

Mogens Bruun Heefelt:
 Dynamiske Modeller
 Gyldendal 1990, 1. oplag
 s. 82 n - s. 85 m

7.2 Vækst af en kræftsvulst

Kræftceller i en organisme samler sig normalt i bestemte områder af organismen. I begyndelsen vil disse celler vokse „vildt“, men efterhånden vokser de sammen i en svulst. I denne svulst dannes en kerne, hvor cellerne ikke længere kan dele sig, fordi de mangler plads, ilt og næringsstoffer. Det vil således kun være i svulstens overflade, at celledeling fortsat kan ske.

82

7. EKSEMPLER PÅ DYNAMISKE MODELLER

Da antallet af celler i denne overfladezone vil udgøre en stadig mindre del af svulstens samlede antal celler $- y(t)$, vil tilvæksten i antal celler $- y'(t)$ ske stadig langsommere. Dette forhold vil vi modellere.

For bedre at overskue problemstillingen opfatter vi svulsten som kugleformet. Da vil det totale antal celler i svulsten (dvs svulstens volumen) vokse proportionalt med $r^3(t)$ - hvor r er kuglens radius - mens antallet af „aktive“ celler (dvs svulstens overflade) vil vokse proportionalt med $r^2(t)$.

Således vil forholdet mellem antallet af „aktive“ celler og det totale antal celler udvikle sig som $r^2(t)/r^3(t)$. Vi kan således antage, at tilvæksten i antal celler i store træk vil følge en model, hvor

$$y'(t) = a \frac{1}{r(t)} y(t)$$

Det er derimod ikke klart, hvordan den tidlige udvikling af $r(t)$ vil være, ud over at r vil være voksende. Man har valgt at modellere r ved

$$r(t) = e^{bt}, \quad 0 < b \ll 1.$$

Den endelige model for udviklingen af antal celler i en kræftsvulst vil så være

$$(7.3) \quad y'(t) = ae^{-bt} y(t).$$

Denne differentialligning har ifølge formel (4.5) den fuldstændige løsning

$$(7.4) \quad y(t) = ce^{-\frac{a}{b}e^{-bt}}$$

hvor c er en vilkårlig konstant. Kender man antallet af celler y_0 til et givet (start-)tidspunkt ($t = 0$), kan man af (7.4) finde, at

$$c = y_0 e^{\frac{a}{b}}$$

og løsningen bliver da

$$(7.5) \quad y(t) = y_0 e^{\frac{a}{b}(1 - e^{-bt})}$$

Ud fra løsningen kan man se, at der vil være et maksimalt antal celler i en sådan svulst, nemlig

$$y_{\max} = y_0 e^{\frac{a}{b}}$$

idet $e^{-bt} \rightarrow 0$ for $t \rightarrow \infty$, da $b > 0$.

83

Øvelse 7.3

Bestem det tidspunkt τ , hvor svulsten ikke længere kan fordoble antallet af celler, dvs at finde τ således at

$$y(\tau) = y_{\max}/2.$$

Fæstlæg endvidere fordoblingstiden T (der afhænger af t) for svulsten, dvs at bestemme T således at

$$y(t+T) = 2y(t).$$

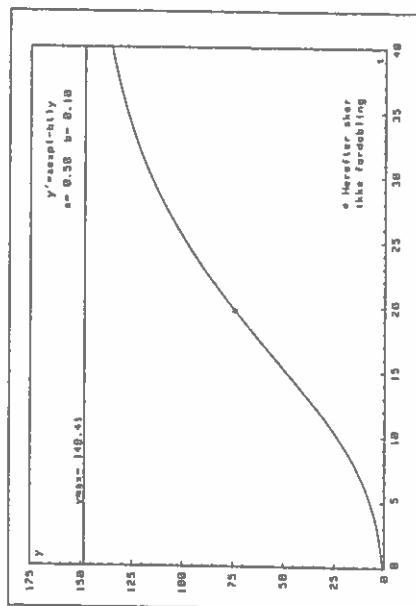
Godtgør endelig, at $T \rightarrow \infty$, når $t \rightarrow \tau$.

Da $y(t) \rightarrow 0$ for $t \rightarrow -\infty$ vil enhver løsningskurve have de to vandrette asymptoter

$$y = 0 \quad \text{og} \quad y = y_{\max}.$$

Da $y_0 > 0$ bliver også $y(t) > 0$, og da tillige $a > 0$ får man af (7.3), at $y(t) > 0$, dvs at y er monoton voksende mellem de to asymptoter. Alle løsningskurver vil derfor have en vendetangent, dvs hvor svulsten vokser hurtigst. Af (7.3) får man ved differentiation, at

$$\begin{aligned} y''(t) &= -a b e^{-b y(t)} + a e^{-b y(t)} \\ &= -b y'(t) + a e^{-b y(t)} = (a e^{-b y(t)} - b) y'(t). \end{aligned}$$



Figur 7.2

Da $y'(t) > 0$, er $y''(t) = 0$ netop når

$$(7.6) \quad e^{-b y} = \frac{b}{a} \quad \text{eller} \quad t = (\ln a - \ln b)/b$$

og ved indsættelse i (7.5) vil

$$\begin{aligned} y(t) &= y_0 e^{b(t - \frac{1}{b})} = y_0 e^{b t - 1} \\ &= y_{\max}/e \end{aligned}$$

og den maksimale væksthastighed bliver da, jfr (7.6) og (7.3)

$$y'(t) = b y_{\max}/e.$$

Af figur 7.2 kan man se, hvordan grafen for (7.5) vil forløbe, når $y_0 = 1$, $a = 0.5$ og $b = 0.1$.

Jens Carstensen, Jesper Frandsen : MAT 34

Systeme ludo. lopl. 1999
S. 102 midt - s. 103

Forurening

Til tidspunktet $t = 0$ indeholder en lille sø $6 \cdot 10^7$ liter rent vand. Et forurenede vandløb bringer 0,5 L forurening og 11,5 L vand ind i søen pr. sekund. Vi går ud fra, at denne blanding straks blandes med vandet i søen. Samtidig løber 12 L vand bort fra søen gennem en afløbskanal.

Lad $f(t)$ være antal liter forurening til tidspunktet t . I 1 liter søvand findes så $\frac{f(t)}{6 \cdot 10^7}$ liter forurening. Ændringen i mængden af forurening i søen er den indadgående mængde minus den udadgående mængde.

Den udadgående mængde er målt i L/s

$$\frac{12 \cdot f(t)}{6 \cdot 10^7} = 2 \cdot 10^{-7} \cdot f(t)$$

og den indadgående er 0,5 L/s. Altså kan vi opstille differentialligningen

$$f'(t) = 0,5 - 2 \cdot 10^{-7} \cdot f(t) = b + a \cdot f(t) ,$$

hvor $b = 0,5 \text{ L/s}$ og $a = -2 \cdot 10^{-7} \text{ s}^{-1}$.

Efter sætning 3 har denne ligning den fuldstændige løsning

102

$$f(t) = -\frac{b}{a} + c \cdot e^{at} . \quad (20)$$

Vi har forudsat, at $f(0) = 0$, og indsættes dette, kan vi finde c :

$$0 = -\frac{b}{a} + c \cdot e^0 \Leftrightarrow c = \frac{b}{a}$$

så løsningen (20) bliver

$$f(t) = -\frac{b}{a} + \frac{b}{a} \cdot e^{at} = \frac{b}{a}(e^{at} - 1) .$$

Da

$$\frac{b}{a} = -\frac{0,5}{2 \cdot 10^{-7}} = -0,25 \cdot 10^7 \text{ L},$$

er mængden af forurenede stof i søen til tidspunktet t

$$f(t) = -0,25 \cdot 10^7 (e^{-2 \cdot 10^{-7} t} - 1) .$$

Så længe t er lille, er $f(t)$ også forholdsvis lille. Men når t vokser, vil

$$e^{-2 \cdot 10^{-7} t} \rightarrow 0 \text{ for } t \rightarrow \infty ,$$

så

$$f(t) \rightarrow 0,25 \cdot 10^7 \text{ for } t \rightarrow \infty .$$

Efter et længere stykke tid indstiller der sig altså en ligevægt, hvor søen indeholder en mængde forurenede stof på $0,25 \cdot 10^7$ liter, og da søen til stadighed indeholder $6 \cdot 10^7$ liter vand, udgør forureningen altså $\frac{0,25}{6} = \frac{1}{24} = 4,2\%$ af søens vandmængde.

103

Logistisk vækst – bæverbstanden i Klosterheden

I 1999 blev 6 bæverfamilier med i alt 18 bævere sat ud 6 forskellige steder ved Flynder å i Klosterheden.

I skal i denne øvelse undersøge om udviklingen af bæverbstanden i Klosterheden med rimelighed følger en logistisk vækstmodel.



Udviklingen i antallet af bævere fremgår af nedenstående tabel:

År	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2013	2015
Optalte dyr	18	24	34	45	53	62	77	89	104	121	139	156	165	185	213

Logistisk regression

Hvis man vil checke om en given populationsudvikling følger en logistisk model kan man lave logistisk regression på tallene. Først skal x-værdierne laves om, så x angiver antal år efter 1999. Dvs. vi arbejder med flg. tabel.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	14	16
Optalte dyr	18	24	34	45	53	62	77	89	104	121	139	156	165	185	213

Ved brug af TI-Nspire vælges regressionstypen Logistic Regression (d=0)

a) Gør dette.

Hvis vi vil checke hvor god sammenhængen er, kan vi isolere det eksponentielle led, og så lave en eksponentiel regression, hvorved vi får en r^2 -værdi for denne regression:

$$n(t) = \frac{M}{1 + c \cdot e^{-a \cdot M \cdot t}} \Leftrightarrow c \cdot e^{-a \cdot M \cdot t} = \frac{M}{n(t)} - 1$$

Med andre ord laver vi en ny tabel, hvor y-værdierne er erstattet af $\frac{M}{\text{antal optalte bævere}} - 1$

hvor M fås fra regressionsligningen. Ud fra denne tabel laves eksponentiel regression, og ud fra r^2 -værdien kan vi konkludere om det er rimeligt at antage at bæverudviklingen følger en logistisk vækstmodel.

- b) Lav ovenstående tabel og den eksponentielle regression, og konkluder om bæverudviklingen følger en logistisk vækstmodel.

38.9 Eksempel. Radioaktiv henfald

I et radioaktivt præparat betegner $n(t)$ antallet af kerner af en radioaktiv isotop til tiden t . I den klassiske model for henfaldet antages at antallet af henfald pr tidsenhed er proportional med n :

$$\frac{dn}{dt} = -k \cdot n$$

Den positive konstant k kaldes *henfaldskonstanten*, og er det samme som den numeriske værdi af den konstante relative væksthastighed $\frac{n'}{n}$. Løsnin-

gen er ifølge 38.2 givet ved

$$n = n_0 \cdot e^{-kt}$$

hvor n_0 er antallet af kerner til tiden $t = 0$.

38.10 Eksempel. Radioaktiv ligevægt

Naturligt forekommende kulstof er en blanding af de tre isotoper ^{12}C , ^{13}C og ^{14}C . Den sidste isotop er ustabil idet den omdannes til kvælstofisotopen ^{14}N ved et β -henfald med en halveringstid på 5730 år. På grund af den kosmiske stråling dannes imidlertid hele tiden nye ^{14}C -kerner:



Med $y(t)$ betegnes antallet af ^{14}C -kerner i atmosfæren til tidspunktet t . Idet produktionen af ^{14}C -kerner tænkes at foregå med konstant hastighed m (antal dannede kerner pr sekund) fås i henhold til eksempel 38.9

$$\frac{dy}{dt} = m - k \cdot y$$

Af 38.3 følger at der gælder

$$y(t) = \frac{m}{k} + c \cdot e^{-kt}$$

Det ses at

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \frac{m}{k}$$

Mængden af ^{14}C stabiliseres altså på et bestemt niveau. Kulstof-14 udgør derfor en konstant brøkdel af atmosfærens kulstof. Da alle levende organismer udveksler kulstof med atmosfæren gennem processer som fotosyntese, fødeindtagelse og respiration, vil levende væv indeholde samme brøkdel kulstof-14 som atmosfæren. Når organismen dør, ophører imidlertid kulstofudvekslingen med atmosfæren, og derfor vil kulstof-14 indholdet fra dødsøjeblikket aftage eksponentielt med halveringstid 5730 år. Det er baggrunden for at kulstof-14 indholdet i arkæologiske fund kan bruges til datering.

38.11 Øvelse

Benyt halveringstiden for ^{14}C til at bestemme henfaldskonstanten k . Bestem derpå alderen af et arkæologisk fund hvor indholdet af kulstof-14 er 20% af det oprindelige.

38.12 Øvelse Newtons temperaturlov.

Når et legeme med temperatur T placeres i omgivelser med temperatur T_0 , vil T nærme sig T_0 med en hastighed som er proportional med forskellen mellem legemets og omgivelsernes temperatur:

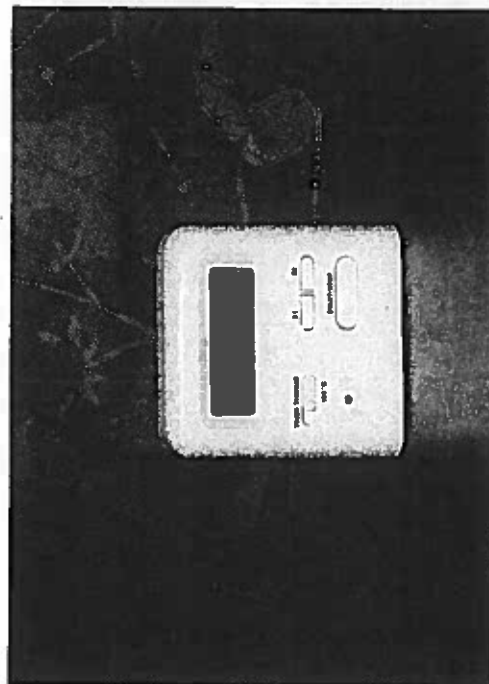
$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_0)$$

Proportionalitetskonstanten k afhænger blandt andet af legemets overfladeareal og dets varmekapacitet.

- a) Vis at der gælder $T = T_0 + c \cdot e^{-kt}$.

For en kande te placeret under en tevarmer i stuetemperatur (20°C) har man målt temperaturerne 92°C og 82°C til tidspunkterne $t = 0$ og $t = 10$ min.

- b) Bestem T som funktion af tiden.
c) Hvor længe varer det før teens temperatur når ned på 40°C ?
d) Bestem $\lim_{t \rightarrow \infty} T(t)$.



Figur 38.13. Et stegetermometer kan bruges til måling af teens temperatur.

Mogens Brun Heefelt

Differentialligningsmodeller

Gyldendal 1980

s93-s95midt

8.2 Radioaktivt henfald

I begyndelsen af dette århundrede påviste den engelske fysiker *Rutherford* og hans medarbejdere, at atomer af visse grundstoffer var ustabile i et givet tidsrum omdannedes således et bestemt antal atomer spontant D til atomer af et andet grundstof. Dette fænomen kaldes radioaktivt henfald, og de nævnte atomer kaldes radioaktive. Da radioaktivitet således er en egenskab ved selve atomet, kunne *Rutherford* tillige konkludere at et stofs radioaktivitet var direkte proportional med antallet af radioaktive atomer, som er til stede i stoffet. Hvis vi derfor benævner antallet af radioaktive atomer i stoffet til tiden t med $x(t)$ og antallet af atomer, der henfalder, med $x'(t)$, kan vi slutte, at $x'(t)$ er proportional med $x(t)$, dvs.

$$\underline{x'(t) = -\lambda x(t)} \quad \lambda > 0,$$

D hvor den positive konstant λ kaldes stoffets henfaldskonstant. Vi kan endvidere se, at jo større λ bliver, jo hurtigere vil stoffet henfalde og omvendt.

Benævner vi tillige antal atomer til tiden $t = 0$ med x_0 , kan vi af kapitlen 2 finde, at

$$\underline{x(t) = x_0 e^{-\lambda t}}$$

I stedet for at benytte henfaldskonstanten λ til at beskrive den hastighed, hvormed et radioaktivt stof henfalder, benytter man oftere stoffets halveringstid T , dvs. den tid der medgår for, at antallet af radioaktive atomer halveres. Vi kan således bestemme T af

$$x(t + T) = \frac{1}{2} x(t) \Leftrightarrow$$

$$x_0 e^{-\lambda(t+T)} = \frac{1}{2} x_0 e^{-\lambda t} \Leftrightarrow$$

$$e^{-\lambda T} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\lambda T = \ln 2 \Leftrightarrow$$

$$\underline{T = \frac{\ln 2}{\lambda}}$$

Dette viser, at halveringstiden er uafhængig af tiden t , samt at der er omvendt proportional med henfaldskonstanten, hvilket i øvrigt stemmer

mer glimrende med, at jo større λ bliver, jo hurtigere henfalder stoffet, dvs. jo kortere tid vil der medgå til en halvering af stoffet.

Et eksempel på et sådant radioaktivt henfald er omdannelsen af bly-214 (^{214}Pb) til bismuth-214 (^{214}Bi). Denne omdannelse har en halveringstid på 27 minutter, hvilket svarer til en henfaldskonstant på

$$\lambda = \frac{2.0}{9} \ln 2 \approx 1.540,$$

såfremt tiden regnes i timer. I fig. 8.1 er antallet af ^{214}Pb -atomer afbildet som funktion af t .

D Denne egenskab ved radioaktive atomer benyttes i praksis bl.a. i kulstof-14 metoden til datering af arkæologiske udgravninger. Det radioaktive kulstof (^{14}C) dannes ved kosmisk stråling af almindeligt kulstof (^{12}C).

Antages den kosmiske stråling konstant og den totale mængde kulstof M (dvs. summen af ^{14}C og ^{12}C) ligeså, vil mængden x af ^{14}C -atomer være styret af differentialligningen

$$\frac{dx}{dt} = k(M - x) - \lambda x$$

(prøv selv at begrunde den), hvor k er dannelsesraten ved kosmisk stråling, og λ er henfaldskonstanten (halveringstiden for ^{14}C er 5.568 år). Man kan da vise, at

$$x(t) = \frac{kM}{k + \lambda}.$$

Dvs. koncentrationen af ^{14}C i luften og i en levende organisme er konstant til enhver tid. Når en organisme dør, fx et træ bliver fældet, stopper træets assimilation af C_2O (med en vis mængde ^{14}C), og kun nedbrydningen af træets indhold af ^{14}C fortsætter.

Betegner $y(t)$ mængden af ^{14}C i organismen til tidspunktet t efter organismens død, og y_0 mængden af ^{14}C , da organismen døde (dvs. til $t = 0$), da vil y være givet ved

$$y(t) = y_0 e^{-\lambda t}.$$

Vi forestiller os nu, at vi har fundet trækul i en udgravning. Man måler da størrelsen r , som står for antal radioaktive henfald (per minut og gram), hvor jo

$$r = \lambda y(t).$$

Betegner r_0 antal radioaktive henfald (per minut og gram) for frisk træ, er tilsvarende

$$r_0 = \lambda y_0.$$

Vi får da af

$$\frac{r_0}{r} = \frac{\lambda y_0}{\lambda y_0 e^{-\lambda t}} = e^{\lambda t},$$

at

$$t = \frac{1}{\lambda} \ln \frac{r_0}{r},$$

hvor t således er trækullets alder.

Øvelse 8.1 Trækulfund i de berømte Lascaux huler i Frankrig gav i 1950 i gennemsnit 0.97 henfald per minut og gram. For frisk træ er det tilsvarende tal 6.68. Giv på denne baggrund en sandsynlig alder for hulemaleriernes opståen.