

Mogens Bruun Heefelt:

Dynamiske Modeller

Gyldendal 1990, 1. oplag

S. 82 n - S. 85 m

7. EKSEMPLER PÅ DYNAMISKE MODELLER

Da antallet af celler i denne overfladezone vil udgøre en stadig mindre del af svulstens samlede antal celler $-y(t)$, vil tilvæksten i antal celler $-y'(t)$ ske stadig langsommere. Dette forhold vil vi modellere.

For bedre at overskue problemstillingen opfatter vi svulsten som kugleformet. Da vil det totale antal celler i svulsten (dvs svulstens volumen) vokse proportionalt med $r^3(t)$ - hvor r er kuglens radius - mens antallet af „aktive“ celler (dvs svulstens overflade) vil vokse proportionalt med $r^2(t)$.

Således vil forholdet mellem antallet af „aktive“ celler og det totale antal celler udvikle sig som $r^2(t)/r^3(t)$. Vi kan således antage, at tilvæksten i antal celler i store træk vil følge en model, hvor

$$y'(t) = a \frac{1}{r(t)} y(t)$$

Det er derimod ikke klart, hvordan den tidlige udvikling af $r(t)$ vil være, ud over at r vil være voksende. Man har valgt at modellere r ved

$$r(t) = e^{bt}, \quad 0 < b \ll 1.$$

Den endelige model for udviklingen af antal celler i en kræftsvulst vil så være

$$(7.3) \quad y'(t) = ae^{-bt}y(t).$$

Denne differentialligning har ifølge formel (4.5') den fuldstændige løsning

$$(7.4) \quad y(t) = ce^{-\frac{a}{b}e^{-bt}}$$

hvor c er en vilkårlig konstant. Kender man antallet af celler y_0 til et givet (start-)tidspunkt ($t = 0$), kan man af (7.4) finde, at

$$c = y_0 e^{\frac{a}{b}}$$

og løsningen bliver da

$$(7.5) \quad y(t) = y_0 e^{\frac{a}{b}(1 - e^{-bt})}$$

Ud fra løsningen kan man se, at der vil være et maksimalt antal celler i en sådan svulst, nemlig

$$y_{\max} = y_0 e^{\frac{a}{b}}$$

idet $e^{-bt} \rightarrow 0$ for $t \rightarrow \infty$, da jo $b > 0$.

7.2 Vækst af en kræftsvulst

Kræftceller i en organisme samler sig normalt i bestemte områder af organismen. I begyndelsen vil disse celler vokse „vildt“, men efterhånden vokser de sammen i en svulst. I denne svulst dannes en kerne, hvor cellerne ikke længere kan dele sig, fordi de mangler plads, ilt og næringsstoffer. Det vil således kun være i svulstens overflade, at celledeling fortsat kan ske.

Øvelse 7.3

Bestem det tidspunkt τ , hvor svulsten ikke længere kan fordoble antallet af celler, dvs at finde τ således at

$$y(\tau) = y_{\max}/2.$$

Fastlæg endvidere fordoblingstiden T (der afhænger af t) for svulsten, dvs at bestemme T således at

$$y(t+T) = 2y(t).$$

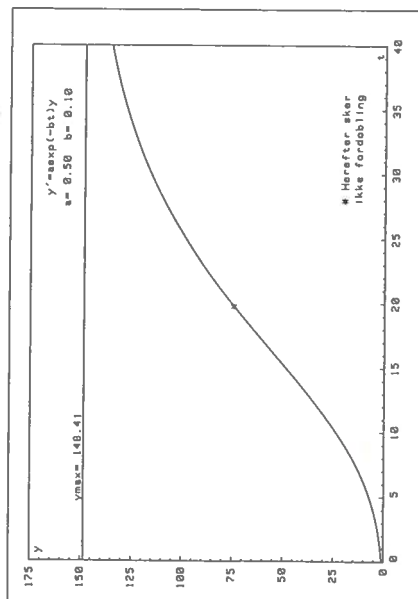
Godtgør endelig, at $T \rightarrow \infty$, når $t \rightarrow \tau^-$.

Da $y(t) \rightarrow 0$ for $t \rightarrow -\infty$ vil enhver løsningskurve have de to vandrette asymptoter

$$y = 0 \quad \text{og} \quad y = y_{\max}.$$

Da $y_0 > 0$ bliver også $y(t) > 0$, og da tillige $a > 0$ får man af (7.3), at $y'(t) > 0$, dvs at y er monotont voksende mellem de to asymptoter. Alle løsningskurver vil derfor have en vendetangent, dvs hvor svulsten vokser hurtigst. Af (7.3) får man ved differentiation, at

$$\begin{aligned} y''(t) &= -abe^{-by(t)} + ae^{-by(t)} \\ &= -by'(t) + ae^{-by(t)} = (ae^{-by(t)} - b)y'(t). \end{aligned}$$



Figur 7.2

Da $y'(t) > 0$, er $y''(t) = 0$ netop når

$$(7.6) \quad e^{-bt} = \frac{b}{a} \quad \text{eller} \quad t = (\ln a - \ln b)/b$$

og ved indsættelse i (7.5) vil

$$\begin{aligned} y(t) &= y_0 e^{\frac{a}{b}(1 - \frac{b}{a}e^{-bt})} = y_0 e^{e^{-bt}} - 1 \\ &= y_{\max}/e \end{aligned}$$

og den maksimale væksthastighed bliver da, jfr (7.6) og (7.3)

$$y'(t) = by_{\max}/e.$$

Af figur 7.2 kan man se, hvordan grafen for (7.5) vil forløbe, når $y_0 = 1$, $a = 0.5$ og $b = 0.1$.