13

Jens Carstensen og Jesper Frandsen
Matematik for mellemniveau
Systime 1991

da Vinci og le Corbusier

Som allerede nævnt har mange kunstnere benyttet gyldne rektangler og snit. Som eksempler på kunstnere, der bevidst har arbejdet med det, vil vi se på to verdenskendte kunstnere fra hver sin tid, nemlig Leonardo da Vinci og le Corbusier.

Italieneren Leonardo da Vinci (1452–1519) var et universalgeni, men kendes vel især som kunstner, da han bl.a. har malet "Mona Lisa". Som så mange andre før ham forsøgte han at finde sammenhænge og love for menneskelegemets proportioner, hvilket fremgår af hans billede "Homo ad circulum" fra ca. 1460, se fig. 26a.

Vi vil nu se på, nogle af billedets forhold, og kan kun opfordre læseren til ved målinger af sig selv og andre, at kontrollere om påstandene er rigtige.

På fig. 26b er personen anbragt i et kvadrat, hvilket viser, at afstanden fra fingerspids til fingerspids er lig med hans højde, AB.

14

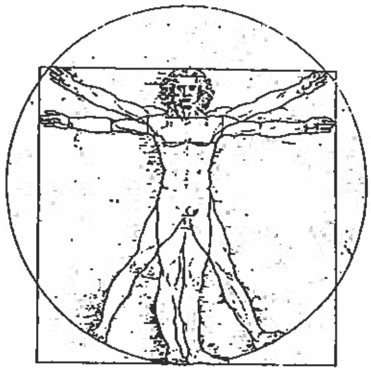


Fig. 26a

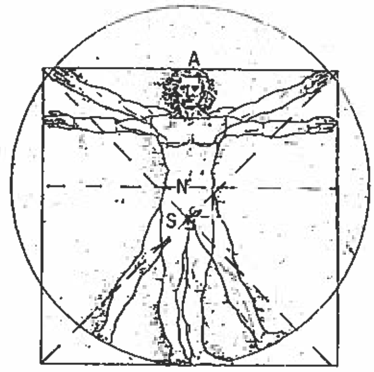


Fig. 26b

Tegnes kvadratets diagonaler skærer de hinanden i skridtet S, dvs. AS = SB. Desuden lod da Vinci en vandret linje gennem navlen være skillelinjen mellem over- og underkroppen.
Leonardo da Vincis påstand var nu, at

$$\frac{\text{Totalhøjde}}{\text{Underkropslængde}} = \frac{\text{Underkropslængde}}{\text{Overkropslængde}} = \Phi$$

eller

$$\frac{AB}{BN} = \frac{BN}{AN} = \Phi .$$

Cirklen har ikke umiddelbart noget med Φ at gøre, men benyttes til at vise, at navlen er centrum for den cirkel, der går gennem fingerspidserne, når de løftes til issehøjde, og tåspidserne, når benene spredes passende.

Når så mange gennem tiderne har forsøgt at finde Φ i det menneskelige legemes proportioner, skyldes det bl.a. en opfattelse af gyldne snit og gyldne rektangler som guddommelige forhold, og da mennesket blev skabt i Guds billede, må de kunne genfindes i mennesket. Dette understreges af, at navnet "det gyldne snit" først benyttes i det 19.århundrede. Tidligere hed det bl.a. "den guddommelige proportion", eller på italiensk "De Divina Proportione". Dette er også navnet på et værk af Luca Pacioli fra 1509, der blev illustreret af Leonardo da Vinci. Bogen indeholder redegørelser for, hvordan Φ optræder i plane og rumlige figurer. Det kan nævnes, at Luca Pacioli bl.a. hævder, at

- det gyldne snits forhold er enestående, ligesom Gud er enestående.

- det gyldne snit indeholder tre størrelser som gensidigt betinger hinanden (med betegnelserne fra definitionen er det a, b og a+b) på samme måde som faderen, sønnen og helligånden.

- det gyldne snit lader sig kun definere vha. irrationelle tal ($\sqrt{5}$ indgår), og kan derfor, på samme måde som Gud, ikke indordnes i den virkelige/rationelle verden.

- det gyldne snit er evigt, uforanderligt og nærværende i alle sine dele, ganske som Gud er evig, uforanderlig og altid nærværende.

Hvis billedet på fig. 26 synes bekendt, kan det skyldes, at det i dag benyttes som bomærke (logo), på bogomslag mm.

Bent Hirsberg og Klaus Holth
Tal og geometri, nogle træk af den græske matematiks historie, Trip 1. udgave, 1. oplag 1982

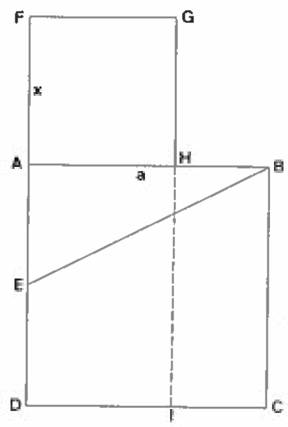
15

S35

Konstruktionen af kvadratet x^2 kan tolkes som en geometrisk måde at løse andengradsligningen $x^2 = ab$ på. Identificerer vi igen størrelserne med rationale tal, ser vi, at selv om a og b er rationale tal, så behøver x ikke nødvendigvis at være det. Men konstruktionen viser, at man altid kan løse ligningen geometrisk. At grækerne også kunne løse mere komplicerede andengradsligninger, er nedenstående et eksempel på. Vi skal her finde en løsning til ligningen

$$x^2 + ax = a^2$$

Vi kan tolke opgaven således: Konstruer ud fra et givet liniestykke a et liniestykke x, således at kvadratet x^2 og rektanglet ax tilsammen er lige så store som kvadratet a^2. I Euklids Elementer (Bog 2, Sætning 11) anvises følgende konstruktion:



På liniestykket AB (a) konstrueres et kvadrat ABCD (a^2). AD halveres i punktet E, og liniestykket EB tegnes. Dernæst afsættes et liniestykke med samme længde som EB ud ad EA til F. På AB afsættes endeligt kvadratet AFGH (x^2) og rektanglet AHID (ax). Påstanden er nu, at kvadratet og rektanglet tilsammen er lig kvadratet ABCD.

Da trekant EAB er retvinklet og EB = EF, følger det af den pythagoræiske læresætning (Sætning 3.4), at

$$(x + \frac{1}{2}a)^2 - (\frac{1}{2}a)^2 = a^2$$

S36

Af Sætning 3.3 følger nu, at differensen mellem disse to kvadrater er lig med rektanglet $(x+a)x$, d.v.s.

$$x^2 + ax = a^2$$

AH = x er således det søgte liniestykke. Om H's deling af AB skiver Euklid:

> »At dele en given ret linie således, at det rektangel, der indesluttes af hele linien og det ene af stykkerne, er lig kvadratet på det andet stykke«.

Delingen af AB i AH og HB kaldes det *gyldne snit*. Konstruktionen har haft stor betydning for både græsk og senere europæisk kunst og arkitektur. En af årsagerne til dette er, at et rektangel med siderne AH og HB af de fleste opfattes som mere harmonisk end mere aflange eller mere sammentrykkede rektangler.

Jesper Frandsen: Det Gyldne Snit - i kunst, natur og matematik
Systime 1. udgave, 1. oplag 1991

7. Formler for Fibonaccital

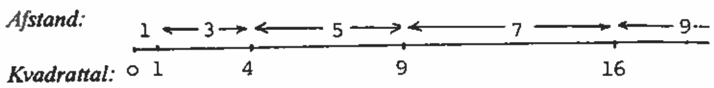
Vi skal i det følgende bevise nogle formler, hvor det er bekvemt at have det såkaldte ***induktionsbevis*** til rådighed. Hvis denne bevismetode i forvejen er kendt af læseren, kan det efterfølgende afsnit overspringes.

Induktionsbeviset

Vi vil vise, hvordan metoden virker ved hjælp af et eksempel fra den del af matematikken, hvor induktionsbeviset oftest finder anvendelse, nemlig talteorien, hvor Fibonaccitallene også hører hjemme.

Når man arbejder med tal, finder man undertiden eksempler på overraskende sammenhænge, der får en til at undre sig, og spørge om det er enkelttilfælde, eller om det mon gælder generelt. Som et eksempel på dette er kvadrattallene på fig. 82 afsat under talaksen, mens afstanden mellem kvadrattallene er afsat over aksen:

Fig. 82



Det overraskende er nu, at det ser ud, som om afstanden mellem kvadrattallene vokser med de ulige tal. Gælder det mon altid? At svaret er bekræftende vil vi nu vise vha. et induktionsbevis.

Vi opskriver opdagelsen på en anden måde, nemlig som ligninger:

p(1):	$1 = 1 = 1^2$
p(2):	$1 + 3 = 4 = 2^2$
p(3):	$1 + 3 + 5 = 9 = 3^2$
p(4):	$1 + 3 + 5 + 7 = 16 = 4^2$
p(5):	$1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25 = 5^2$

idet vi med p(n) betegner den n-te ligning.

På dette tidspunkt ved vi altså, at p(1), p(2), p(3), p(4) og p(5) er sande. Det generelle udtryk for p(n) skal nu opskrives, og efter lidt pusleri finder man, at

$$p(n):\quad 1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = n^2 .$$

Vi vil nu vise, at

hvis p(n) er sand, ***så*** er p(n+1) også sand, dvs. $p(n) \Rightarrow p(n+1)$.

Vi antager derfor, at p(n) er sand, og opskriver p(n+1) som vi bl.a. vha. antagelsen vil omskrive.

$$p(n+1):\ \underline{1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1)} + (2n+1) = (n+1)^2 ,$$

her er den understregede del netop venstresiden i p(n), og da vi har antaget, at p(n) er sand, kan det erstattes med højresiden i p(n). Dette giver disse omskrivninger:

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) + (2n+1) = (n+1)^2 \Leftrightarrow$$
$$n^2 + (2n+1) = (n+1)^2 \Leftrightarrow$$
$$n^2 + 2n + 1 = n^2 + 2n + 1 .$$

Da det nederste udsagn er sandt, er det øverste også, men da dette var p(n+1), har vi nu vist, at

$$p(n) \Rightarrow p(n+1). \qquad (1)$$

Da vi fra tidligere ved, at p(1) er sand, og $p(1) \Rightarrow p(2)$, iflg. (1), er p(2) sand.
Da p(2) således er sand, og $p(2) \Rightarrow p(3)$, iflg. (1), er p(3) sand.
Da p(3) således er sand, og $p(3) \Rightarrow p(4)$, iflg. (1), er p(4) sand.
: : : :

Det ses, at dette kan fortsættes i det uendelige, hvorfor p(n) er sand for alle $n \in \mathbb{Z}_+$.

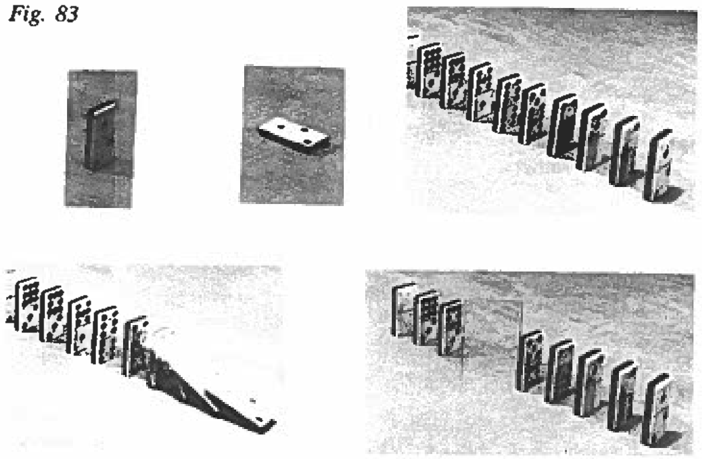
Bevismetoden bygger på det såkaldte *induktionsaksiom*, altså en grundsætning, der ikke bevises.

16

> **Induktionsaksiomet.** Hvis det om et åbent udsagn p(n) gælder, at
>
> $$p(1) \text{ er sand}$$
>
> $$p(n) \Rightarrow p(n+1) \text{ for alle } n \in Z_+ ,$$
>
> så er p(n) sand for alle $n \in Z_+$.

Idèen i induktionsbeviset kan illustreres vha. dominobrikker, som det er gjort på fig. 83.

Fig. 83



Den enkelte dominobrik symboliserer et udsagn p(n). Når den står op, vides det endnu ikke om p(n) er sand eller falsk. Når den er faldet, symboliserer den, at p(n) er sand. De to første figurer viser udviklingen fra, at det skal vises, at p(1) er sand, til det er vist. De to næste viser, hvordan en dominobrik river de andre med sig i faldet, dvs. $p(n) \Rightarrow p(n+1)$. To ting kan forhindre et induktionsbevis, nemlig at p(1) ikke er sand, den første brik falder aldrig, og at der findes en brik, der ikke vælter den næste – der er for langt mellem dem. Dette er illustreret på den sidste figur.

Det kan ofte betale sig at lade opbygningen af et induktionsbevis

følge et mønster som dette:

1. Opskriv p(n).
2. Vis, at p(1) er sand. For at få en fornemmelse af problemets art kan det ofte betale sig også at vise, at p(2) og p(3) er sande.
3. Antag, at p(n) er sand og vis derefter, at $p(n) \Rightarrow p(n+1)$.
4. Som følge af induktionsaksiomet er det dermed vist, at p(n) er sand for alle $n \in Z_+$.

Binets formel

Binets formel kan direkte bevises ved hjælp af induktion, men vi vil her gøre det under anvendelse af en hjælpesætning, som vi også senere får brug for.

Ideen til denne sætning får vi ved udtrykke Φ^n vha. Φ. Vi finder således, at

$$\Phi^2 = \Phi + 1$$

$$\Phi^3 = \Phi \cdot \Phi^2 = \Phi(\Phi+1) = \Phi^2 + \Phi = (\Phi+1) + \Phi = 2\Phi + 1$$

$$\Phi^4 = \Phi \cdot \Phi^3 = \Phi(2\Phi+1) = 2\Phi^2 + \Phi = 2(\Phi+1) + \Phi = 3\Phi + 2$$

$$\Phi^5 = \Phi \cdot \Phi^4 = \Phi(3\Phi+2) = 3\Phi^2 + 2\Phi = 3(\Phi+1) + 2\Phi = 5\Phi + 3$$

$$\Phi^6 = \Phi \cdot \Phi^5 = \Phi(5\Phi+3) = 5\Phi^2 + 3\Phi = 5(\Phi+1) + 3\Phi = 8\Phi + 5$$

Det ses, at alle tallene i udtrykkene for Φ^n er nabo–Fibonaccital, og den fundne sammenhæng er grundlaget for hjælpesætningen. Bemærk, hvordan det ved hver omskrivning er den foregående, der benyttes; der er således lagt op til et induktionsbevis.

17

Da det kan vises, at sammenhængen også gælder for Φ', og da Φ og Φ' er de eneste løsninger til ligningen $x^2 = x + 1$, formulerer vi sætningen således:

Sætning 8. Når $x^2 = x + 1$, og F_n er det n–te Fibonaccital, gælder det for $n > 1$, at

$$x^n = F_n x + F_{n-1} \ .$$

Bevis: Da vi vil lave et induktionsbevis, indleder vi med at definere udsagnet

$$p(n): \ x^n = F_n x + F_{n-1} \ .$$

For $x = \Phi$ har vi ovenfor vist, at p(n) er sand for n= 2,3,4,5 og 6. Da det som omtalt kan gøres helt tilsvarende for $x = \Phi'$, er p(n) sand for n = 2,3,4,5 og 6.

Det antages derefter, at p(n) er sand, og det skal så vises, at

$$p(n+1): \ x^{n+1} = F_{n+1} x + F_n$$

er sand. Dette gøres ved følgende omskrivninger:

$$x^{n+1} = x \cdot x^n = x(F_n x + F_{n-1}) = F_n x^2 + F_{n-1} x =$$

$$F_n(x+1) + F_{n-1} x = (F_n + F_{n-1})x + F_n = F_{n+1} x + F_n$$

– hvor vi ved det andet lighedstegn benyttede antagelsen.
Da p(1) er sand, og $p(n) \Rightarrow p(n+1)$, er p(n) ifølge induktionsaksiomet sand for alle $n \in Z_+$. ■

Vi kan herefter let og endog meget elegant bevise

Sætning 9 *(Binets formel)*. Det n–te Fibonaccital F_n er for alle $n \in Z_+$ bestemt ved

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right] .$$

Bevis. Fra sætning 8 ved vi, at

$$\Phi^n = F_n\Phi + F_{n-1} \quad (1) \qquad \text{og} \qquad \Phi'^n = F_n\Phi' + F_{n-1} \quad (2) .$$

Vi trækker nu (2) fra (1) og får

$$\phi^n - \phi'^n = F_n(\phi - \phi') \quad \Leftrightarrow \quad F_n = \frac{1}{\phi - \phi'} \cdot (\phi^n - \phi'^n) .$$

Idet

$$\phi - \phi' = \frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{1-\sqrt{5}}{2} = \sqrt{5}$$

fås Binets formel ved indsættelse af dette og værdierne for Φ og Φ'. ■