æg kan befrugtes for at blive til værdifulde hunbier.

Vi skal, som omtalt ovenfor, se på en hanbis stamtræ - og de første generationer fremgår af skemaet. Her er en hanbi betegnet med *ha*, og en hunbi med *hu*.



Betragter vi hanbien, vi skal lave stamtræet for, stammer den fra et ubefrugtet æg, og har kun en mor, dvs. forældregenerationen består kun af en hunbi. Da denne stammer fra et befrugtet æg, har den såvel en mor som en far, derfor er der både en hanbi og en hunbi i bedsteforældregenerationen. Således kan man fortsætte, og til højre ses antallet af hhv. han- og hunbier i den pågældende generation, samt det samlede antal bier i den pågældende generation.

I skemaet med stamtræet ses det, at Fibonaccitallene straks dukker op i de to yderste kolonner, og fra bedsteforældregenerationen også i den sidste!

Fibonaccitallene vokser ret hurtigt, hvilket fremgår af skemaet nedenfor, hvor de første 20 er angivet - desuden kan nævnes, at $F_{30} = 834.020$.

$F_1 = 1$	$F_6 = 8$	$F_{11} = 89$	$F_{16} = 987$
$F_2 = 1$	$F_7 = 13$	$F_{12} = 144$	$F_{17} = 1597$
$F_3 = 2$	$F_8 = 21$	$F_{13} = 233$	$F_{18} = 2584$
$F_4 = 3$	$F_9 = 34$	$F_{14} = 377$	$F_{19} = 4181$
$F_5 = 5$	$F_{10} = 55$	$F_{15} = 610$	$F_{20} = 6765$

Skal man bestemme fx F_{50}, er det et pænt arbejde, både pga. tallenes størrelse, men også fordi det er nødvendigt at bestemme alle Fibonaccitallene op til F_{50}. Imidlertid findes der en formel, der netop angiver det n'te Fibonaccital:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$$

Formlen kaldes *Binets formel*, og er opkaldt efter en fransk matematiker og fysiker, der levede 1786-1856. Han fandt i 1843 denne overraskende formel, men formlen var kendt af bl.a. Leonhard Euler (1707-83) og Daniel Bernoulli (1700-82) ca. 100 år før. Binet fandt den uafhængigt af dem, og da de to andres navne forbindes med mange store resultater, kan de sagtens 'leve' med, at denne formel bærer Binets navn.

En af grundene, til at Binets formel virker så overraskende, er, at den indeholder $\sqrt{5}$, der er et irrationalt tal, mens Fi-tal er hele tal! Senere gives et bevis for Binets formel.

Hvis man på dette tidspunkt forsøger at få overblik over de hidtil omtalte emner, vil et naturligt spørgsmål være, hvad Fibonaccitallene har med det gyldne snit og/eller rektangel at gøre. Et første fingerpeg får vi ved at se på Binets formel, hvor de to brøker netop er Φ og Φ', og derfor kan formlen også skrives som

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\Phi^n - \Phi'^n) .$$

Det er for at antyde denne forbindelse, at vi har valgt forkortelsen Fi–tal.

Vi betragter herefter Fibonaccifølgen

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, \ldots ,$$

og tager nu i rækkefølge Fi–tallene og dividerer med det nærmest foregående Fi–tal:

$$\frac{1}{1} = 1 \ , \ \frac{2}{1} = 2 \ , \ \frac{3}{2} = 1{,}5 \ , \ \frac{5}{3} = 1{,}\overline{6} \ , \ \frac{8}{5} = 1{,}6 \ , \ \frac{13}{8} = 1{,}625$$

$$\frac{21}{13} = 1{,}61538 \ , \ \frac{34}{21} = 1{,}61905 \ , \ldots , \ \frac{233}{144} = 1{,}61806\ldots \ .$$

Det ser ud som om, vi nærmer os Φ, jo længere vi kommer frem i Fi–følgen, og tager vi F_{18} og F_{19}, fås

$$\frac{F_{19}}{F_{18}} = \frac{4181}{2584} = 1{,}6180341 ,$$

hvilket stemmer overens med Φ på 7. decimal.

At det faktisk er Φ, der er grænseværdien, fremgår af følgende sætning.

Sætning 1. Idet F_n er det n'te Fibonaccital, gælder det, at

$$\frac{F_n}{F_{n-1}} \to \Phi \quad \text{for} \quad n \to \infty \ .$$

Bevis. Da vi som omtalt senere beviser Binets formel, vil vi benytte den her, men først ser vi på et par grænseværdier, vi får brug for.

Da $\Phi > 1$ og $0 < \Phi' < 1$, vil det gælde, at

$$\Phi^n \to \infty \text{ for } n \to \infty \qquad \text{og} \qquad \Phi'^n \to 0 \text{ for } n \to \infty ,$$

så

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\Phi'^n}{\Phi^{n-1}} = 0 \quad \text{og} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\Phi'^{n-1}}{\Phi^{n-1}} = 0.$$

Vi laver nu følgende omskrivninger:

$$\frac{F_n}{F_{n-1}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{5}}(\Phi^n - \Phi'^n)}{\frac{1}{\sqrt{5}}(\Phi^{n-1} - \Phi'^{n-1})} = \frac{\Phi^n - \Phi'^n}{\Phi^{n-1} - \Phi'^{n-1}} = \frac{\Phi - \frac{\Phi'^n}{\Phi^{n-1}}}{1 - \frac{\Phi'^{n-1}}{\Phi^{n-1}}}$$

Benyttes nu de to grænseværdier, vi fandt ovenfor, fås

$$\frac{F_n}{F_{n-1}} \to \Phi \quad \text{for} \quad n \to \infty$$

hvormed det ønskede er vist. ■

97

8

18. Lucasfølger

Når der i de foregående kapitler er gjort en del ud af Fi–følgen, skyldes det traditionen, og den meget tætte forbindelse med Φ vi adskillige gange har set, men også fordi Fibonaccitallene i sig selv er interessante og indeholder mange overraskelser. Nu er Fibonaccifølgen kun en af de såkaldte *L–følger* (Lucas–følger), og da disse også i denne sammenhæng er interessante, vil vi se nærmere på dem. Det er de følger, $a_1, a_2, a_3, \dots$, der opfylder, at

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}\ , \ n > 2.$$

Nedenfor ses to andre eksempler på L–følger:

$$3, 7, 10, 17, 27, 44, 71, \dots \qquad (1)$$

$$-3, 1, -2, -1, -3, -4, -7, \dots \qquad (2)$$

I (1) dannes nu forholdene $\frac{a_n}{a_{n-1}}$, svarende til hvad vi gjorde for Fibonaccifølgen:

$$\frac{7}{3} = 2{,}333\ ,\ \frac{10}{7} = 1{,}429\ ,\ \frac{17}{10} = 1{,}7\ ,\ \frac{27}{17} = 1{,}588\ ,$$

$$\frac{44}{27} = 1{,}630\ ,\ \frac{71}{44} = 1{,}614\ ,\ \frac{115}{71} = 1{,}620\ ,\ \frac{186}{115} = 1{,}617\ ,\ \dots,$$

der utroligt nok også ser ud til at gå mod Φ! Prøv selv med (2).

Før dette undersøges nærmere, vil vi se på L–følgernes opbygning. I skemaet er a_i udtrykt ved a_1 og a_2, og til højre er F_i angivet (vi slap dem altså ikke helt!):

i	a_i	F_i
1	$a_1 = 1 \cdot a_1$	$F_1 = 1$
2	$a_2 = 1 \cdot a_2$	$F_2 = 1$
3	$a_3 = 1 \cdot a_1 + 1 \cdot a_2$	$F_3 = 2$
4	$a_4 = 1 \cdot a_1 + 2 \cdot a_2$	$F_4 = 3$
5	$a_5 = 2 \cdot a_1 + 3 \cdot a_2$	$F_5 = 5$
6	$a_6 = 3 \cdot a_1 + 5 \cdot a_2$	$F_6 = 8$
7	$a_7 = 5 \cdot a_1 + 8 \cdot a_2$	$F_7 = 13$
:	: : :	: :

9

Man opdager hurtigt (?), at koefficienterne til a_1 og a_2 er Fibonaccital, og kan let vise, at

$$a_n = F_{n-2}a_1 + F_{n-1}a_2\,, \quad n > 2\,. \qquad (3)$$

Der er hermed skabt en forbindelse mellem Fibonaccifølgen og den vilkårlige L-følge. Dette sætter os i stand til at bekræfte den tidligere fremsatte formodning.

Sætning 1. Hvis $a_1, a_2, a_3, \ldots$ er en L-følge, gælder det, at

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} \to \Phi \quad \text{for } n \to \infty\,.$$

Bevis. Vi danner forholdet $\frac{a_n}{a_{n-1}}$, omskriver det vha. (3), forkorter med a_2F_{n-2} og lader til sidst n gå mod uendelig:

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{F_{n-2}a_1 + F_{n-1}a_2}{F_{n-3}a_1 + F_{n-2}a_2} = \frac{\frac{a_1}{a_2} + \frac{F_{n-1}}{F_{n-2}}}{\frac{F_{n-3}}{F_{n-2}}\frac{a_1}{a_2} + 1} \to \frac{\frac{a_1}{a_2} + \Phi}{\frac{1}{\Phi}\frac{a_1}{a_2} + 1} \quad \text{for } n \to \infty\,.$$

Denne grænseværdi ligner ikke umiddelbart, den vi forventede, men ved at forlænge med Φ fås det ønskede:

$$\frac{\frac{a_1}{a_2} + \Phi}{\frac{1}{\Phi}\frac{a_1}{a_2} + 1} = \frac{\left(\frac{a_1}{a_2} + \Phi\right)\Phi}{\frac{a_1}{a_2} + \Phi} = \Phi\,.$$

■

Blandt L-følgerne har også *Lucasfølgen*, $L_1, L_2, L_3, \ldots$, været genstand for stor interesse. Den er bestemt ved, at $L_1 = 1$ og $L_2 = 3$, hvorfor dens begyndelse ser sådan ud:

1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, ...

De enkelte tal i følgen kaldes *Lucastal*. Disse og følgen har fået navn efter Edouard Lucas, som vi tidligere har mødt, da det var ham der opdagede Fibonaccitallene i Pascals trekant.

Der er mange sammenhænge mellem Lucas- og Fibonaccital, fx fås af (3), at

$$L_n = F_{n-2} + 3F_{n-1}\,, \quad n > 2\,.$$

Det er også let at vise, at følgende simple formel gælder

$$L_n = F_{n-1} + F_{n+1}\,, \quad n > 1\,. \qquad (4)$$

Denne sammenhæng giver mulighed for, på en let måde, at vise, at

$$L_n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \qquad (5)$$

Det er ikke meningen at undersøge Lucastallene på samme grundige måde som Fibonaccitallene. Det overlades til læseren at gå på opdagelse, og nedenfor følger et par pudsigheder, der er grydeklare.

Fibonaccital i botanik

Vi vil nu bevæge os over i botanikken, hvor vi vil se nærmere på, hvordan en plantes blade er placeret på stængelen. Et stykke nede på stængelen vælges et blad, som vi giver nr. 0, se fig. 11.

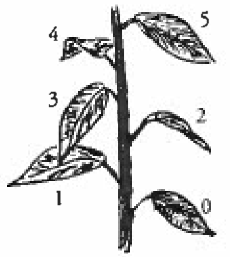


Fig. 11

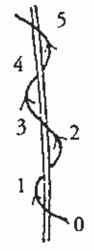


Fig. 12

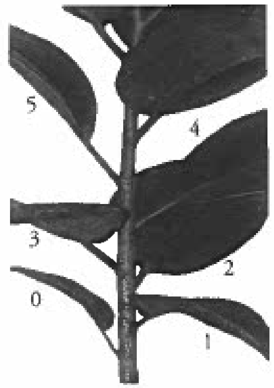


Fig. 13

Fra dette blad bevæger vi os den korteste vej op til det næste blad, og det får nr. 1; således fortsættes. Det viser sig nu, at det giver en spiralformet bane op ad stængelen, se fig. 12, som vi standser, når vi første gang møder et blad, der sidder præcis lodret over nr. 0. På fig. 11 sker det ved blad nr. 5, som vi møder efter 2 omgange ad den spiralformede bane på stængelen. Hvis vi havde valgt et andet blad som nr. 0, ville vi have fået samme resultat, dvs. 5 og 2. Dette var et tegnet eksempel, men på fig. 13 ses en gummiplante, hvor det samme er gjort. Skemaet viser andre eksempler:

Plante	Antal blade	Antal omgange
Elm, iris	2	1
Piletræ	3	1
Stuebirk, frugttræer	5	2
Vejbred	8	3
Porre	13	5

Alle tallene er Fi-tal, og i hver række står F_{n-1} og F_{n+1}, hvor det mellemliggende tal, F_n, er sprunget over. I det følgende benyttes benævnelsen *Fibonaccigenboer* om F_{n-1} og F_{n+1}. Det er klart, at ovenstående planter er valgt ud, men de er ikke så specielle, som man måske vil tro; mange planter følger dette mønster.

Nu er det jo ikke muligt at spørge, hverken naturen eller skaberen, om, hvorfor dette mønster er så almindeligt. Derimod er det muligt at undersøge, hvad der gør det til et for naturen fornuftigt princip. Hertil ser vi på de forhold, der, som i skemaet, består af to Fibonaccigenboer:

$$\frac{\text{antal blade}}{\text{antal omgange}} : \frac{2}{1}, \frac{3}{1}, \frac{5}{2}, \frac{8}{3}, \frac{13}{5}, \frac{21}{8}, \ldots$$

Udregnes disse brøker, fås

$$2{,}0\ ,\ 3{,}0\ ,\ 2{,}5\ ,\ 2{,}667\ ,\ 2{,}600\ ,\ 2{,}625\ ,\ 2{,}615\ ,\ \ldots \qquad (1)$$

Det ser altså ud, som om de nærmer sig en bestemt værdi, men hvilken? Svaret findes under anvendelse af sætning 1, kap. 12, og en lille omskrivning:

$$\frac{F_{n+1}}{F_{n-1}} = \frac{F_{n+1}}{F_n} \cdot \frac{F_n}{F_{n-1}} \rightarrow \Phi^2 \text{ for } n \rightarrow \infty$$

For botanikere er det vel ikke umiddelbart interessant, at der er tale om forholdet mellem to Fibonaccigenboer, og at dette forhold går mod Φ^2 = 2,62. For dem er det nok mere interessant, at alle forholdene ligger mellem 2 og 3, altså at der er fra 2 til 3 blade pr. omgang.

At dette er tilfældet, kan ses af, at 1., 3., 5. og 7. led i (1) udgør en voksende følge, mens de resterende udgør en aftagende følge. Sammenholdes det med den fundne grænseværdi, og at 1. og 2. led er hhv. det mindste og største tal, ses det, at de alle må ligge i [2,3].

Dette fortæller, at bladene er placeret på stænglerne i spiraler på en sådan måde, at de er skilt fra hinanden med mellem $\frac{1}{2}$ og $\frac{1}{3}$ omgang. Hermed opnår planten optimale muligheder for lys og luft for det enkelte blad, samtidig med at det giver mulighed for et stort antal blade, da den korteste vej på en cylinderflade er en spiral.

En anden forbindelse mellem planter og Fi-tal findes undertiden ved at tælle blomster og bladene horisontalt på en stilk – hvad der menes hermed, fremgår af den stiliserede tegning af træerne på fig. 14. Til venstre er antallet af blomster og blade i et 'vandret snit' Fi-tal, til højre hvad vi kan kalde *Tribonaccital* – overvej, hvad der menes med det!

Vi betragter herefter solsikker, se fig. 15. Hvis vi tæller de spiraler, der går mod og med uret, vil det altid være nabo-Fibonaccital. Som oftest er det 21/34 op til 89/144; man skal dog have fundet et eksempel med 144/233.

Fig. 14

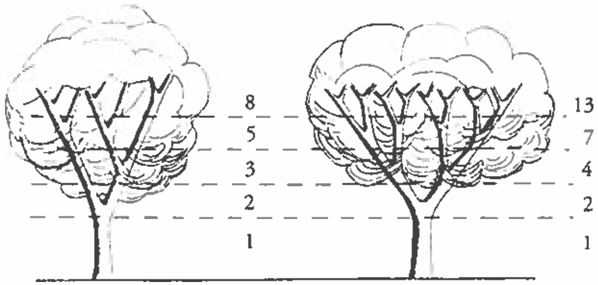


Fig. 16. Solsikke

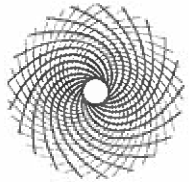
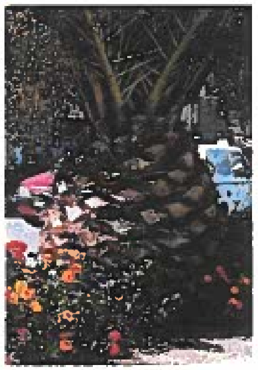


Fig. 15. Solsikkespiraler.

Fyrrekogle

Grankogle



Palme

For grankogler og ananas gælder noget tilsvarende, på fig. 16 har grankoglen 5 spiraler den ene vej og 8 den anden, mens ananasen har hhv. 8 og 13, altså nabo–Fibonaccital. Hvis den vokser, springer den direkte til hhv. 13 og 21 spiraler! Tilsvarende gælder for rosenkål, artiskok, fyrrekogle ... .

Ananas.
Nedenfor er spiralerne vist.

Artiskok

Rosenkål